Numéro National de Thèse : 2016LYSEN051

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON
opérée par
l'Ecole Normale Supérieure de Lyon

Ecole Doctorale en Informatique et Mathématiques de Lyon (ED 512)

Spécialité de doctorat : Mathématiques

Soutenue publiquement le 12 décembre 2016, par :
Fangzhou JIN

Quelques aspects sur l'homologie de Borel-Moore dans le cadre de l'homotopie motivique : poids et G-théorie de Quillen

---

Devant le jury composé de :

M. Bruno KLINGLER	PR	Université Paris-Diderot	Examinateur
Mme. Florence LECOMTE	CR	Université de Strasbourg	Examinatrice
M. Johannes NAGEL	PR	Université de Bourgogne	Examinateur
Mme. Wieslawa NIZIOL	DR	ENS de Lyon	Examinatrice
M. Frédéric DÉGLISE	DR	Université de Bourgogne	Directeur

Rapporteurs absents lors de la soutenance :

M. Marc LEVINE	PR	Universität Duisburg-Essen	Rapporteur
M. Jörg WILDESHAUS	PR	Université Paris 13	Rapporteur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes remerciements les plus cordiaux à mon directeur de thèse Frédéric Déglise. Pendant ces quatre années d'études et de recherches scientifiques à Lyon sous sa direction, il m'a partagé son savoir et ses idées mathématiques passionnants avec générosité et enthousiasme, et m'a toujours encouragé à poursuivre la recherche en profondeur. C'est grâce à sa gentillesse et sa disponibilité pour la relecture soigneuse de mes manuscrits ainsi que ses suggestions pertinentes que cette thèse a pu voir le jour.

Je remercie chaleureusement à Marc Levine et Jörg Wildeshaus d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Leur lecture soigneuse du manuscrit et leurs commentaires m'ont permis à améliorer considérablement la qualité de cette thèse. Je remercie également Bruno Klingler, Florence Lecomte, Johannes Nagel et Wieslawa Niziol de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury.

Je remercie Mikhail Bondarko et Denis-Charles Cisinski pour des discussions concernant mes travaux de thèse. Leurs remarques et suggestions m'ont été précieuses. Je remercie Jörg Wildeshaus de m'avoir invité à donner un exposé aux Séminaires de Géométrie Arithmétique et Motivique à l'Université Paris 13. Mes remerciements vont aussi aux autres mathématiciens avec qui j'ai eu la chance de discuter et d'échanger les idées au niveau recherche pendant mes études doctorales, dont Giuseppe Ancona, Yves André, Johann Bouali, Jin Cao, Pierre Cartier, Roland Casalis, Huayi Chen, Daniel Harrer, Javier Frésan, Lie Fu, Philippe Gille, Bruno Kahn, Adeel Khan, Florence Lecomte, Yongqi Liang, Hsueh-Yung Lin, Jie Lin, Nicolas Mascot, Alberto Navarro, Wenhao Ou, Alena Piturka, Ismaël Soudères, Christophe Soulé, Amaury Thuillier, Vaibhav Vaish, Claire Voisin, et bien d'autres.

Je remercie les mathématiciens au sein de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées qui m'ont beaucoup aidé durant la rédaction de cette thèse, dont Ramla Abdellatif, Cécile Agnès, Laurent Berger, Alexandre Bordas, François Brunault, Vincent Calvez, François Dahmani, Gabriel Dospinescu, Etienne Ghys, Emmanuel Jacob, Mickaël Kourganoff, Samuel Le Fourn, Sébastien Martineau, Alvaro Mateos-Gonzalez, Greg McShane, Grégory Miermont, Matthias Moreno, Romain Petrides, Vincent Pilloni, Léo Poyeton, Loïc Richier, Sandra Rozensztajn, Mikael de la Salle, Denis Serre, Jean-Claude Sikorav, Alexandre Vérine, Paul Vigneaux, Xiaolin Zeng et bien d'autres. Je remercie les secrétaires de l'UMPA, Sandy Artero, Virginia Goncalves, Magalie Le Borgne, et la secrétaire du Département de Mathématiques, Catherine Favre, pour leurs aides énormes à tous les niveaux. Je remercie les personnels de l'ENS Lyon de m'avoir fourni une condition de travail tellement favorable.

Je dois mes idées mathématiques aussi aux mathématiciens à Paris qui m'ont appris pendant mes études à l'Ecole Normale Supérieure, dont Francis Brown, Huayi Chen, Olivier Debarre, Grégory Ginot, Michael Harris, Bruno Kahn, Nikita Karpenko, Bruno Klingler, Joël Merker, Jan Nekovář, et bien d'autres. Je remercie tout particulièrement Olivier Debarre, non seulement pour son excellent cours en géométrie algébrique, mais aussi pour son soutien constant en tant que mon tuteur à l'ENS et même après.

Je profite de cette occasion pour remercier mes amis avec qui j'ai passé de bons moments, à Lyon ou ailleurs, dont Xiaohua Ai, Samuel Bach, Dominique Bossé, Roland Casalis, Huan Chen, Linxiao Chen, Sheng Chen, Hsueh-Yung Lin, Wenjie Fang, Lie Fu, Xiaowen Gao, Ziyang Gao, Yichao Huang, Zhuokun Jiang, Ziqian Jin, Jhih-Huang Li, Jiaxu Liu, Hongzhou Lin, Jie Lin, Nicolas Mascot, Qiwen Lu, Yang Lu, Alberto Navarro, Wenhao Ou, Qiong-Qiong Pan, Maike Song, Shuai Wang, Yizhou Wu, Junyi Xie, Bin Xu, Daxin Xu, Fangjia Yan, Jianfeng Yao, Qizheng Yin, Yue Yu, Xiaolin Zeng, Jifeng Zhang, Ye-Ping Zhang, Zhen Zhang, Panpan Zheng, Yong Zhou, et bien d'autres. En particulier, je remercie Xiaolin Zeng pour la gastronomie lyonnaise qu'il m'a fait déguster, et aussi pour notre amitié mathématique, sportive et vidéoludique.

Je voudrais remercier la famille Nebout : Alain, Viviane, Louis, Valentine, Marguerite, Simon, Arthur, pour leur gentillesse de m'avoir acceuilli depuis mon arrivée en France et pour la vie traditionnelle à la française qu'ils m'ont fait découvrir. Je remercie Estelle Figon pour son cours de japonais très intéressant à l'ENS. Je remercie Ta-Ming Liu pour nos entretiens sur la litérature chinoise.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude la plus profonde à ma famille et en particulier mes parents, pour leur soutien permanent et de nombreuses discussions encourageantes.

Quelques aspects sur l'homologie de Borel-Moore dans le cadre de l'homotopie motivique : poids et G-théorie de Quillen

Résumé

Le thème de cette thèse est les différents aspects de la théorie de Borel-Moore dans le monde motivique. Classiquement, sur le corps des nombres complexes, l'homologie de Borel-Moore, aussi appelée "homologie à support compact", possède des propriétés assez différentes comparée avec l'homologie singulière. Dans cette thèse on étudiera quelques généralisations et applications de cette théorie dans les catégories triangulées de motifs.

La thèse est composée de deux parties. Dans la première partie on définit l'homologie motivique de Borel-Moore dans les catégories triangulées de motifs mixtes définies par Cisinski et Déglise et étudie ses diverses propriétés fonctorielles, tout particulièrement une fonctorialité analogue au morphisme de Gysin raffiné défini par Fulton. Ces résultats nous serviront ensuite à identifier le coeur de la structure de poids de Chow définie par Hébert et Bondarko : il se trouve que le coeur, autrement dit la catégorie des éléments de poids zéro, est équivalente à une version relative des motifs purs de Chow sur une base définie par Corti et Hanamura. Dans la deuxième partie on démontre la représentabilité de la G-théorie de Quillen, sous la reformulation de Thomason, dans un premier temps dans la catégorie $\mathbb{A}^1$-homotopique des schémas de Morel-Voevodsky, mais aussi dans la catégorie homotopique stable construite par Jardine. On établit une identification de celle-ci comme la théorie de Borel-Moore associée à la K-théorie algébrique, en utilisant le formalisme des six foncteurs établi par Ayoub et Cisinski-Déglise.

Mots-Clés

Homologie de Borel-Moore, Motifs mixtes, Motifs de Chow, Théorie de l'homotopie motivique, K-théorie et G-théorie de Quillen, Morphisme de Gysin raffiné, Structure de poids, Formalisme des six foncteurs

On some aspects of Borel-Moore homology in motivic homotopy : weight and Quillen's G-theory

Abstract

The theme of this thesis is different aspects of Borel-Moore theory in the world of motives. Classically, over the field of complex numbers, Borel-Moore homology, also called "homology with compact support", has some properties quite different from singular homology. In this thesis we study some generalizations and applications of this theory in triangulated categories of motives.

The thesis is composed of two parts. In the first part we define Borel-Moore motivic homology in the triangulated categories of mixed motives defined by Cisinski and Déglise and study its various functorial properties, especially a functoriality similar to the refined Gysin morphism defined by Fulton. These results are then used to identify the heart of the Chow weight structure defined by Hébert and Bondarko : it turns out that the heart, namely the category of elements of weight zero, is equivalent to a relative version of pure Chow motives over a base defined by Corti and Hanamura. In the second part we show the representability of Quillen's G-theory, reformulated by Thomason, firstly in the $\mathbb{A}^1$-homotopy category of schemes of Morel-Voevodsky, but also in the stable homotopy category constructed by Jardine. We establish an identification of G-theory as the Borel-Moore theory associated to algebraic K-theory, by using the six functors formalism settled by Ayoub and Cisinski-Déglise.

Keywords

Borel-Moore homology, Mixed motives, Chow motives, Motivic homotopy theory, Quillen's K-theory and G-theory, Refined Gysin morphism, Weight structure, Six functors formalism

Table des matières

1 Introduction

1.1 L'homologie de Borel-Moore classique

En topologie, l'*homologie de Borel-Moore*, aussi appelée l'*homologie à support compact*, est une théorie homologique pour les espaces topologiques localement compacts introduite par Borel et Moore en 1960 dans [Borel-Moore]. Cette théorie homologique peut être définie de plusieurs manières, toutes équivalentes pour les espaces utilisés en pratique tels que les variétés topologiques et les CW-complexes : par exemple elle peut être définie comme l'hypercohomologie du complexe dualisant : pour tout espace localement compact X, on définit

$$H_i^{BM}(X) := \mathbb{H}^{-i}(X, D_X),$$

où D_X est le complexe dualisant provenant de la dualité de Grothendieck-Verdier. L'homologie de Borel-Moore, vis-à-vis de l'homologie singulière, a ses avantages et inconvénients. Voici quelques propriétés intéressantes :

- l'homologie de Borel-Moore est covariante par rapport aux applications propres, i.e. pour tout indice i, toute application propre $f : X \to Y$ entre espaces localement compacts induit un homomorphisme $f_* : H_i^{BM}(X) \to H_i^{BM}(Y)$;
- l'homologie de Borel-Moore est contravariante par rapport aux inclusions des ouverts, i.e. pour tout indice i, toute inclusion $j : U \to X$ d'un ouvert induit un homomorphisme $j^* : H_i^{BM}(X) \to H_i^{BM}(U)$;
- l'homologie de Borel-Moore possède une suite exacte de localisation : pour tout espace localement compact X et toute inclusion d'un fermé $i : Z \to X$ avec $j : U \to X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire, on a une suite exacte longue de la forme

$$\cdots \to H_i^{BM}(Z) \xrightarrow{i_*} H_i^{BM}(X) \xrightarrow{j^*} H_i^{BM}(U) \to \cdots$$

- l'homologie de Borel-Moore est invariante par homotopie dans le sens suivant : pour tout espace localement compact X et tout indice i, il existe un isomorphisme $H_i^{BM}(X) \simeq H_{i+1}^{BM}(X \times \mathbb{R})$.

En géométrie algébrique, comme analogue de l'homologie (ou la cohomologie) singulière dite de Betti, on connaît le succès de la construction de plusieurs théories cohomologiques, notamment celle de la cohomologie étale l-adique par Grothendieck et ses collaborateurs dans [SGA4], qui aboutit à un progrès important vers la preuve des conjectures de Weil. Il est alors naturel de se poser la question de l'existence des théories de cohomologie ayant des propriétés similaires à celles de l'homologie de Borel-Moore. Comme on travaille maintenant avec les variétés algébriques, le langage a alors changé : par exemple la bonne notion de compacité en géométrie algébrique est celle de variété propre, et l'espace $\mathbb{R}$ est souvent remplacé par la droite affine $\mathbb{A}^1$. Ou bien via la notion d'une compactification, ou bien via celle d'un objet dualisant, dans tous les cas, il se trouve que la définition d'une homologie de Borel-Moore dans le cadre de la géométrie algébrique est naturellement liée au *formalisme des six foncteurs*, initialement conçu par Grothendieck.

1.2 Le formalisme des six foncteurs

Le formalisme des six foncteurs est un formalisme abstrait en algèbre homologique qui est axiomatisé à partir des propriétés de la catégorie dérivée des faisceaux l-adiques de torsion construite dans [SGA4]. Chronologiquement, dans les travaux plus anciens de Grothendieck sur la cohomologie cohérente ([Hartshorne]), on peut déjà extraire des axiomes similaires, mais la formulation reste assez différente ([Conrad]). A l'heure actuelle, par les travaux de Voevodsky (non publié), Ayoub ([Ayoub]) et Cisinski-Déglise ([Cisinski-Déglise1]), on sait que le formalisme est aussi valable dans les catégories triangulées dites motiviques, comme on le verra plus loin. Ce formalisme englobe divers aspects arithmético-géométrique des théories faisceautiques sur les variétés algébriques : les formules de projections, le recollement le long d'un découpage d'un schéma en un fermé et un ouvert, mais le point crucial est l'axiomatisation d'une théorie de la dualité, récapitulant les théorèmes établis par Poincaré, Serre, Verdier... Comme on le verra en bas, les théorèmes de dualité, qui s'expriment par l'existence des objets dualisants, utilisent de manière essentielle la construction des foncteurs image directe et image réciproque exceptionnels, ainsi que la structure monoïdale sur les catégories sous-jacentes.

Selon les contextes, la formulation exacte du formalisme prend des formes différentes ; on donne ici une version élémentaire du formalisme :

Définition 1.2.1. *Un* formalisme des six foncteurs *est la donnée*

- *Pour tout schéma X, d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}(X)$;*
- *Pour tout morphisme de schémas $f : X \to Y$, d'un couple de foncteurs adjoints*

$$f^* : \mathcal{T}(Y) \rightleftharpoons \mathcal{T}(X) : f_*;$$

- *Pour tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ séparé de type fini, d'un couple de foncteurs adjoints*

$$f_! : \mathcal{T}(X) \rightleftharpoons \mathcal{T}(Y) : f^!;$$

- *Pour tout schéma X, d'un couple de foncteurs adjoints $(\otimes, \mathcal{H}om)$ qui induit une structure monoïdale symétrique unitaire fermée sur $\mathcal{T}(X)$,*

qui vérifie les axiomes suivants :

1. *L'association $f \mapsto f_*$ (respectivement $f \mapsto f^*$, $f \mapsto f_!$, $f \mapsto f^!$) possède une structure de 2-foncteurs. Autrement dit, il existe des isomorphimes naturels $(f \circ g)_* \simeq f_* \circ g_*$ qui sont compatibles entre eux (idem pour f^*, $f_!$, $f^!$).*
2. *Le foncteur f^* est monoïdal : pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a une identification $f^*\mathbb{1}_Y = \mathbb{1}_X$, où pour tout schéma S, $\mathbb{1}_S$ est l'objet unité pour la structure monoïdale sur $\mathcal{T}(S)$. De plus f^* commute avec $\otimes$: il existe un isomorphisme $f^*(K \otimes L) \simeq f^*K \otimes f^*L$.*

3. *Il existe une transformation naturelle de foncteurs $f_! \to f_*$, qui est un isomorphisme lorsque f est propre.*
4. *(pureté relative) Pour tout morphisme lisse $f : X \to Y$ de dimension relative n, il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $f^! \simeq 1(n)[2n] \otimes f^*$, qui est compatible à la composition de morphismes lisses.* [1]
5. *(changement de base) Pour tout carré cartésien de schémas*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

tel que f est séparé de type fini, il existe des isomorphismes naturels

$$p^* f_! \simeq g_! q^*$$

$$q_* g^! \simeq f^! p_*.$$

6. *(formule de projection) Pour tout morphisme de schémas $f : X \to Y$ séparé de type fini, et tout $a, c \in \mathcal{T}(X)$ et $b \in \mathcal{T}(Y)$, il existe des isomorphismes naturels*

$$(f_! a) \otimes b \simeq f_!(a \otimes f^* b);$$

$$Hom(f_! a, b) \simeq f_* Hom(a, f^! b);$$

$$f^! Hom(a, c) \simeq Hom(f^* a, f^! c).$$

7. *(localisation) Pour toute immersion fermée i avec immersion ouverte complémentaire j, il existe un triangle distingué de transformations naturelles*

$$j_! j^! \to 1 \to i_* i^* \to j_! j^! [1].$$

8. *(pureté absolue) Pour toute immersion fermée $i : Z \to X$ de codimension c entre schémas réguliers, il exite un isomorphisme naturel $\mathbb{1}_Z(-c)[-2c] \simeq i^! \mathbb{1}_X$.*
9. *(dualité) Pour tout morphisme séparé de type fini f, le foncteur $f^!$ préserve les objets dualisants ; pour tout schéma régulier X, $\mathbb{1}_X$ est un objet dualisant de $\mathcal{T}(X)$.* [2]

Comme on a mentionné plus haut dans la Section 1.1, il est possible de définir l'homologie de Borel-Moore via les objets dualisants ; sous le formalisme des six foncteurs, on peut construire des objets dualisants comme suit : pour tout schéma X qui est séparé de type fini sur un schéma régulier S, avec $f : X \to S$ le morphisme structural, l'objet $f^! \mathbb{1}_S$ est un objet dualisant d'après

1. L'élément $1(n)$ est un *twist de Tate*, qu'on expliquera plus tard. La formulation ici, ainsi que l'axiome de pureté absolue en bas, nécessite l'existence d'une *orientation* sur $\mathcal{T}$, question qu'on ne traitera pas dans cette thèse. Voir [Déglise5].

2. On dit qu'un objet K dans une catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{T}$ est *dualisant* si pour tout objet $M \in \mathcal{T}$, l'application canonique $M \to Hom(Hom(M, K), K)$ est un isomorphisme.

l'axiome de dualité. Par analogie avec le cas topologique, on peut alors donner la définition suivante :

$$H_i^{BM}(X/S) := Hom(\mathbb{1}_X[i], f^!\mathbb{1}_S).$$

Dans le cadre de la catégorie dérivée des faisceaux l-adiques de torsion, on peut montrer que l'homologie ainsi définie vérifie effectivement les propriétés désirées, même avec une meilleure fonctorialité ; dans le cadre motivique, l'homologie que l'on définit est de nature plus géométrique, et on peut demander plus de fonctorialités ; il faut travailler un peu plus pour les obtenir.

1.3 Groupes de Chow et théorie de l'intersection

Avant de parler des motifs, il est indispensable de connaître la définition des groupes de Chow, qui est une notion centrale dans la théorie de motifs : ces groupes peuvent être considérés comme une théorie cohomologique, mais encodent plus d'informations algébro-géométriques, comme on le voit dans la

Définition 1.3.1. *Soient k un corps et X un schéma séparé de type fini sur k. Pour tout indice i, on note $Z_i(X) = \oplus_V \mathbb{Z}[V]$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de X de dimension i, dont les éléments sont appelés* cycles algébriques de dimension i *sur* X. *Pour tout sous-schéma fermé intègre W de dimension $i+1$ de X, et toute fonction rationnelle inversible f sur W, on définit un élément $div(f)$ [3] dans $Z_i(X)$ comme*

$$div(f) = \sum_V ord_V(f)[V]$$

*où $ord_V(f)$ est un entier appelé "ordre de zéro" de f le long de V ([Fulton, 1.2.]). Le **groupe de Chow des cycles de dimension** i **sur** X, noté $CH_i(X)$, est défini comme le quotient de $Z_i(X)$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $div(f)$, où f parcourt l'ensemble des fonctions rationnelles inversibles sur les sous-schémas fermés intègres de dimension $i+1$ de X. On définit $CH^i(X)$, le groupe de Chow des cycles de codimension i sur X, par*

$$CH^i(X) = CH_{dimX-i}(X).^4$$

Ces groupes sont des objets importants et très étudiés en géométrie algébrique, mais souvent assez difficiles à comprendre. Voici quelques propriétés élémentaires des groupes de Chow :

Proposition 1.3.2. *Les groupes de Chow vérifient les propriétés suivantes :*
- *(covariance propre) Tout morphisme propre $f : X \to Y$ induit une application $f_* : CH_k(X) \to CH_k(Y)$.*
- *(contravariance plate) Tout morphisme plat $f : X \to Y$ de dimension relative n induit une application $f^* : CH_k(Y) \to CH_{n+k}(X)$.*

3. L'élément $div(f)$ est appelé le *diviseur* de f, qui généralise la notion de diviseur d'une fonction méromorphe sur une surface de Riemann.

4. Ici il faut voir $dimX$ comme une fonction localement constante sur l'espace topologique sous-jacent de X : la bonne définition est $CH_{dimX-i}(X) = \oplus_{X_\alpha} CH_{dimX_\alpha - i}(X_\alpha)$, où les X_α sont les composantes connexes de X.

– *(localisation courte) Pour toute immersion fermée $i : Z \to X$ avec $j : U \to X$ immersion ouverte complémentaire, il existe une suite exacte*

$$CH_k(Z) \xrightarrow{i_*} CH_k(X) \xrightarrow{j^*} CH_k(U) \to 0.$$

– *(invariance par homotopie) Pour tout schéma X séparé de type fini et tout fibré vectoriel $p : E \to X$ de rang n, l'application induite par la projection canonique*

$$CH_k(X) \xrightarrow{p^*} CH_{k+n}(E)$$

est un isomorphisme.

On constate d'après ces propriétés que les groupes de Chow pourraient former une théorie de Borel-Moore, à condition que l'on sache prolonger la suite exacte de localisation en une suite exacte longue comme il faut. C'est avec cette idée que Bloch a défini les *groupes de Chow supérieurs* en 1986 ([Bloch]), qui donnent bien une suite exacte longue. On établira plus tard un lien plus précis entre les groupes de Chow avec l'homologie de Borel-Moore, grâce au formalisme des six functeurs sur les motifs mixtes.

Un autre aspect important sur les groupes de Chow est la théorie de l'intersection. Historiquement, l'une des questions majeures en géométrie algébrique était d'établir une bonne théorie d'intersection sur les cycles algébriques. Un résultat important pour les variétés quasi-projectives lisses est établi par Chow en 1956 ([Chow]), en utilisant son lemme de déplacement (moving lemma) ; la théorie de l'intersection a fait l'objet de beaucoup de travaux importants depuis, tels que les multiplicités d'intersection de Serre et leurs applications aux théorèmes de Riemann-Roch par Grothendieck dans [SGA6]. L'approche de Fulton ([Fulton]) a l'avantage d'être très géométrique, avec sa "construction de base" (basic construction), c'est ce qu'on va présenter ici. L'idée est de d'abord travailler sur le cas de codimension 1, autrement dit définir l'intersection avec un diviseur. Une fois ce cas résolu, on peut généraliser la définition à l'intersection au-dessus d'une *immersion régulière* ([Fulton, B.7.1.]), autrement dit une immersion fermée localement définie par une suite d'équations qui peuvent s'arranger dans un ordre raisonnable, en utilisant la méthode de la *déformation au cône normal* ([Fulton, Chapter 5]). Le point clé est de définir le morphisme de sprécialisation au cône normal : rappelons que pour toute immersion fermée $i : Z \to X$, le *cône normal* de Z dans X est un cône $C_Z X$ sur Z, qui est un fibré vectoriel de rang c sur Z si l'immersion fermée i est régulière de codimension c ([Fulton, B.7.1.]). Fulton démontre la

Proposition 1.3.3 (Spécialisation au cône normal)**.** *Il existe une application $sp(C_Z X/Z) : CH_k(X) \to CH_k(C_Z X)$, appelée* spécialisation*, telle que pour tout sous-schéma fermé W de X de dimension k, $sp(C_Z X/Z)$ envoie la classe de W sur la classe de $C_{W\cap Z}W$.*

La spécialisation au cône normal entraîne la définition suivante, qui donne un sens à l'intersection avec un fermé régulièrement immergé, en construisant une fonctorialité contravariante sur les groupes de Chow pour les morphismes fibrés sur une immersion fermée régulière :

Définition 1.3.4 (Morphisme de Gysin raffiné)**.** *Soient $i : Z \to X$ une immersion fermée régulière de codimension c et $f : X' \to X$ un morphisme. Considérons le carré Cartésien*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X. \end{tikzcd}$$

Dans ce cas on sait que le produit fibré $N = (C_Z X) \times_Z Z'$ est un fibré vectoriel sur Z' de rang c, dont on note $p' : N \to Z'$ la projection canonique, et le cône normal $C' = C_{Z'}X'$ est un sous-cône fermé de N ([Fulton, B.6.1.]). On a alors l'application composée

$$R_f(i) : CH_k(X') \xrightarrow{sp(C'/Z')} CH_k(C') \to CH_k(N) \xrightarrow{(p'^*)^{-1}} CH_{k-c}(Z')$$

où la première flèche est la spécialisation, la deuxième est induite par l'inclusion de C' dans N, la troisième est l'inverse de l'application induite par p' qui provient de l'invariance par homotopie. Cette application $R_f(i)$ est appelée le ***morphisme de Gysin raffiné*** *associé au carré Δ.* [5]

Comme on le verra dans la section suivante, la théorie de l'intersection permet de généraliser la notion de la composition des morphismes dans le langage des cycles algébriques, en utilisant l'intersection des *correspondances algébriques*, lesquelles peuvent être vues comme des cycles algébriques associés aux graphes des morphismes, et cette composition de correspondances constitue la base de la définition de motifs purs.

1.4 Motifs purs

La théorie de motifs a été inventée par Grothendieck dans les années 1960 dans le but d'établir une théorie cohomologique "universelle" qui est de nature plus géométrique. L'idée naïve des motifs est de décomposer la cohomologie d'une variété en morceaux simples de manière à refléter les propriétés arithmétiques et géométriques de celle-ci. La définition des motifs purs, qui fait usage des relations d'équivalences dites adéquates sur les groupes de cycles algébriques, dont les motifs de Chow, les motifs homologiques et les motifs numériques, est apparue quelques années plus tard. On ne donne pas la définition ici de la catégorie des motifs de Chow sur un corps k, $CHM(k)$, et renvoie le lecteur à [Jin1, 3.3.] pour une présentation sur les motifs de Chow sur un corps ; dans ce qui suit on donne une version plus générale.

Comme Grothendieck l'a suggéré, au lieu d'étudier une variété de manière isolée, on peut aussi regarder une famille de variétés paramétrée algébriquement, autrement dit les schémas fibrés sur une base. On s'intéresse donc à définir des motifs relatifs à un schéma de base, qui jouent un rôle important dans cette thèse. Dans le cas pur, la première définition de motifs de Chow sur une base est due à Deninger et Murre ([Deninger-Murre]), où ils travaillent sur les schéma qui sont lisses et projectifs sur une base lisse S ; Corti et Hanamura ([Corti-Hanamura]) ont trouvé une définition plus générale en utilisant le morphisme de Gysin raffiné de Fulton défini dans la section précédente, comme suit :

5. La notation originale de Fulton pour $R_f(i)$ est $i^!$, qui produirait énormément de confusions dans notre situation.

Définition 1.4.1 (Motifs de Corti-Hanamura)**.** *Soient k un corps et S un k-schéma quasi-projectif. Considérons la catégorie $CHM^0(S)$ définie de la manière suivante : les objets de $CHM^0(S)$ sont de la forme (X, r), où X est un S-schéma projectif qui est lisse sur k et $r \in \mathbb{Z}$, avec des morphismes*

$$Hom_{CHM^0(S)}((X, r), (Y, s)) = CH_{dimY+r-s}(X \times_S Y).$$

La loi de composition des morphismes est donnée par

$$\begin{aligned} CH_{dimY+r-s}(X \times_S Y) \times CH_{dimZ+s-t}(Y \times_S Z) &\to CH_{dimZ+r-t}(X \times_S Z) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto p_{XZ*}R_f(\delta_Y)(\alpha \times \beta), \end{aligned}$$

où

–

$$\times : CH_{dimY+r-s}(X \times_S Y) \times CH_{dimZ+s-t}(Y \times_S Z) \to CH_{dimY+dimZ+r-t}((X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z))$$

est le produit extérieur des cycles ([Fulton, 1.10.]),

–

$$R_f(\delta_Y) : CH_{dimY+dimZ+r-t}((X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z)) \to CH_{dimZ+r-t}(X \times_S Y \times_S Z)$$

est le morphisme de Gysin raffiné associé au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z) \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \times_k Y. \end{tikzcd}$$

où $\delta_Y : Y \to Y \times_k Y$ est le morphisme diagonal de Y, qui est une immersion fermée régulière car Y est lisse sur k ([Fulton, B.7.3.]),

– *$p_{XZ*} : CH_{dimZ+r-t}(X \times_S Y \times_S Z) \to CH_{dimZ+r-t}(X \times_S Z)$ est la fonctorialité covariante du morphisme propre $p_{XZ} : X \times_S Y \times_S Z \to X \times_S Z$.*

On définit $CHM(S)$, la catégorie des ***motifs de Corti-Hanamura*** *sur S, comme l'enveloppe pseudo-abélienne de $CHM^0(S)$.* [6]

Un élément de $CHM(S)$ est donc de la forme (X, p, r) où $(X, r) \in CHM^0(S)$ et $p \in CH_{dimX}(X \times_S X)$ tel que $p \circ p = p$. La catégorie $CHM(S)$ possède une structure additive induite par la réunion disjointe des S-schémas ; l'élément $(S, [S], 1)$ est appelé le *motif de Tate* sur S, qui joue le rôle des twists dans les théories cohomologiques telles que la cohomologie étale.

6. Pour toute catégorie additive $\mathcal{C}$, l'*enveloppe pseudo-abélienne* de $\mathcal{C}$, $Split(\mathcal{C})$, est la catégorie dont les objets sont de la forme (X, p), où $X \in \mathcal{C}$ et $p \in End_{\mathcal{C}}(X)$ tel que $p \circ p = p$, avec $Hom_{Split(\mathcal{C})}((X, p), (Y, q)) = q \circ Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \circ p$. Voir [Jin1, 3.2.].

1.5 La théorie homotopique des schémas

La généralisation de la théorie de motifs purs aux variétés algébriques non nécessairement projectives ni lisses a été commencée par Deligne lors de son étude sur la théorie de poids et les 1-motifs, où un phénomène de "mixité" intervient sur la cohomologie comme en théorie de Hodge. La théorie est devenue plus concrète grâce à l'idée de cohomologie motivique, conjecturée par Beilinson et Lichtenbaum pour traiter les cohomologie de Weil mixtes, qui sont des théories cohomologiques bigraduées avec une notion de twist de Tate ; la première définition de cohomologie motivique est donnée par Bloch ([Bloch]) en introduisant les groupes de Chow supérieurs. La théorie a enfin progressé énormément vers la fin du XXème siècle, où plusieurs auteurs, dont Hanamura, Levine et Voevodsky, sont parvenus à construire des catégories triangulées dans lesquelles on peut calculer la cohomologie motivique, qui coïncide avec celle de Bloch pour les schémas lisses. Parmi ces constructions, celle de Voevodsky ([Voevodsky1]) a eu le plus de succès et a conduit à la preuve de la conjecture de Bloch-Kato.

Un outil crucial dans la construction des motifs de Voevodsky est la technique de $\mathbb{A}^1$-*localisation* : Morel et Voevodsky ont introduit la théorie $\mathbb{A}^1$-homotopique des schémas ([Morel-Voevodsky]), dans une tentative d'appliquer des techniques de la topologie algébrique en géométrie algébrique. L'idée derrière est de construire une théorie d'homotopie pour les variétés algébriques en remplaçant l'intervalle $[0, 1]$ en topologie, qui n'est pas défini algébriquement, par la droite affine $\mathbb{A}^1$. Comme la théorie d'homotopie en topologie, on cherche d'abord une catégorie dans laquelle on travaille, dont les objets sont appelés *espaces*, par exemple celle des CW-complexes ; on définit ensuite une classe de morphismes entre les espaces qu'on appelle *équivalences faibles* ; on localise la catégorie d'espaces par rapport aux équivalences faibles pour obtenir la catégorie homotopique, autrement dit une catégorie dans laquelle les équivalences faibles deviennent des isomorphismes. Etant donné un schéma de base S, on part de Sm/S, la catégorie les schémas lisses sur S ; mais il n'est pas souhaitable de travailler directement avec la catégorie Sm/S pour plusieurs raisons techniques. Voici la définition d'espaces par Morel et Voevodsky :

Définition 1.5.1. *Soit S un schéma noethérien de dimension finie. Un* ***espace motivique*** *sur S est un faisceau Nisnevich d'ensembles simpliciaux sur la catégorie des S-schémas lisses. De manière équivalente, c'est la donnée d'un foncteur*

$$(Sm/S)^{op} \to sSet$$

qui est un faisceau Nisnevich, où $sSet$ est la catégorie des ensembles simpliciaux. [7]

On note $\mathbf{M}(S)$ la catégorie des espaces motiviques, sur laquelle on doit faire une localisation. Une méthode très souvent utilisée pour localiser une catégorie est celle de *catégorie de modèles* inventée par Quillen ([Quillen2]) : une catégorie de modèles est une catégorie complète

7. Par [Morel-Voevodsky, Proposition 3.1.4.], un préfaisceau d'ensembles F sur Sm/S est un faisceau Nisnevich si et seulement si pour tout carré cartésien

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

et cocomplète qui est munie d'une *structure de modèles*, qui est la donnée de trois classes de morphismes distinguées : *fibrations*, *cofibrations* et *équivalences faibles*, qui vérifient un certain nombre d'axiomes ; Quillen montre l'existence de la localisation d'une catégorie de modèle par rapport aux équivalences faibles sous ces axiomes, et la localisation obtenue est appelée *catégorie homotopique*. [8] Il existe plusieurs structures de modèles sur $\mathbf{M}(S)$, dont la suivante, appelée la **structure de modèles projective** :

Théorème 1.5.2. *Il existe une structure de modèles sur $\mathbf{M}(S)$ dont les équivalences faibles (resp. les fibrations) sont des morphismes de faisceaux simpliciaux $f : F \to G$ tels que pour tout schéma $X \in Sm/S$ et tout point x de X, le morphisme d'ensembles simpliciaux induit $f_x : F_x \to G_x$ est une équivalence faible (resp. fibration de Kan) d'ensembles simpliciaux, et dont les cofibrations sont des morphismes vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations triviales.* [9]

Cette construction nous donne bien une catégorie homotopique, mais celle-ci ne suffit pas car la droite affine $\mathbb{A}^1$ ne joue aucun rôle jusqu'ici. Il faut donc rajouter des informations concernant la droite affine dans l'homotopie, ce qui revient à élargir la classe d'équivalences faibles ; pour ce faire, une technique très souvent utilisée est la *localisation de Bousfield* ([Hirschhorn, Theorem 4.1.1.]), qui nous donne la définition suivante :

Définition 1.5.3. *On définit $\mathbf{H}(S)$, la catégorie $\mathbb{A}^1$-**homotopique (instable) des schémas**, comme la localisation de Bousfield de la catégorie de modèles $\mathbf{M}(S)$ décrite dans le Théorème 1.5.2 par rapport à la classe des morphismes de préfaisceaux simpliciaux donnés par la projection canonique $F \times \mathbb{A}^1 \to F$.* [10]

En topologie, on a parfois besoin de travailler avec des espaces pointés, par exemple pour la définition du groupe fondamental ; il y a aussi des variantes pointées pour les constructions précédentes, et on note $\mathbf{H}_\bullet(S)$ la version pointée de $\mathbf{H}(S)$. Pour tout S-schéma lisse $X \in Sm/S$, on note X_+ l'élément dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ représenté par la réunion disjointe de X avec un point.

Cette catégorie des espaces pointés est utilisée dans l'étape suivante, qui est la construction de la catégorie homotopique stable par le procédé de $\mathbb{P}^1$-*stabilisation*, due à Jardine ([Jardine]).

---

où p est étale, j est une immersion ouverte tels que p induit un isomorphisme sur $X \setminus U$, le carré d'ensembles

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & F(U) \arrow[d] \\ F(Y) \arrow[r] & F(V) \end{tikzcd}$$

est cartésien. Cette notion se généralise aux ensembles simpliciaux.

8. La catégorie homotopique obtenue ne dépend que de la classe des équivalences faibles, elle ne dépend pas des fibrations et cofibrations. Cependant ces dernières peuvent donner des informations sur la catégorie homotopique.

9. Les axiomes de structure de modèles impliquent que la donnée de deux classes parmi les trois classes distinguées détermine la troisième, donc en effet il suffit de préciser les fibrations et les équivalences faibles pour déterminer la structure de modèles.

10. Dans [Morel-Voevodsky] il y a une construction concrète de la catégorie homotopique par rapport à un intervalle, et on obtient le même résultat en prenant comme intervalle la droite affine munie de deux points 0 et 1.

Dans le cas topologique, la théorie de l'homotopie stable étudie le comportement des structures dans la théorie de l'homotopie lorsqu'on applique successivement le foncteur de suspension $X \mapsto S^1 \wedge X$. En géométrie algébrique, on peut aussi définir le *cercle simplicial* sur une base S comme

$$S^1_S = |\Delta^1/\partial\Delta^1|_S$$

donné par le préfaisceau simplicial quotient, qu'on peut voir géométriquement comme la droite affine $\mathbb{A}^1$ dans laquelle on identifie les deux points 0 et 1 ; mais dans le cas algébrique il y a aussi un autre cercle appelé *cercle de Tate*, qui est le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ pointé par 1. [11] Le théorème suivant relie ces deux cercles dans la catégorie instable avec la droite projective $\mathbb{P}^1$ pointée par le point ∞ :

Théorème 1.5.4. *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$ de la forme*

$$S^1_S \wedge \mathbb{G}_{m,S} \simeq \mathbb{P}^1_S.$$

Par comparaison avec les spectres en théorie homotopique stable topologique, le Théorème 1.5.4 nous amène à étudier les $\mathbb{P}^1$-spectres dans le sens suivant :

Définition 1.5.5. *Un $\mathbb{P}^1$-**spectre** ou **spectre motivique** E sur S est la donnée d'une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces motiviques pointés sur S et de morphismes de suspension $\sigma_n : \mathbb{P}^1_S \wedge E_n \to E_{n+1}$; un morphisme de $\mathbb{P}^1$-spectres est la donnée de morphismes d'espaces motiviques pointés sur chaque degré qui sont compatibles avec les morphismes de suspension.*

*On dit qu'un $\mathbb{P}^1$-spectre E est un **Ω-spectre** si les applications adjointes induites $E_n \to Hom(\mathbb{P}^1, E_{n+1})$ sont des isomorphismes.*

On note $\mathbf{Spt}_{\mathbb{P}^1}(S)$ la catégorie des $\mathbb{P}^1$-spectres. Il y a un foncteur canonique qui à tout espace motivique pointé associe le $\mathbb{P}^1$-spectre donné par la suspension infinie :

$$\begin{aligned} \Sigma^\infty : \mathbf{M}_\bullet(S) &\to \mathbf{Spt}_{\mathbb{P}^1}(S) \\ F &\mapsto ((\mathbb{P}^1)^{\wedge n} \wedge F)_n, \end{aligned}$$

où les morphismes de suspension sont des identités.

Théorème 1.5.6. *Il existe une structure de modèles sur $\mathbf{Spt}_{\mathbb{P}^1}$, appelée* structure de modèles par niveaux*, dont les équivalences faibles (resp. fibrations, cofibrations) sont les morphismes de $\mathbb{P}^1$-spectres dont les morphismes d'espaces motiviques pointés sur chaque degré sont des équivalences faibles (resp. fibrations, cofibrations) dans $\mathbf{H}_\bullet(S)$.*

On note τ_n l'endomorphisme de troncation $\mathbf{Spt}_{\mathbb{P}^1}$ qui à un $\mathbb{P}^1$-spectre E associe le spectre tronqué

$$(\tau_n E)_i = \begin{cases} * & \text{si } i < n \\ E_{i-n} & \text{si } i \geqslant n. \end{cases}$$

Comme dans le cas instable, on applique la localisation de Bousfield pour l'étape de la $\mathbb{P}^1$-stabilisation, sous la forme suivante :

11. Le cercle de Tate fait apparaître le twist de Tate dans la catégorie triangulée : par exemple dans DM_{gm} on a $M(\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1]$.

Définition 1.5.7. *On définit* $\mathbf{SH}(S)$*, la* ***catégorie homotopique stable des schémas****, comme la localisation de Bousfield de la catégorie de modèles* $\mathbf{Spt}_{\mathbb{P}^1}(S)$ *avec la structure de modèles par niveaux, par rapport à la classe de morphismes de* $\mathbb{P}^1$*-spectres canoniques de la forme* $\tau_{n+1}\Sigma^\infty(\mathbb{P}^1 \wedge X_+) \to \tau_n\Sigma^\infty X_+$*, où* X *est un* S*-schéma lisse.*

La catégorie $\mathbf{SH}(S)$ est triangulée, dont le foncteur de décalage est donné par le foncteur de la S^1-suspension : $(E[1])_n = S^1_S \wedge E_n$; son inverse est donné par le foncteur du $\mathbb{P}^1$-espace des lacets : $(E[-1])_n = Hom(S^1_S, E_n)$. Elle vérifie aussi le formalisme des six foncteurs, par les travaux d'Ayoub.

Dans $\mathbf{SH}$ on peut étudier les questions de représentabilité : à tout objet $\mathbf{E}$ de $\mathbf{SH}$ on peut associer une théorie cohomologique bigraduée sur $\mathbf{M}_\bullet(S)$ par

$$E^{p,q}(X,x) = Hom_{\mathbf{SH}}(\Sigma^\infty(X,x), (S^1)^{\wedge p-q} \wedge \mathbb{G}_m^q \wedge \mathbf{E}).$$

Un exemple remarquable est la cohomologie motivique définie par Voevodsky, qui est représentée dans $\mathbf{SH}$ par le *spectre d'Eilenberg-Mac Lane motivique* ([Voevodsky3, 6.1.]) ; un autre exemple est la K-théorie algébrique rendue invariante par homotopie, représentée par le spectre $\mathbf{KGL}$.

1.6 Motifs mixtes et structure de poids

Revenons sur la construction de Voevodsky de la catégorie des motifs mixtes sur un corps, dont les objets sont appelés les *complexes motiviques*. Rappelons que l'objectif est d'établir une généralisation des motifs purs, dans laquelle les motifs de Chow s'insèrent en particulier ; autrement dit, il s'agit d'établir un lien étroit avec les cycles algébriques, lesquels perdent de la fonctorialité lorsqu'on travaille avec des variétés non nécessairement lisses ou projectives. L'idée nouvelle introduite par Suslin et Voevodsky consiste non seulement à appliquer la technique de $\mathbb{A}^1$-localisation, mais aussi à travailler avec une classe particulière de cycles algébriques, qui possède des bonnes propriétés :

Définition 1.6.1. *Soient* k *un corps et* X*,* Y *deux schémas lisses sur* k*. Une* ***correspondance finie*** *de* X *vers* Y *est une* $\mathbb{Z}$*-combinaison linéaire finie de sous-schémas fermés intègres de* $X \times Y$ *qui sont finis sur* X *et dominent une composante connexe de* X*.*

L'idée provient de la notion de *morphismes multivaluées* ou bien *transfers* en topologie. Un des avantages avec les correspondances finies est d'avoir une composition des cycles algébriques bien définie sans passer par une équivalence adéquate, tout en gardant les propriétés fonctorielles remarquables. A partir de cette définition, Voevodsky construit la catégorie des *motifs géométriques* sur k, $DM_{gm}(k)$, de la manière suivante : on regarde la catégorie $SmCor(k)$ dont les objets sont les schémas lisses sur k et dont les morphismes sont les correspondances finies, avec $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$ la catégorie des complexes bornés sur $SmCor(k)$ à homotopie des complexes près ; la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ des *motifs géométriques effectifs* est définie comme l'enveloppe pseudo-abélienne de la localisation de $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$ par rapport aux complexes représentant la $\mathbb{A}^1$-homotopie et la propriété de Mayer-Vietoris ; on obtient $DM_{gm}(k)$ en inversant le motif de Tate par rapport à la structure monoïdale canonique sur $DM_{gm}^{eff}(k)$. On renvoie à [Jin1, 4.5.]

pour plus de détails. Cette construction relativement élémentaire donne une catégorie triangulée de motifs mixtes qui possède beaucoup de propriétés convenables pour travailler. Notons que c'est une version de la théorie pour la topologie Nisnevich, et la *cohomologie motivique* dans la catégorie est directement liée aux groupes de Chow et les groupes de Chow supérieurs de Bloch à coefficients entiers. En particulier, sur un corps, la catégorie de motifs de Chow se plonge de manière pleinement fidèle dans DM_{gm} :

Théorème 1.6.2. *Il existe un foncteur pleinement fidèle $CHM(k) \to DM_{gm}(k)$.*

Après la construction de Voevodsky, il est question d'établir le formalisme des six foncteurs sur les catégories triangulées de motifs mixtes, et aussi de généraliser la construction sur un schéma de base quelconque. La première question est traitée par Ayoub dans sa thèse ([Ayoub]) en étudiant le formalisme des foncteurs croisés introduit par Deligne et Voevodsky, et développée plus loin par les travaux de Cisinski-Déglise ([Cisinski-Déglise1]), avec la notion de catégories motiviques fibrées sur la catégorie des schémas ; dans ibid. on répond aussi à la deuxième question à coefficients rationnels, en construisant pour tout schéma S, la catégorie des *motifs de Beilinson* $DM_{\mathrm{B}}(S)$. En particulier, sur un corps parfait, cette catégorie coïncide avec la $\mathbb{Q}$-linéarisation de celle de Voevodsky. Dans le cas relatif, la situation est plus compliquée, non seulement étant liée au problème d'existence d'une résolution de singularités suffisamment puissante, mais aussi parce que la manipulation géométrique des correspondances finies à la Voevodsky devient plus délicate. [12]

Plus récemment, en égale caractéristique, Cisinski et Déglise ont établi une variante DM_{cdh} à coefficients entiers en inversant l'exposant caractéristique, appelée *motifs cdh* ([Cisinski-Déglise2]). On commence par généraliser la notion de correspondance finie sur un schéma de base, initialement définie par Suslin et Voevodsky ([Suslin-Voevodsky2, 4.2.]) [13] :

Définition 1.6.3. *Soient S un schéma d'égale caractéristique, avec exposant caractéristique p, X, Y deux S-schémas séparés de type fini et $\Lambda = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Une S-**correspondance finie** α de X vers Y à coefficients dans Λ est une combinaison Λ-linéaire finie de sous-schémas fermés intègres de $X \times_S Y$ vérifiant les condition suivantes :*

1. *Le support de α est fini équidimensionnel sur X ;*
2. *α est spécial sur X au sens de [Cisinski-Déglise1, Definition 8.1.28.] ;*

Notons que la condition (2) est toujours vérifiée lorsque X est géométriquement unibranche ([Cisinski-Déglise1, Corollary 8.3.26.]). La notion de correspondance finie permet d'introduire la notion de *faisceaux avec transferts*, qui sont des objets faisceautiques sur lesquels on travaille :

Définition 1.6.4. *On note $Sch^{cor}_{\Lambda,S}$ la catégorie dont les objets sont les S-schémas séparés de type fini et dont les morphismes sont donnés par les S-correspondances finies à coefficients dans Λ. La catégorie $\underline{\mathrm{Sh}}^{tr}_{cdh}(S,\Lambda)$ des **faisceaux** cdh **avec transfers généralisés sur** S est définie comme la catégorie abélienne des préfaisceaux additifs de Λ-modules sur $Sch^{cor}_{\Lambda,S}$ qui sont des*

12. Notons que une difficulté majeure au niveau technique consiste à prouver la propriété de localisation, ce qui n'est achevée qu'avec coefficients rationnels.

13. Le traitement ici est un cas particulier d'une définition plus générale, voir [Cisinski-Déglise1, Definition 9.1.2.].

faisceaux pour la topologie cdh lorsqu'on les voit comme des préfaisceaux sur la catégorie des S-schémas. [14]

On procède ensuite comme pour la catégorie homotopique stable : la catégorie $\underline{DM}_{cdh}(S, \Lambda)$ des *spectres cdh motiviques généralisés* sur S est obtenue en appliquant la $\mathbb{A}^1$-localisation et la $\mathbb{P}^1$-stabilisation à la catégorie dérivée de la catégorie abélienne $\underline{\mathrm{Sh}}^{tr}_{cdh}(S, \Lambda)$. Par construction, dans $\underline{DM}_{cdh}(S, \Lambda)$ tout S-schéma X définit un *motif homologique* $\underline{M}_S(X)$, qui possède des twists de Tate $\underline{M}_S(X)(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. On extrait alors la sous-catégorie engendré par les motifs provenant des S-schémas lisses avec des twists :

Définition 1.6.5. *On définit la catégorie $DM_{cdh}(S, \Lambda)$ (respectivement $DM_{cdh,c}(S, \Lambda)$) des **motifs** cdh (respectivement **motifs** cdh **constructibles**) comme la sous-catégorie pleine localisatrice (respectivement la sous-catégorie épaisse) de $\underline{DM}_{cdh}(S, \Lambda)$ engendré par les éléments de la forme $\underline{M}_S(X)(n)$, où X est un S-schéma lisse et $n \in \mathbb{Z}$.*

La différence entre ces deux versions est que la catégorie des motifs constructibles n'admet que des sommes directes finies, et coïncide avec la sous-catégorie des objets compacts de $DM_{cdh}(S, \Lambda)$. [15] Il se trouve que cette variante qui utilise la topologie cdh permet d'établir un formalisme des six foncteurs à coefficients dans $\Lambda = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$:

Théorème 1.6.6. *La catégorie $DM_{cdh}(S, \Lambda)$ (respectivement $DM_{cdh,c}(S, \Lambda)$) vérifie le formalisme des six foncteurs. Sa $\mathbb{Q}$-linéarisation coïncide avec la catégorie des motifs de Beilinson (respectivement la catégorie des motifs de Beilinson constructibles).*

Les catégories triangulées de motives fournissent un cadre naturel pour travailler avec la notion de *structure de poids* introduite par Bondarko ([Bondarko1]) (aussi par Pauksztello indépendemment, sous le nom de *co-t-structure*). La définition est la suivante :

Définition 1.6.7. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée. Une **structure de poids** sur $\mathcal{T}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines additives $\mathcal{T}^{w\leqslant 0}$ et $\mathcal{T}^{w\geqslant 0}$ de $\mathcal{T}$, telles que*

1. *$\mathcal{T}^{w\leqslant 0}$ et $\mathcal{T}^{w\geqslant 0}$ sont stables par facteurs directs dans $\mathcal{T}$;*
2. *$\mathcal{T}^{w\leqslant 0} \subset \mathcal{T}^{w\leqslant 0}[1]$ et $\mathcal{T}^{w\geqslant 0}[1] \subset \mathcal{T}^{w\geqslant 0}$;*
3. *$Hom(\mathcal{T}^{w\leqslant 0}, \mathcal{T}^{w\geqslant 0}[1]) = 0$;*
4. *(Décomposition par le poids) Pour tout objet X de $\mathcal{T}$, il existe un triangle distingué de la forme*
$$A \to X \to B \stackrel{+1}{\to} A[1]$$
avec $A \in \mathcal{T}^{w\leqslant 0}$ et $B \in \mathcal{T}^{w\geqslant 0}[1]$.

*Le **coeur** d'une structure de poids est défini comme l'intersection $\mathcal{T}^{w=0} = \mathcal{T}^{w\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{w\geqslant 0}$.*

14. Rappelons que la topologie cdh est la plus petite topologie de Grothendieck engendrée par la topologie de Nisnevich et les recouvrements propres cdh, où un morphisme propre $f : X \to Y$ est un recouvrement propre cdh s'il existe un fermé strict Z de X tel que f induit un isomorphisme $f^{-1}(X \setminus Z) \simeq X \setminus Z$.

15. Rappelons qu'un objet M est compact si le foncteur $Hom(M, \cdot)$ commute aux sommes directes quelconques.

La définition ressemble beaucoup à celle d'une t-structure ([BBD]) : la seule différence est que le foncteur de troncation $[1]$ joue le rôle de la troncation inverse $[-1]$ dans une t-structure. Cette différence est l'origine des comportements différents entre les deux structures : la décomposition par le poids d'un objet est loin d'être unique, contrairement au cas d'une t-décomposition. Bondarko établit un certain nombre de propriétés sur les structures de poids, par exemple le coeur encode des informations importantes sur la structure de poids : sous des hypothèses raisonnables, la connaissance du coeur permet de retrouver entièrement la structure de poids ([Hébert, Théorème 1.9.]). Il les utilise ensuite pour construire un analogue de la suite spectrale de poids dans le cadre motivique.

En ce qui concerne l'existence, on sait qu'il existe des structures de poids intéressantes sur les catégorie triangulées de motifs. [16] Sur un corps le théorème est établi par Bondarko ([Bondarko1]) :

Théorème 1.6.8. *Il existe une unique structure de poids sur $DM_{gm}(k)$ dont le coeur s'identifie à l'image essentielle du foncteur dans Théorème 1.6.2.*

Dans le cas relatif, l'existence d'une structure de poids sur les motifs de Beilinson est démontrée par Hébert ([Hébert]) et indépendemment Bondarko ([Bondarko2]) ; plus récemment un résultat analogue est établi sur les motifs cdh par Bondarko et Ivanov ([Bondarko-Ivanov]). Ces structure de poids sont appelées **structure de poids de Chow**.

1.7 La K-théorie et la G-théorie algébrique

La K-théorie algébrique étudie une autre famille d'invariants des variétés algébriques, les K-*groupes*, via une linéarisation des relations abstraites entre les fibrés vectoriels. Le premier groupe K_0 est défini pour la première fois par Grothendieck dans [SGA6] lorsqu'il travaillait sur la théorie de l'intersection. Grothendieck donne la définition du groupe K_0, ainsi que celle d'un groupe similaire G_0, comme suit :

Définition 1.7.1. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Le* ***groupe de Grothendieck*** *de $\mathcal{A}$, $K_0(\mathcal{A})$, est le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{A}$ par le sous-groupe abélien engendré par les éléments de la forme $[B]-[A]-[C]$ où il existe une suite exacte courte de la forme $0 \to A \to B \to C \to 0$ dans $\mathcal{A}$.*

Soit X un schéma séparé de type fini sur un corps. Le groupe $K_0(X)$ (respectivement $G_0(X)$) est défini comme le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des fibrés vectoriels sur X (respectivement faisceaux cohérents sur X), autrement dit $K_0(X) = K_0(Vec_X)$ (respectivement $G_0(X) = K_0(Coh_X)$).

D'après sa définition, le groupe K_0 est un invariant associé aux fibrés vectoriels d'une variété algébrique dans lequel on identifie toutes les extensions comme des extensions triviales, autrement dit des sommes directes. Cette idée est liée à la notion de caractéristique d'Euler-Poincaré qui remonte aux travaux de Riemann et Roch sur les formes différentielles sur les surfaces de

16. Au contraire, l'existence d'une t-structure *motivique* est l'une des conjectures les plus célèbres dans le monde des motifs.

Riemann dans le XIXème siècle, et c'est en utilisant cette définition de K_0 que Grothendieck a généralisé le théorème de Riemann-Roch sous la forme de ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, lequel exprime le comportement du caractère de Chern pour les schémas lisses X

$$ch : K_0(X) \to \oplus_d CH_d(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

vis-à-vis des foncteurs images directes pour les morphismes propres, via l'accouplement avec la classe de Todd. En particulier, le caractère de Chern induit un isomorphisme entre $K_0(X)$ et la somme directe des groupes de Chow lorsqu'on tensorise les deux côtés par $\mathbb{Q}$.

Après le groupe K_0, comme dans le cas des groupes de Chow, on cherche à définir les K-groupes supérieurs des variétés qui vérifient des propriétés de localisation et peuvent produire une théorie cohomologique. La première définition réussie est celle de Quillen ([Quillen1]), appelée la Q-construction : on introduit d'abord la notion de **catégorie exacte**, qui généralise celle de catégorie abélienne en affaiblissant les axiomes et en mettant l'accent sur les suites exactes ; la Q-construction associe ensuite à toute catégorie exacte $\mathcal{C}$ une catégorie simpliciale $Q\mathcal{C}$, et Quillen définit le *spectre de K-théorie* [17] associé à $\mathcal{C}$ comme l'espace des lacets de la réalisation géométrique de $Q\mathcal{C}$. En particulier, comme toute catégorie abélienne est exacte, pour un schéma X ses K-groupes (resp. G-groupes) sont définis comme les groupes d'homotopie du spectre de K-théorie associé à la catégorie abélienne Vec_X (resp. Coh_X). Avec cette définition, Quillen démontre de nombreuses propriétés de la K-théorie et la G-théorie, telles que la formule du fibré projectif. Il obtient aussi la propriété de localisation et l'invariance par $\mathbb{A}^1$ pour la G-théorie, et en déduit les mêmes propriétés pour la K-théorie pour les schémas réguliers, car sous l'hypothèse de régularité la K-théorie et la G-théorie coïncident, grâce à l'existence d'une résolution finie de tout faisceau cohérent sur un schéma régulier par des fibrés vectoriels.

Une dizaine d'années plus tard, Thomason ([Thomason-Trobaugh]) a reformulé la K-théorie algébrique via une combinaison de la construction de Waldhausen ([Waldhausen]) et des travaux sur la théorie de l'intersection via les catégories dérivées dans [SGA6]. On regarde d'abord la définition d'une *catégorie de Waldhausen*, qui ressemble beaucoup à celle d'une catégorie de modèles : c'est une catégorie avec la donnée de deux types de morphismes particuliers, les cofibrations et les équivalences faibles ; on peut associer à chaque catégorie de Waldhausen $\mathcal{C}$ un espace de K-théorie, via les étapes suivantes : on construit d'abord une catégorie simpliciale $wS.\mathcal{C}$ associée à $\mathcal{C}$, dont le nerf est un ensemble bisimplicial, et l'espace de K-théorie de $\mathcal{C}$, $\underline{K}(\mathcal{C})$, est défini comme l'espace des lacets de la réalisation géométrique de cet ensemble bisimplicial

$$\underline{K}(\mathcal{C}) = \Omega|N.wS.\mathcal{C}|;$$

la construction de Waldhausen donne de plus un spectre (topologique) associé à $\mathcal{C}$, $K(\mathcal{C})$, dont le zéroième espace est $\underline{K}(\mathcal{C})$ et dont les groupes d'homotopie coïncident avec ceux de ce dernier. Thomason applique cette construction aux catégories de complexes de faisceaux, et pour des raisons techniques, on travaille avec une variante appelée *catégorie de biWaldhausen compliciale* : une catégorie biWaldhausen est une catégorie de Waldhausen dont la catégorie opposée est aussi

17. En fait Quillen travaille plutôt sur les K-groupes et la terminologie ici vient de Waldhausen et Thomason, voir plus bas.

munie d'une structure de catégorie de Waldhausen, et une catégorie biWaldhausen compliciale est une catégorie biWaldhausen construite à partir de la catégorie de complexes de chaînes d'une catégorie abélienne. La construction de Thomason des spectres de K-théorie et G-théorie pour les schémas est la suivante :

Définition 1.7.2. *Soit X un schéma. On définit $K(X)$ (resp. $G(X)$) comme le spectre de K-théorie associé à la catégorie biWaldhausen compliciale des complexes parfaits de $\mathcal{O}_X$-modules de Tor-dimension finie ([SGA6, Exposé I Définition 5.2.]) (resp. la catégorie biWaldhausen compliciale des complexes pseudo-cohérents de $\mathcal{O}_X$-modules à cohomologie bornée).*

On obtient ensuite les K-groupes et les G-groupes comme des groupes d'homotopie du spectre correspondant comme d'habitude. La définition de $G(X)$ coïncide avec celle de Quillen pour les schémas noethériens, et la même chose est vraie pour $K(X)$ pour les schémas qui possèdent une famille ample de fibrés en droites, par exemple les schémas noethériens réguliers ou bien quasi-projectifs sur un schéma affine. Thomason définit aussi une version relative du spectre de K-théorie, et avec cette reformulation, il améliore la fonctorialité et établit un certain nombre de propriétés pour cette K-théorie, telles que une propriété de localisation et la propriété de Brown-Gersten.

L'étude de la question de représentabilité de la K-théorie algébrique dans la théorie de l'homotopie motivique commence par Morel et Voevodsky. L'idée clé est le fait que les fibrés vectoriels sur une variété sont paramétrés par les grassmanniennes. On note $Gr = \lim_{r,n\to\infty} Gr(r,n)$ l'espace grassmannien infini, qui est la limite inductive des variétés grassmanniennes finies, vu comme un espace motivique ; l'espace Gr est un objet monoïdal de manière naturelle, dont la multiplication provient des niveaux finis, et l'espace $\mathbb{Z}\times Gr$ peut être vu comme la complétion en groupes de celui-ci. Le théorème démontré dans [Morel-Voevodsky, Theorem 4.3.13.] dit que sur un schéma de base S régulier, la K-théorie de Thomason est représentée dans la catégorie homotopique instable $\mathbf{H}_\bullet(S)$ par $\mathbb{Z}\times Gr$:

Théorème 1.7.3. *Soit S un schéma régulier. Pour tout schéma X lisse sur S, il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}((S^1_S)^n\wedge X_+, \mathbb{Z}\times Gr)\simeq K_n(X).$$

La question suivante est de transporter le résultat à la catégorie stable. Voevodsky a proposé de construire le $\mathbb{P}^1$-spectre $\mathbf{KGL}$ suivant :

Définition 1.7.4. *On note $\mathbf{KGL}$ le $\mathbb{P}^1$-spectre dont tous les termes sont l'espace $\mathbb{Z}\times Gr$, et dont la suspension $\mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times Gr)\to(\mathbb{Z}\times Gr)$ est donnée par la composition*

$$\mathbb{P}^1\wedge(\mathbb{Z}\times Gr)\xrightarrow{\beta\wedge 1}(\mathbb{Z}\times Gr)\wedge(\mathbb{Z}\times Gr)\xrightarrow{\mu}(\mathbb{Z}\times Gr)$$

où $\beta:\mathbb{P}^1\to(\mathbb{Z}\times Gr)$ est la classe de Bott $\beta\in K_0(\mathbb{P}^1)$ qui correspond à la classe de $[\mathcal{O}(1)]-1$, et μ est la multiplication de l'espace $\mathbb{Z}\times Gr$.

Riou ([Riou]) et respectivement Panin-Pimenov-Röndigs ([PPR]) montrent que le spectre $\mathbf{KGL}$ représente la K-théorie dans la catégorie stable $\mathbf{SH}(S)$ pour un schéma régulier S :

Théorème 1.7.5. *Soit S un schéma régulier. Pour tout schéma X lisse sur S, il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$Hom_{\mathbf{SH}(S)}(\Sigma^\infty \wedge X_+[n], \mathbf{KGL}) \simeq K_n(X).$$

1.8 Résumé des résultats

Dans la première partie de cette thèse on étudie le coeur de la structure de poids de Chow sur une base S. Une conjecture de Bondarko prédit que le coeur de celle-ci est équivalente à la catégorie des motifs de Corti-Hanamura (Définition 1.4.1), et le but principal de cette partie est de prouver cette conjecture, surtout pour la composition des morphismes. On commence par définir le *motif de Borel-Moore* et l'*homologie motivique de Borel-Moore* :

Définition 1.8.1. *Soit DM une catégorie qui vérifie le formalisme des six foncteurs, par exemple les motifs de Beilinson ou les motifs cdh. Pour un morphisme de schémas séparé de type fini $f : X \to S$, le* ***motif de Borel-Moore*** *de X relativement à S est défini comme l'élément $M^{BM}(X/S) = f_!\mathbb{1}_X$ dans $DM(S)$. L'**homologie motivique de Borel-Moore** de X relativement à S est le groupe*

$$H^{BM}_{p,q}(X/S) = Hom_{DM(S)}(M^{BM}(X/S), \mathbb{1}_S(-q)[-p]).$$

En utilisant le formalisme des six foncteurs, on établit une liste de propriétés fonctorielles du motif de Borel-Moore, notamment celle qui est analogue du morphisme de Gysin raffiné (Définition 1.3.4). On établit ainsi une loi de composition de morphismes dans le coeur de la structure de poids de Chow de manière formelle.

Afin de relier le coeur avec les motifs de Corti-Hanamura, il nous reste à faire le lien avec les groupes de Chow. Pour ce faire on définit et étudie la *suite spectrale de niveau*, pour établir le

Théorème 1.8.2. *Soient k un corps parfait et X un k-schéma séparé de type fini. Alors il existe un isomorphisme*

$$H^{BM}_{2n,n}(X/k) \simeq CH_n(X).$$

L'isomorphisme ci-dessus établit un lien plus profond entre les groupes de Chow et les théories de Borel-Moore. On compare ensuite les différentes fonctorialités entre le côté motivique et le côté des groupes de Chow, ce qui permet de montrer le

Théorème 1.8.3. *Soit S un schéma quasi-projectif sur un corps parfait. Il existe une équivalence de catégorie entre la catégorie des motifs de Corti-Hanamura $CHM(S)$ et le coeur de la structure de poids de Chow $Chow(S)$.*

Dans la deuxième partie on établit la représentabilité de la G-théorie de Quillen dans les catégories homotopiques instable et stable des schémas, et étudie les fonctorialités de l'objet qui la représente. Par une construction similaire à celle du spectre $\mathbf{KGL}$, on construit un $\mathbb{P}^1$-spectre $\mathbf{GGL}_S$ pour tout schéma S, et montre que celui-ci représente la G-théorie dans $\mathbf{SH}(S)$:

Théorème 1.8.4. *Le spectre $\mathbf{GGL}_S$ est un Ω-spectre, qui représente la G-théorie dans la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(S)$. Autrement dit, pour tout S-schéma lisse X il existe un isomorphisme naturel*

$$Hom_{\mathbf{SH}(S)}(\Sigma^\infty X_+[n], \mathbf{GGL}_S) \simeq G_n(X).$$

Contrairement au cas de $\mathbf{KGL}$, la formation des objets $\mathbf{GGL}_S$ n'est pas un préfaisceau, i.e. n'est pas fonctorielle pour le foncteur f^*. Mais on va montrer que ces objets sont fonctoriels pour le foncteur $f^!$ dans le sens suivant :

Théorème 1.8.5. *Pour tout morphisme quasi-projectif $f : Y \to X$ entre schémas noethériens, il existe un isomorphisme $f^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Y$.*

Comme la K-théorie et la G-théorie coïncident pour un schéma régulier, on en déduit que $\mathbf{KGL}_S = \mathbf{GGL}_S$ pour S régulier. Par conséquent on obtient le

Corollaire 1.8.6. *Pour tout schéma X quasi-projectif sur un schéma régulier S, il existe un isomorphisme $\mathbf{GGL}_X \simeq f^!\mathbf{KGL}_S$.*

Ainsi on établit le fait que la G-théorie est la théorie de Borel-Moore associée à la K-théorie, via le formalisme des six foncteurs dans la catégorie homotopique stable des schémas.

2 Borel-Moore motivic homology and weight structure on mixed motives

2.1 Introduction

Bondarko introduced in [Bondarko1] the notion of *weight structure* on triangulated categories as a counterpart of t-structure ([BBD]), with the aim of applying it to the theory of mixed motives. A weight structure defines a collection of non-positive and non-negative objects, such that every object can be decomposed, via a distinguished triangle, into a non-positive part and a negative part, in a non-unique way. The weight-0 part, also called the heart, is formed by objects which are both non-positive and non-negative; it carries so much information that a weight structure can be recovered from a partial knowledge of its heart: to be precise, any additive subset of non-positive objects is contained in the heart of a unique weight structure on the subcategory it generates ([Bondarko1, Theorem 4.3.2]). As an application of this abstract notion, Bondarko showed the existence of a weight structure on Voevodsky's motives over a perfect field ([Voevodsky1]), which provides a motivic analogue of Deligne's weight filtration and weight spectral sequence ([Deligne]). He also showed ([Bondarko1, 6.5 and 6.6]) that the heart is the category of Chow motives over a field ([André, 4.1.3]).

Based on Ayoub's work on cross functors in [Ayoub], Cisinski-Déglise generalized Voevodsky's motivic complexes to arbitrary base scheme in [Cisinski-Déglise1], by constructing the category of *Beilinson motives*: for any scheme S, there is a $\mathbb{Q}$-linear triangulated category $DM_{\mathrm{B}}(S)$ in which the *Grothendieck six functors formalism* is satisfied (*ibid.* A.5.1., and we will recall part of the full formalism in Assumption 2.2.1). The objects of geometric nature, namely those which satisfy some finiteness condition, are called constructible motives, and form a full subcategory $DM_{\mathrm{B},c}(S)$ (*ibid.* C.2.). More recently, in the equal characteristic case, an integral version of Beilinson motives is constructed in [Cisinski-Déglise2], called *cdh motives* DM_{cdh}, which satisfies the six functors formalism as well.

In the case of Beilinson motives, Hébert ([Hébert]) and independently Bondarko ([Bondarko2]) showed, by different methods, the existence of a canonical weight structure, called *Chow weight structure*, on both $DM_{\mathrm{B}}(S)$ and $DM_{\mathrm{B},c}(S)$; a similar result for cdh motives is proved in [Bondarko-Ivanov]. The aim of this chapter is to give a detailed description of the heart of Chow weight structure, namely answer the conjecture in [Bondarko2, Remark 2.1.2.4] : if S is a quasi-projective scheme over a perfect field k, the heart of Chow weight structure, denoted by $Chow(S)$, is equivalent to the category of Chow motives over a base $CHM(S)$, defined in [Corti-Hanamura, Definition 2.8]. Recall that the latter is constructed in a similar way as Chow motives over a field, where the composition of cycles is defined in the following way: let X (respectively Y, Z) be a scheme endowed with a projective morphism $f : X \to S$ such that X is smooth of relative dimension d_X (respectively d_Y, d_Z) over k. Then the following map between Chow groups defines composition between correspondences:

$$CH_{d_Y+n}(X \times_S Y) \times CH_{d_Z+m}(Y \times_S Z) \to CH_{d_Z+m+n}(X \times_S Z)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto p^{XYZ}_{XZ*}\ \delta^!_Y(\alpha \times \beta),$$

where p^{XYZ}_{XZ} is the projection $X \times_S Y \times_S Z \to X \times_S Z$, $\alpha \times \beta$ is the exterior product ([Fulton, 1.10]), and $\delta^!_Y$ is the refined Gysin morphism (*ibid.* 6.2.) associated to the cartesian diagram

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \times_S Z \arrow[r] \arrow[d] & (X \times_S Y) \times_k (Y \times_S Z) \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\delta_Y"] & Y \times_k Y, \end{tikzcd}$$

where the diagonal embedding δ_Y is a regular embedding (*ibid.* B.7.) since Y is smooth over k. There is a canonical map from $CHM(S)$ to the heart, which sends the motive of X to the element $M^{BM}(X/S) = f_! \mathbb{1}_X$ (where $\mathbb{1}_X$ is the unit for the tensor structure), called the *Borel-Moore motive* of X relative to S. A natural idea is to show that this map is indeed a functor, which induces an equivalence of categories. To do so, we need to

1. Identify the group of morphisms between Borel-Moore motives;
2. Describe the composition law between morphisms.

For the first point, using a base change formula, we are reduced to compute the following group

$$H^{BM}_{p,q}(X/S) = Hom_{DM_{\mathrm{B},c}(S)}(M^{BM}(X/S), \mathbb{1}_S(-q)[-p])$$

(see also [Bondarko2, Lemma 1.1.4]), which we call the *Borel-Moore motivic homology* (or simply *Borel-Moore homology*) of X relative to S. Classically, for $S = Spec\,\mathbb{C}$, Borel-Moore homology, also known as homology with compact support, is a homology theory for locally compact topological spaces introduced in [Borel-Moore]. A motivic analogue is defined by Levine ([Levine, I.IV.2.4]) using the notion of motives with compact support, and a similar definition is given in [MVW, Definition 16.20]. Our treatment here uses the powerful tool of six functors formalism, which provides similar and even stronger functorialities compared with the topological case, such as the following ones, called "basic functorialities" (see Lemma 2.2.4):

– For any proper morphism $f : X \to Y$, there is a push-forward map

$$f_* : H^{BM}_{p,q}(X/S) \to H^{BM}_{p,q}(Y/S);$$

– For any smooth morphism $f : X \to Y$ of relative dimension d, there is a pull-back map

$$f^* : H^{BM}_{p,q}(Y/S) \to H^{BM}_{p+2d,q+d}(X/S);$$

– For any closed immersion $i : Z \to X$ with complement open immersion $j : U \to X$, there is a long exact sequence, called *localization sequence*

$$\cdots \to H^{BM}_{p,q}(Z/S) \xrightarrow{i_*} H^{BM}_{p,q}(X/S) \xrightarrow{j^*} H^{BM}_{p,q}(U/S) \xrightarrow{\partial_{X,Z}} H^{BM}_{p-1,q}(Z/S) \to \cdots .$$

Computations of Borel-Moore homology date back to Voevodsky's identification of motivic cohomology for smooth schemes with Chow groups in [Voevodsky2]. The key in his proof is the use of the *coniveau spectral sequence*, introduced for the first time by Bloch and Ogus for étale cohomology ([Bloch-Ogus]) after Grothendieck's insight on the coniveau filtration ([Grothendieck]). A big amount of work has been devoted to this kind of spectral sequence since their work: for example [CTHK] computed the E_2 terms for more general cohomologies; Rost introduced the notion of *cycle modules* in [Rost] in an attempt to deal with a generalized divisor class map from the prototype of Milnor's K-theory; Déglise established the link between Voevodsky's motives and Rost's cycle modules in [Déglise7] and [Déglise4], and developed the corresponding motivic theory in [Déglise1]. The E_1-term of the coniveau spectral sequence, also known as *Cousin complexes*, come from filtration by codimension of support: they are sums of "generic" cohomology groups corresponding to points of X of a given codimension, where each point is seen as the generic point of its Zariski closure. The coniveau spectral sequence converges to the cohomology of the entire variety, which in our case allows to compute certain motivic cohomology groups. Another crucial ingredient in Voevodsky's proof is the cancellation of certain motivic cohomology groups:

Lemma 2.1.1. *([Suslin-Voevodsky1, Lemma 3.2]) Let k be a field and X be a smooth k-scheme, then we have*

$$H^{p,q}(X) = 0$$

whenever $p > q + dim(X)$ or $q < 0$. [1]

As a consequence, the index of non-zero E_1-terms is constrained in a quarter-plane of $\mathbb{Z}^2$; identifying the differential map with the divisor class map (see for example [Déglise1, Proposition 1.16]), we obtain the following

Lemma 2.1.2. *([Voevodsky1, Proposition 2.1.4]) Let k be a perfect field and X be a smooth k-scheme, then there is an isomorphism*

$$H^{2n,n}(X) \simeq CH^n(X).$$

As a matter of fact, the localization property of Chow groups suggests that they behave more like a Borel-Moore theory. For smooth schemes, motivic cohomology agrees with Borel-Moore homology up to a suitable change of indexes (Lemma 2.4.2); this agreement fails for singular schemes, in which case it is the Borel-Moore homology that gives the correct Chow groups, as shown in [MVW, Proposition 19.18]. We will give a proof in our setting by constructing a spectral sequence similar to the coniveau spectral sequence which, as we will see, is essentially a consequence of the localization sequence; using some results on the action of basic functorialities on motivic cohomology (Lemma 2.3.7), we deduce the following

Proposition 2.1.3. *(see Corollary 2.3.10) Let k be a perfect field and X be a separated k-scheme of finite type, then there is an isomorphism*

$$H^{BM}_{2n,n}(X) \simeq CH_n(X).$$

1. We will recall the definition of motivic cohomology groups in Definition 2.4.1.

For the second point, seeing the composition law on Chow motives, it is important to construct a motivic version of Fulton's refined Gysin morphism, and then compare functorialities on Chow groups and those on motives. There are indeed two ways to define refined Gysin morphisms on motives: on the one hand, using the absolute purity isomorphism for closed immersion between regular schemes, we show that there is a natural way to construct Gysin morphisms, which are generalized to refined Gysin morphisms by base change; on the other hand, we can repeat the construction in [Fulton] by constructing a motivic specialization map and then composing with suitable push-forward and pull-back maps. By a non-trivial lemma, we show that the two possible definitions agree (Corollary 2.2.36). This two-sided point of view is very advantageous: the first definition is so natural that it can be easily compared with the composition law with a formal argument (Proposition 2.2.41); the second one can be compared with Fulton's construction, if we know how to compare push-forward, pull back and specialization maps. This can be done by looking directly at the niveau spectral sequence. To conclude, the main result that we obtain is the following:

Theorem 2.1.4. *(see Theorem 2.3.20) Let S be a quasi-projective scheme over a perfect field k. Then the two categories $CHM(S)$ and $Chow(S)$ are equivalent.*

This chapter is organized as follows:

In Chapter 2.2 we study several types of functorialities of the Borel-Moore motive. Apart from the "basic functorialities" listed above, purity isomorphisms provide much important information: we use them to define Gysin morphisms and therefore deduce refined Gysin morphisms by base change. By a similar lemma as [Déglise4, Proposition 2.6.5], we show that this definition agrees with the construction in [Fulton, 6.2]. At the end of the chapter, we show that refined Gysin morphisms we have defined appear naturally when it comes to the composition of morphisms between Borel-Moore motives.

In Chapter 2.3 we begin with the computation of the Borel-Moore homology. We construct the so-called niveau spectral sequence, similar to the coniveau one, for Borel-Moore homology; as a consequence, we deduce that Borel-Moore homology groups are isomorphic to Chow groups (Corollary 2.3.10); then we show the compatibility of this isomorphism with respect to push-forward, pull-back and refined Gysin maps. At last we conclude by giving the identification between Chow motives over a base and the heart of Chow weight structure.

In the last chapter we prove some lemmas used in previous chapters. Section 2.4.1 is devoted to the proof of Lemma 2.3.7, which computes some elementary operations on Borel-Moore homology. Such computations are already known in [Déglise2] for motivic cohomology, and we adapt those results to our case by identifying motivic cohomology with Borel-Moore homology. In Section 2.4.2 we prove the remaining lemmas via a further study of purity isomorphisms.

2.2 Borel-Moore motives and their functorialities

In this chapter we study functorial properties of Borel-Moore motives. Note that the proof of Lemma 2.2.8, Lemma 2.2.16, Lemma 2.2.22 and Lemma 2.2.28 will be postponed to Section 2.4.2.

Convention. If (F, G) is a pair of adjoint functors, we denote by $ad_{(F,G)} : 1 \to G \circ F$ and $ad'_{(F,G)} : F \circ G \to 1$ the canonical counit and unit natural transformations.

2.2.1 The six functors formalism

We recall here a part of the six functors formalism in an abstract framework of motives, which we will need later. We restrict ourselves to *constructible motives* ([Cisinski-Déglise1, Definition 11.1.7]) for simplicity.

Recall 2.2.1. *Throughout this chapter, we assume that Λ is a commutative ring with unit, $\mathcal{S}$ is a subcategory of the category of noetherian schemes of finite (Krull) dimension, and $DM_c(\cdot, \Lambda)$ is a triangulated category fibered over $\mathcal{S}$, in which the following conditions hold:*

1. *There is symmetric closed monoidal structure on $DM_c(\cdot, \Lambda)$, denoted by $\otimes$. For any $X \in \mathcal{S}$, the unit in $DM_c(X, \Lambda)$ is denoted by $\mathbb{1}_X$.*
2. *For any morphism $f : Y \to X$, there is a functor $f^* : DM_c(X, \Lambda) \to DM_c(Y, \Lambda)$, which has a right adjoint $f_* : DM_c(Y, \Lambda) \to DM_c(X, \Lambda)$. The functor f^* is monoidal, i.e. $f^*\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y$.*
3. *For any separated morphism of finite type $f : Y \to X$, there is a functor $f_! : DM_c(Y, \Lambda) \to DM_c(X, \Lambda)$, which has a right adjoint $f^! : DM_c(X, \Lambda) \to DM_c(Y, \Lambda)$.*
4. *There is a structure of a covariant (resp. contravariant) 2-functors on $f \mapsto f_*$ and $f \mapsto f_!$ (resp. $f \mapsto f^*$ and $f \mapsto f^!$).*
5. *For any proper morphism f, there is a natural identification $f_! = f_*$.*
6. *(Relative purity) For any smooth morphism f of relative dimension d, there is an isomorphism of functors $P(f) : f^! \simeq f^*(d)[2d]$.*
7. *(Base change isomorphism) For any cartesian square of schemes*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X, \end{tikzcd}$$

   such that f is separated of finite type, there is an isomorphism $Ex(\Delta_!^*) : g^* f_! \simeq f'_! g'^*$.
8. *(Projection formula) For any separated morphism of finite type $f : Y \to X$, there is an isomorphism $(f_! K) \otimes_X L \simeq f_!(K \otimes_Y f^* L)$.*
9. *(Localization distinguished triangle) For any closed immersion $i : Z \to S$ with complementary open immersion j, there is a distinguished triangle of natural transformations*

$$j_! j^! \to 1 \to i_* i^* \to j_! j^! [1]$$

   where the first two maps are canonical adjunction maps.

10. *(Absolute purity) For any closed immersion $i : Z \to S$ between regular schemes of codimension c, there is an isomorphism $P(i) : i^! \mathbb{1}_S \simeq \mathbb{1}_Z(-c)[-2c]$.*

As we mentioned in the introduction, the main examples of the previous formalism are:
- the category of constructible Beilinson motives $DM_{\mathrm{B},c}$ ([Cisinski-Déglise1]), with $\Lambda = \mathbb{Q}$ and $\mathcal{S}$ the category of noetherian schemes of finite dimension.
- the category of constructible cdh motives $DM_{cdh,c}$ ([Cisinski-Déglise2]), with $\Lambda = \mathbb{Z}[1/p]$ and $\mathcal{S}$ the category of noetherian schemes of finite dimension over a field of characteristic exponent p.

The two categories above, each endowed with the six functors formalism, are equivalent with rational coefficients ([Cisinski-Déglise1, Theorem 16.1.4]).

2.2.2 Borel-Moore motives and basic functorialities

Definition 2.2.2. *Let $f : X \to S$ be a separated morphism of finite type. The* ***Borel-Moore motive*** *of X relative to S, denoted by $M^{BM}(X/S)$, is defined as the element $f_! f^* \mathbb{1}_S = f_! \mathbb{1}_X$ in the category $DM_c(S, \Lambda)$.*

Remark 2.2.3. *The following properties follow from the definition above:*

1. *For any scheme Y, $M^{BM}(Y/Y) = \mathbb{1}_Y$.*
2. *If we have a tower $X \to Y \xrightarrow{p} S$, then $M^{BM}(X/S) = p_! M^{BM}(X/Y)$.*

The second point shows that for functorial compatibilities of Borel-Moore motives we may work over the base Y and then "go down" over the base S.

Borel-Moore motives have three basic functorialities:

Lemma 2.2.4. *Let $p : Y \to S$ be a separated morphism of finite type.*

1. *(Proper functoriality) Let $f : X \to Y$ be a proper morphism, then there is a map $f^* : M^{BM}(Y/S) \to M^{BM}(X/S)$.*
2. *(Smooth functoriality) Let $f : X \to Y$ be a smooth morphism of relative dimension d, then there is a map $f_* : M^{BM}(X/S) \to M^{BM}(Y/S)(-d)[-2d]$.*
3. *(Localization triangle) Let Z be a closed subscheme of Y, then there is a canonical map $\partial_{Y,Z} : M^{BM}(Z/S) \to M^{BM}(Y - Z/S)[1]$, called boundary map, such that the triangle*

$$M^{BM}(Y - Z/S) \to M^{BM}(Y/S) \to M^{BM}(Z/S) \xrightarrow{\partial_{Y,Z}} M^{BM}(Y - Z/S)[1]$$

is a distinguished triangle in $DM_c(S, \Lambda)$, where the two first maps are the proper and smooth functorialities constructed previously.

Proof. 1. The map is constructed as

$$M^{BM}(Y/S) = p_! \mathbb{1}_Y \xrightarrow{ad_{(f^*, f_*)}} p_! f_* f^* \mathbb{1}_Y = M^{BM}(X/S).$$

2. Using the relative purity (Recall 2.2.1 (6)) of f, we construct the map as

$$M^{BM}(X/S) = p_! f_! f^* \mathbb{1}_Y \overset{(P(f))^{-1}}{\simeq} p_! f_! f^! \mathbb{1}_Y(-d)[-2d]$$
$$\xrightarrow{ad'_{(f_!,f^!)}} p_! \mathbb{1}_Y(-d)[-2d] = M^{BM}(Y/S)(-d)[-2d].$$

3. The localization triangle comes from the localization distinguished triangle (Recall 2.2.1 (9)).

□

Remark 2.2.5. *1. The proper and smooth functorialities are compatible with compositions. The proper case is clear, and the smooth case is stated in Recall 2.2.15 (1).*

2. By the localization triangle, we know that if $X = X_1 \coprod X_2$ is a disjoint union of two sub-S-schemes, then there is a canonical identification $M^{BM}(X/S) = M^{BM}(X_1/S) \oplus M^{BM}(X_2/S)$. Via this identification, the proper functoriality and the boundary map are additive ([Déglise2, Proposition 2.26]): for example in the case of the proper functoriality, if $X = X_1 \coprod X_2$ and $Y = Y_1 \coprod Y_2$ are disjoint unions, and $f : X \to Y$ is a proper morphism obtained by gluing two proper morphisms $f_1 : X_1 \to Y_1$ and $f_2 : X_2 \to Y_2$, then $f_* = f_{1*} + f_{2*}$.

In addition, the Borel-Moore motive of a scheme only depends on its reduced scheme structure:

Lemma 2.2.6. *Let $f : X \to S$ be a separated morphism of schemes of finite type and $i : X_{red} \to X$ be the closed immersion associated to the reduced scheme of X. Then the proper functoriality $M^{BM}(X/S) \xrightarrow{i^*} M^{BM}(X_{red}/S)$ is an isomorphism.*

Proof. The closed immersion $i : X_{red} \to X$ has empty open complement. Therefore the localization triangle (Lemma 2.2.4 (3)) gives us a distinguished triangle

$$0 \to M^{BM}(X/S) \xrightarrow{i^*} M^{BM}(X_{red}/S) \to 0,$$

and the result follows from a standard lemma on triangulated categories. □

In what follows, we are going to check that some other operations are compatible with the three basic functorialities. The following lemma is a general fact in triangulated categories:

Lemma 2.2.7. *Suppose we have the following diagram in a triangulated category*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A' \arrow[r, "u'"] & B \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & A'[1],
\end{tikzcd}$$

where the two rows (u, v, w) and (u', v', w') are distinguished triangles and the maps f and g are such that square (1) commutes. Suppose in addition that $Hom(A[1], C') = 0$. Then there exists one and only one map $h : C \to C'$ which makes the whole diagram commutative.

In particular, by [Cisinski-Déglise1, Proposition 2.3.3], the conditions in Lemma 2.2.7 are satisfied for the localization triangle, which means that in order to check the compatibility between boundary maps, it is sufficient to check the compatibility between proper and smooth functoriality maps.

Now we check the basic functorialities are compatible with each other. Until the end of this section, all schemes are supposed to be separated of finite type over a base scheme S. The key point is the following lemma, namely the compatibility between proper and smooth functorialities for a cartesian square:

Lemma 2.2.8. *Suppose we have a cartesian square*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "p"] & X, \end{tikzcd}$$

with p a proper morphism and f a smooth morphism of relative dimension d. Then we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Y'/S) \arrow[d, "g_*"] & M^{BM}(X'/S) \arrow[l, "q^*"'] \arrow[d, "f_*"] \\ M^{BM}(Y/S)(-d)[-2d] & M^{BM}(X/S)(-d)[-2d]. \arrow[l, "p^*"'] \end{tikzcd}$$

The proof of Lemma 2.2.8 will be given in Section 2.4.2. The three following lemmas are straightforward consequences of Lemma 2.2.7 and Lemma 2.2.8:

Lemma 2.2.9. *Suppose we have a cartesian square*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"] & X' \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X, \end{tikzcd}$$

with i a closed immersion and p a separated morphism of finite type, which can be completed to a diagram of two cartesian squares

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"] & X' \arrow[d, "p"] & X' - Z' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "r"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X & X - Z. \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

1. *If p is a proper morphism, then we have a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X' - Z'/S)[1] & M^{BM}(Z'/S) \arrow[l, "\partial_{X',Z'}"'] \\ M^{BM}(X - Z/S)[1] \arrow[u, "r^*"] & M^{BM}(Z/S). \arrow[l, "\partial_{X,Z}"'] \arrow[u, "q^*"'] \end{tikzcd}$$

2. *If p is a smooth morphism of relative dimension d, then we have a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X'-Z'/S)(d)[2d+1] \arrow[d, "r_*"] & M^{BM}(Z'/S)(d)[2d] \arrow[l, "\partial_{X',Z'}"'] \arrow[d, "q_*"] \\ M^{BM}(X-Z/S)[1] & M^{BM}(Z/S). \arrow[l, "\partial_{X,Z}"'] \end{tikzcd}$$

Lemma 2.2.10. *Suppose we have two consecutive closed immersions $W \to Y \to Z$. Then we have a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Z-Y/S)[1] & & M^{BM}(Y-W/S). \arrow[ll, "\partial_{Z-W,Y-W}"'] \arrow[dl, "j_*"] \\ & M^{BM}(Y/S) \arrow[ul, "\partial_{Z,Y}"] & \end{tikzcd}$$

Proof. The result follows from Lemma 2.2.9 (2) applied to the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Y-W \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "j_3"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & Z-W \arrow[d, "j_4"] & \\ Y \arrow[r, "i_1"'] & Z & Z-Y, \arrow[l, "j_1"] \arrow[ul, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

where the i_k are closed immersions and the j_k are open immersions, and the square (1) is cartesian.

$\square$

Lemma 2.2.11. *Suppose that we have the following commutative diagram of schemes:*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_3"'] & X' \arrow[d, "i_4"'] & \\ Z \arrow[r, "i_1"] & X & Y, \arrow[l, "j"'] \arrow[ul, "j'"'] \end{tikzcd}$$

where j and j' are open immersions and all i_k's are closed immersions, such that $X - Z = X' - Z' = Y$. Then the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Y/S)[1] & & M^{BM}(Z/S). \arrow[ll, "\partial_{X,Z}"'] \arrow[dl, "i_3^*"] \\ & M^{BM}(Z'/S) \arrow[ul, "\partial_{X',Z'}"] & \end{tikzcd}$$

Lemma 2.2.12. *Let $p : X \to S$ be a separated morphism of finite type, $i : Z \to X$ and $i' : Z' \to X$ be two closed immersions with open complements $j : U \to X$ and $j' : U' \to X$. Form the diagram*

$$\begin{tikzcd}
Z \times_X Z' \arrow[r, "i_{Z'}"] \arrow[d, "i'_Z"'] & Z' \arrow[d, "i'"] & U \times_X Z' \arrow[l, "j_{Z'}"'] \arrow[d, "i'_U"] \\
Z \arrow[r, "i"] & X & U \arrow[l, "j"'] \\
Z \times_X U' \arrow[r, "i_{U'}"] \arrow[u, "j'_Z"] & U' \arrow[u, "j'"'] & U \times_X U' \arrow[l, "j_{U'}"'] \arrow[u, "j'_U"']
\end{tikzcd}$$

where all of the four squares are Cartesian. Then the diagram

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(Z \times_X Z'/S) \arrow[r, "\partial_{Z', Z\times_X Z'}"] \arrow[d, "\partial_{Z, Z\times_X Z'}"'] & M^{BM}(U \times_X Z'/S)[1] \arrow[d, "\partial_{U, U\times_X Z'}"] \\
M^{BM}(Z \times_X U'/S)[1] \arrow[r, "\partial_{U', Z\times_X U'}"] & M^{BM}(U \times_X U'/S)[2]
\end{tikzcd}$$

is commutative.

Proof. The diagram we need is obtained by applying the functor $p_!$ to the square

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(Z \times_X Z'/X) \arrow[r, "\partial_{Z', Z\times_X Z'}"] \arrow[d, "\partial_{Z, Z\times_X Z'}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & M^{BM}(U \times_X Z'/X)[1] \arrow[d, "\partial_{U, U\times_X Z'}"] \\
M^{BM}(Z \times_X U'/X)[1] \arrow[r, "\partial_{U', Z\times_X U'}"] & M^{BM}(U \times_X U'/X)[2],
\end{tikzcd}$$

and therefore we only need to show the commutativity of the square $(*)$. Complete it into a diagram of localization sequences

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(U \times_X Z'/X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{U, U\times_X Z'}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & M^{BM}(Z'/X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{X,Z'}"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & M^{BM}(Z \times_X Z'/X) \arrow[r, "\partial_{Z', Z\times_X Z'}"] \arrow[d, "\partial_{Z, Z\times_X Z'}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & M^{BM}(U \times_X Z'/X)[1] \arrow[d, "\partial_{U, U\times_X Z'}"] \\
M^{BM}(U \times_X U'/X)[1] \arrow[r] & M^{BM}(U'/X)[1] \arrow[r] & M^{BM}(Z \times_X U'/X)[1] \arrow[r, "\partial_{U', Z\times_X U'}"] & M^{BM}(U \times_X U'/X)[2],
\end{tikzcd}$$

and we know that the two squares (1) and (2) commute by Lemma 2.2.9. In addition we have

$$\begin{aligned}
&Hom(M^{BM}(U \times_X Z'/X)[1], M^{BM}(Z \times_X U'/X)[1]) \\
=&Hom(j_! i'_{U!} \mathbb{1}_{U\times_X Z'}, i_! j'_{Z!} \mathbb{1}_{Z\times_X U'}) \\
=&Hom(i'_{U!} \mathbb{1}_{U\times_X Z'}, j^! i_! j'_{Z!} \mathbb{1}_{Z\times_X U'}) = 0
\end{aligned}$$

since $j^! i_* = j^* i_* = 0$ by [Cisinski-Déglise1, 2.3.1 (d)]. Therefore by Lemma 2.2.7 the square $(*)$ commutes. □

2.2.3 Purity isomorphism, Gysin morphism and refined Gysin morphism

In this section, S is a base scheme, and all S-schemes are supposed to be separated of finite type.

Remark 2.2.13. *([Levine-Morel, Remarks 5.1.2 3)]) If $f : X \to Y$ is a quasi-projective morphism, f is always **smoothly embeddable**, i.e. f can be factorized as $X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} Y$, where i is closed immersion and p is a smooth morphism. Furthermore, given two quasi-projective morphisms $f : X \to Y$ and $g : Y \to Z$, their composition is quasi-projective, thus smoothly embeddable. In addition, there exists a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & R \arrow[d, "p_3"] \\ & Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "g"'] & Q \arrow[d, "p_2"] \\ & & Z, \end{tikzcd}$$

where all i_k's are closed immersions and p_k's are smooth morphisms, and the square (1) is cartesian.

Definition 2.2.14. *Let $f : X \to Y$ be a quasi-projective morphism between regular schemes, which is factorized as the composite map $X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} Y$, where i is a closed immersion and p is a smooth morphism. The scheme P is then regular, and therefore i is a regular closed immersion ([Fulton, B.7.1]). If the immersion $X \xrightarrow{i} P$ is of codimension d_1 (i.e. its normal bundle is of rank d_1 over X) and the smooth morphism $P \xrightarrow{p} Y$ is of relative dimension d_2, we say that the morphism f is of relative dimension $d = d_2 - d_1$.*

Note that the relative dimension is always Zariski locally well defined and independent of the factorization. Recall that there are two types of purity isomorphisms: the relative purity (Recall 2.2.1 (6)) and the absolute purity (Recall 2.2.1 (10)). Both of them are stable by composition:

Recall 2.2.15.
1. *([Cisinski-Déglise1, Remark 2.4.52]) Let $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ be two consecutive smooth morphisms. Then $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$.*
2. *([Déglise5, Theorem 2.4.9]) Let $X \xrightarrow{i_1} Y \xrightarrow{i_2} Z$ be two consecutive closed immersions between regular schemes. Then $P(i_2 \circ i_1) = P(i_2) \circ P(i_1)$.*

Furthermore, the two kind of purity isomorphisms are compatible with each other in the following way:

Lemma 2.2.16. *Consider a cartesian square of regular schemes*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X, \end{tikzcd}$$

where i and i' are closed immersions of codimension c, f and g are smooth morphisms of relative dimension d. Then we have $P(i') \circ P(f) = P(g) \circ P(i)$.

The proof of Lemma 2.2.16 will be given in Section 2.4.2. Combining the relative purity and absolute purity, we generalize the purity isomorphism to any quasi-projective morphism between regular schemes:

Definition 2.2.17. *Let $f : X \to Y$ be a quasi-projective morphism between regular schemes of relative dimension d. We have the following* ***purity isomorphism****:*

$$P(f) : f^!\mathbb{1}_Y \simeq f^*\mathbb{1}_Y(d)[2d] = \mathbb{1}_X(d)[2d].$$

Firstly we need to check that the purity isomorphism is independent of the choice of factorization. We need the following lemma:

Lemma 2.2.18. *Consider two consecutive morphisms between regular schemes $X \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} Y$, where i is a closed immersion, p is a smooth morphism, such that $p \circ i$ is a closed immersion. Then we have $P(p \circ i) = P(p) \circ P(i)$.*

Proof. We have the following commutative diagram of schemes:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "p"] & Y \\
 & P \times_S X \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] & X, \arrow[u, "p\circ i"'] \\
X \arrow[uur, "i"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[urr, "id_X"'] & &
\end{tikzcd}$$

where $\alpha = (i, id_X) : X \to P \times_S X$ is a closed immersion, as well as p_1. Then Recall 2.2.15 implies that $P(i) = P(p_1) \circ P(\alpha)$. Also, applying Lemma 2.2.16 to the cartesian square (1), we have $P(p) \circ P(p_1) = P(p \circ i) \circ P(p_2)$. Therefore in order to show $P(p \circ i) = P(p) \circ P(i)$, we only need to show that $P(p_2) \circ P(\alpha) = P(id_X)$, i.e. we are reduced to the case where $X = Y$ and i is a section of p, which is proved in [Déglise5]. □

Corollary 2.2.19. *1. The purity isomorphism does not depend on the factorization.*

2. The purity isomorphism is compatible with composition.

Proof. 1. ([Fulton, Proposition 6.6(a)]) Let $f : X \to Y$ be a quasi-projective morphism and suppose that there are two factorizations $X \to P \to Y$ and $X \to P' \to Y$ of f. Compare both of them to the diagonal

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & P \times_Y P' \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[d] \\
 & P \arrow[r] & Y,
\end{tikzcd}$$

and the corollary follows from Lemma 2.2.18.

2. Results from Remark 2.2.13, Recall 2.2.15 and Lemma 2.2.16.

□

Definition 2.2.20. *Consider two consecutive morphisms $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} S$, where X and Y are regular S-schemes and f is a quasi-projective morphism of relative dimension d. We deduce from the purity isomorphism a **Gysin morphism***

$$\begin{aligned} G(f): & M^{BM}(X/S) = p_! f_! \mathbb{1}_X \overset{P(f)^{-1}}{\simeq} p_! f_! f^! \mathbb{1}_Y(-d)[-2d] \\ & \xrightarrow{ad'_{(f_!, f^!)}} p_! \mathbb{1}_Y(-d)[-2d] = M^{BM}(Y/S)(-d)[-2d]. \end{aligned}$$

It follows from Corollary 2.2.19 2) that the formation of Gysin morphisms is compatible with composition:

Corollary 2.2.21. *If $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ are two quasi-projective morphisms between regular schemes, then $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$.*

Now we check the compatibility between Gysin morphisms with the three basic functorialities. In particular, if f is a smooth morphism between regular schemes, then $G(f)$ is nothing but the smooth functoriality (Lemma 2.2.4 2)) for Borel-Moore motives, so by Corollary 2.2.21, all Gysin morphisms are compatible with the smooth functoriality. For the proper functoriality, it is compatible with Gysin morphisms in the transversal intersection case:

Lemma 2.2.22. *Consider a cartesian square of regular S-schemes*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X, \end{tikzcd}$$

where p and q are proper morphisms and i and i' are closed immersions, such that p is transversal to i.[2] *Then the following square is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Z/S) \arrow[r, "G(i)"] \arrow[d, "q^*"'] & M^{BM}(X/S)(c)[2c] \arrow[d, "p^*"] \\ M^{BM}(Z'/S) \arrow[r, "G(i')"] & M^{BM}(X'/S)(c)[2c]. \end{tikzcd}$$

In the case where p and q are closed immersions, then the following square is commutative:

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Z/S) \arrow[r, "G(i)"] \arrow[d, "\partial_{Z,Z'}"'] & M^{BM}(X/S)(c)[2c] \arrow[d, "\partial_{X,X'}"] \\ M^{BM}(Z-Z'/S)[1] \arrow[r, "G(i'')"] & M^{BM}(X-X'/S)(c)[2c+1]. \end{tikzcd}$$

2. Recall that this means that the canonical closed immersion from the normal cone of Z' in X' to the pull-back by p of the normal cone of Z in X ([Fulton, B.6.1]) is an isomorphism.

The proof of Lemma 2.2.22 will be given in Section 2.4.2.

Now we introduce a functorial base change property of Borel-Moore motives, which comes from the base change isomorphism (Recall 2.2.1 7)):

Definition 2.2.23. *Consider a cartesian square of schemes*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y, \end{tikzcd}$$

where p and q are separated of finite type. Then there is an isomorphism

$$BC(\Delta) : M^{BM}(X'/Y') = q_!g^*\mathbb{1}_X \overset{(Ex(\Delta_!^*))^{-1}}{\simeq} f^*p_!\mathbb{1}_X = f^*M^{BM}(X/Y)$$

called ***base change isomorphism*** *for Borel-Moore motives.*

Remark 2.2.24. *It follows from [Cisinski-Déglise1, Corollary 2.2.12] that the base change isomorphism is compatible with horizontal and vertical compositions of squares.*

As an application, we deduce from the base change isomorphism a formula of Künneth type for Borel-Moore motives:

Lemma 2.2.25 (Künneth formula)**.** *For any S-schemes X and Y, there is an isomorphism $M^{BM}(X \times_S Y/S) \simeq M^{BM}(X/S) \otimes M^{BM}(Y/S)$.*

Proof. Denote by $f : X \to S$ the structural morphism. Then using the projection formula (Recall 2.2.1 8)) and the base change isomorphism, we have

$$\begin{aligned} M^{BM}(X/S) \otimes M^{BM}(Y/S) &= f_!\mathbb{1}_X \otimes M^{BM}(Y/S) \simeq f_!(\mathbb{1}_X \otimes f^*M^{BM}(Y/S)) \\ &\simeq f_!(\mathbb{1}_X \otimes M^{BM}(X \times_S Y/X)) = M^{BM}(X \times_S Y/S). \end{aligned}$$

$\square$

Definition 2.2.26. *Take the notations in Definition 2.2.23. Let $\phi : M^{BM}(X/Y) \to \mathbb{1}_Y(m)[n]$ be a map, and let $r : Y' \to S$ be a separated morphism of finite type. We define a map $R_f(\phi/S) : M^{BM}(X'/S) \to M^{BM}(Y'/S)(m)[n]$ as the composition*

$$\begin{aligned} M^{BM}(X'/S) = r_!M^{BM}(X'/Y') &\overset{BC(\Delta)}{\simeq} r_!f^*M^{BM}(X/Y) \\ &\xrightarrow{\phi} r_!f^*\mathbb{1}_Y(m)[n] = M^{BM}(Y'/S)(m)[n]. \end{aligned}$$

Similarly, if $\phi : \mathbb{1}_Y \to M^{BM}(X/Y)(m)[n]$ is a map, we define a map

$$R_f(\phi/S) : M^{BM}(Y'/S) \to M^{BM}(X'/S)(m)[n].$$

It follows from Remark 2.2.24 that the R-operation is transitive:

Lemma 2.2.27. *For any $Y'' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Y$ we have $R_{f\circ g/S}(\phi) = R_g(R_f(\phi/S)/S)$.*

When f and S are clear, we take also the notation $R_f(\phi)$ or $R(\phi)$ instead of $R_f(\phi/S)$ for simplicity. Now we check that the R-operation is compatible with basic functorialities:

Lemma 2.2.28. *Take the notations in Definition 2.2.23. Then*

1. *If p and q are proper morphisms, then $R_f(p^*) = q^*$. In other words, the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1}_{Y'} \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, equal] & M^{BM}(X'/Y') \arrow[d, "BC(\Delta)", "\wr"'] \\ f^*\mathbb{1}_Y \arrow[r, "p^*"] & f^*M^{BM}(X/Y). \end{tikzcd}$$

2. *If p and q are smooth morphisms of relative dimension d, then $R_f(p_*) = q_*$. In other words, the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X'/Y') \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "BC(\Delta)", "\wr"'] & \mathbb{1}_{Y'}(-d)[-2d] \arrow[d, equal] \\ f^*M^{BM}(X/Y) \arrow[r, "p_*"] & f^*\mathbb{1}_Y(-d)[-2d]. \end{tikzcd}$$

3. *If p and q are closed immersions, then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X'/Y') \arrow[r, "\partial_{Y',X'}"] \arrow[d, "BC(\Delta)", "\wr"'] & M^{BM}(Y'-X'/Y')[1] \arrow[d, "BC(\Delta')", "\wr"'] \\ f^*M^{BM}(X/Y) \arrow[r, "\partial_{Y,X}"] & f^*M^{BM}(Y-X/Y)[1], \end{tikzcd}$$

where Δ' is the cartesian square

$$\begin{tikzcd} Y'-X' \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Delta'"] & Y' \arrow[d, "f"] \\ Y-X \arrow[r, "p_1"] & Y. \end{tikzcd}$$

The proof of Lemma 2.2.22 will be given in Section 2.4.2.

For any scheme X, the boundary map $\mathbb{1}_X \xrightarrow{\partial_{\mathbb{A}^1_X,X}} M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/X)[1]$ associated to the zero section $X \to \mathbb{A}^1_X$ has a canonical right inverse

$$\phi_X : M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/X)[1] \to \mathbb{1}_X,$$

such that for any scheme Y over X, $R(\phi_X) = \phi_Y$.[3] It results from the construction of the Künneth formula (Lemma 2.2.25) that the map ϕ_X is compatible with tensor products:

3. ϕ_X is an element of $H^{BM}_{1,0}(\mathbb{G}_{m,X}/X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathcal{O}^*(X)$, which corresponds to the fundamental parameter of $\mathbb{G}_m$, see Lemma 2.3.7.

Lemma 2.2.29. *Let $f : X \to S$ be a separated morphism of finite type. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/S) \arrow[r, "f_!\phi_X"] \arrow[d, "\wr"'] & M^{BM}(X/S). \\ M^{BM}(X/S) \otimes M^{BM}(\mathbb{G}_{m,S}/S)[1] \arrow[ur, "id\otimes\phi_S"'] & \end{tikzcd}$$

Definition 2.2.30. *Let X be a regular S-scheme endowed with a S-morphism $f : X \to \mathbb{G}_{m,S}$. Then the morphism $\Gamma_f : X \to X \times \mathbb{G}_{m,S} = \mathbb{G}_{m,X}$, the graph of f, is a closed immersion of codimension 1 between regular schemes. Define the map $\psi(f) : M^{BM}(X/S)[1] \to M^{BM}(X/S)(1)[2]$ as the composition*

$$M^{BM}(X/S)[1] \xrightarrow{G(\Gamma_f)} M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/S)(1)[3] \xrightarrow{\phi_X} M^{BM}(X/S)(1)[2].$$

Proposition 2.2.31. . *Let X be a regular S-scheme endowed with a flat morphism $X \to \mathbb{A}^1$, such that the fiber over the point 0 is regular, denoted by Z. Denote by $f : X - Z \to \mathbb{G}_m$, $i : Z \to X$ and $j : X - Z \to X$ the corresponding morphisms. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Z/S) \arrow[r, "\partial_{X,Z}"] \arrow[dr, "G(i)"'] & M^{BM}(X-Z/S)[1] \arrow[r, "\psi(f)"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & M^{BM}(X-Z/S)(1)[2]. \arrow[dl, "j_*"] \\ & M^{BM}(X/S)(1)[2] & \end{tikzcd}$$

Proof. We use the same strategy as in [Déglise4, Proposition 2.6.5]. Without loss of generality, suppose that the closed immersion $i : Z \to X$ is of codimension c.

Compare the diagram (1) to the following diagram

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(N_ZX/S)(c)[2c] \arrow[r, "\partial_{D_ZX,N_ZX}"] \arrow[dr, "G(i_1)"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/S)(c)[2c+1] \arrow[r, "\psi(f_1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,X}/S)(c+1)[2c+2]. \arrow[dl, "j_{1*}"] \\ & M^{BM}(D_ZX/S)(c+1)[2c+2] & \end{tikzcd}$$

There is a natural map from the diagram (1) to the diagram (2) given by termwise Gysin morphisms. By Corollary 2.2.21 and Lemma 2.2.22, all the maps in the diagram are compatible with Gysin morphisms (the flatness hypothesis shows that the intersection is transversal). In addition, the closed immersion $X \to D_ZX$ is a section of the structure morphism $D_ZX \to X$. Consequently, to show that the diagram (1) commutes, it is sufficient to show that the diagram (2) commutes.

Now using the same strategy, compare the diagram (2) to the following diagram

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(Z/S) \arrow[r, "\partial_{\mathbb{A}^1_Z,Z}"] \arrow[dr, "G(i_2)"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Z}/S)[1] \arrow[r, "\psi(f_2)"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Z}/S)(1)[2], \arrow[dl, "j_{2*}"] \\ & M^{BM}(\mathbb{A}^1_Z/S)(1)[2] & \end{tikzcd}$$

and we know that it suffices to show the commutativity of the diagram (3), which follows from Lemma 2.2.29 and the fact that the map $\partial_{\mathbb{A}^1_Z,Z}$ is a section of ϕ_Z.

□

Now we are going to apply Proposition 2.2.31 to the framework of the deformation to the normal cone ([Fulton, 5.1]). Consider a closed immersion $i : X \to Y$ of codimension c between regular schemes. Let N_XY be the normal cone of X in Y, and D_XY the deformation space, which is the difference $Bl_{X\times\{0\}}(Y \times \mathbb{A}^1) - Bl_XY$ (*ibid.*, where $\mathbb{P}^1$ is replaced by $\mathbb{A}^1$ here). The scheme D_XY is a scheme over $Y \times \mathbb{A}^1$, which is flat over $\mathbb{A}^1$. The fiber over the point 0 is the normal cone N_XY, and the complementary $D_XY - N_XY$ is isomorphic to $\mathbb{G}_{m,Y}$. We have the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
N_XY \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "p"] & D_XY \arrow[d, "f"] & \mathbb{G}_{m,Y}. \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\
X \arrow[r, "i_1"] & Y &
\end{tikzcd}$$

The maps i_1 and i_2 are closed immersions and j is the complementary open immersion to i_2. Denote by π_2 the projection to the second factor $Y \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$.

Proposition 2.2.32. *The following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(N_XY/Y) \arrow[r, "\partial_{D_XY,N_XY}"] \arrow[d, "p_*=G(p)"] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)[1] \arrow[d, "\phi_Y"] \\
M^{BM}(X/Y)(-c)[-2c] \arrow[r, "G(i_1)"] & \mathbb{1}_Y.
\end{tikzcd}$$

Proof. Apply Proposition 2.2.31 to the quasi-projective Y-scheme D_XY. By Corollary 2.2.21, we obtain the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(N_XY/Y) \arrow[r, "\partial_{D_XY,N_XY}"] \arrow[dr, "G(i_2)"] \arrow[ddr, "G(i_1\circ p)"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)[1] \arrow[r, "\psi(\pi_2)"] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)(1)[2]. \arrow[dl, "j_*"'] \arrow[ddl, "\pi_{1*}"] \\
 & M^{BM}(D_XY/Y)(1)[2] \arrow[d, "G(f)"] & \\
 & \mathbb{1}_Y &
\end{tikzcd}$$

Therefore the proposition follows from the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)[1] \arrow[r, "\psi(\pi_2)"] \arrow[d, "\phi_Y"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)(1)[2], \arrow[dl, "\pi_{1*}"] \\
\mathbb{1}_Y &
\end{tikzcd}$$

which follows from Lemma 2.2.29. □

Definition 2.2.33. *Let $i : X \to Y$ be a closed immersion of codimension c between regular schemes. Let $f : Y' \to Y$ be a morphism such that Y' is a S-scheme, and form the cartesian square*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y. \end{tikzcd}$$

The map $R_f(i) = R_f(G(i)/S) : M^{BM}(X'/S) \to M^{BM}(Y'/S)(c)[2c]$ is called the ***refined Gysin morphism*** *associated to the square Δ.*

Corollary 2.2.34. *Take the setting of Definition 2.2.33. Let N be the normal cone of X in Y, and let N' be the fiber product $N \times_Y Y'$. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(N'/S) \arrow[r, "\partial_{D_Z X, N_Z X}"] \arrow[d, "p_*"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,Y'}/S)[1] \arrow[d, "\phi_{Y'}"] \\ M^{BM}(X'/S)(-c)[-2c] \arrow[r, "R_f(i)"] & M^{BM}(Y'/S). \end{tikzcd}$$

Proof. Apply the R-operation to the diagram in Proposition 2.2.32, then use Lemma 2.2.28 to show that the corresponding maps are the same.

□

Definition 2.2.35. *Let $i : V \to W$ be a closed immersion, and let $C_V W$ be the normal cone of V in W, $D_V W$ be the deformation space. We define the following map, called* ***specialization map****.*

$$sp(C_V W/V) : M^{BM}(C_V W/S) \xrightarrow{\partial_{D_V W, C_V W}} M^{BM}(\mathbb{G}_{m,W}/S)[1] \xrightarrow{\phi_W} M^{BM}(W/S).$$

Corollary 2.2.36. *Take the setting of Definition 2.2.33. Let C' be the normal cone of X' in Y'. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(N'/S) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "p_*"] & M^{BM}(C'/S) \arrow[d, "sp(C'/Y')"] \\ M^{BM}(X'/S)(-c)[-2c] \arrow[r, "R_f(i)"] & M^{BM}(Y'/S). \end{tikzcd}$$

Proof. The result follows from Corollary 2.2.34 and Lemma 2.2.11.

□

2.2.4 Composition laws

Notations. In this section, B is a regular scheme and S a quasi-projective B-scheme.

- For any S-schemes X and Y, we denote by $XY = X \times_S Y$ the fiber product over S, and $X \times Y = X \times_B Y$ the fiber product over the base B.
- If $f : X \to B$ is a quasi-projective morphism with X a regular scheme, denote by d_X the relative dimension of X over B (Definition 2.2.14) and denote by $G(X/B) = G(f) : M^{BM}(X/B) \to \mathbb{1}_B(-d_X)[-2d_X]$ the Gysin morphism associated to f (Definition 2.2.20).
- For any morphism $X \to Y$, denote by $\delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ its diagonal embedding.

Lemma 2.2.37. *Let $p : X \to S$ be a proper morphism, with $\delta : X \to XX$ the diagonal embedding. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(XX/S) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[dr, "\sim", "BC"'] & M^{BM}(X/S) \\ & p_*p^*M^{BM}(X/S). \arrow[u, "ad'_{(p^*,p_*)}"'] \end{tikzcd}$$

Proof. The proof is a simple diagram chase of unit and counit maps, using the fact that diagonal embedding δ is a section of the projection to the second factor $XX \to X$. □

Definition 2.2.38. *Let X be a separated S-scheme of finite type. The* ***Borel-Moore homology*** *of X relative to S is defined as*

$$H^{BM}_{m,n}(X/S) := Hom_{DM_c(S,\Lambda)}(M^{BM}(X/S), \mathbb{1}_S(-n)[-m]).$$

Lemma 2.2.39. *Let X and Y be proper S-schemes that are smooth over B. Then there is an isomorphism*

$$\epsilon_{X,Y} : Hom_{DM_c(S,\Lambda)}(M^{BM}(X/S), M^{BM}(Y/S)(q)[p]) \simeq H^{BM}_{2d_Y-p,d_Y-q}(XY/B).$$

Proof. Denote by $g : Y \to S$ and $h : Y \to B$ the structural morphisms. The isomorphism is constructed in the following way:

$$\begin{aligned} Hom(M^{BM}(X/S), M^{BM}(Y/S)(q)[p]) &= Hom(M^{BM}(X/S), g_*\mathbb{1}_Y(q)[p]) \\ &= Hom(g^*M^{BM}(X/S), \mathbb{1}_Y(q)[p]) \\ &\overset{BC}{\simeq} Hom(M^{BM}(XY/Y), \mathbb{1}_Y(q)[p]) \\ &\overset{P(h)}{\simeq} Hom(M^{BM}(XY/Y), h^!\mathbb{1}_B(q-d_Y)[p-2d_Y]) \\ &= Hom(M^{BM}(XY/B), \mathbb{1}_B(q-d_Y)[p-2d_Y]) \\ &= H^{BM}_{2d_Y-p,d_Y-q}(XY/B), \end{aligned}$$

where the first isomorphism is the inverse of the base change isomorphism for Borel-Moore motives (Definition 2.2.23), and $P(h)$ is the purity isomorphism for the smooth morphism h. □

Lemma 2.2.40. *Take the setting in Lemma 2.2.39. Let α be a map from $M^{BM}(X/S)$ to $M^{BM}(Y/S)$ and denote $\alpha' = \epsilon_{X,Y}(\alpha)$. Then the following diagrams are commutative:*

1.

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(XY/B) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "R(\alpha)"'] & \mathbb{1}_B(-d_Y)[-2d_Y] \\ M^{BM}(YY/B) \arrow[r, "\delta^*_{Y/S}"] & M^{BM}(Y/B). \arrow[u, "G(Y/B)"'] \end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X/S) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p^*"'] & M^{BM}(Y/S) \\ M^{BM}(XY/S) \arrow[r, "R(\delta_{Y/B})"] & M^{BM}(XY \times Y/S)(d_Y)[2d_Y], \arrow[u, "R(\alpha')"'] \end{tikzcd}$$

where $p : XY \to X$ is the canonical projection.

Proof. By definition, α' is the composition

$$M^{BM}(XY/B) \overset{BC}{\simeq} h_!g^*M^{BM}(X/S) \xrightarrow{\alpha} h_!g^*M^{BM}(Y/S)$$
$$\xrightarrow{ad'_{(g^*,g_*)}} M^{BM}(Y/B) \xrightarrow{G(Y/B)} \mathbb{1}_B(-d_Y)[-2d_Y],$$

and the first diagram follows from Lemma 2.2.37. The second diagram is similar. $\square$

Proposition 2.2.41. *Let X, Y and Z be three projective S-schemes that are smooth over B, and let α (respectively β) be a map from $M^{BM}(X/S)$ to $M^{BM}(Y/S)$ (respectively from $M^{BM}(Y/S)$ to $M^{BM}(Z/S)$). We have the following cartesian diagram:*

$$\begin{tikzcd} XYZ \arrow[r] \arrow[d] & XY \times YZ \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\delta_{Y/B}"] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

Denote by $p : XYZ \to XZ$ the canonical projection. Then we have the following equality:

$$\epsilon_{X,Z}(\beta \circ \alpha) = p^* \circ R_f(\delta_{Y/B})(\epsilon_{X,Y}(\alpha) \otimes \epsilon_{Y,Z}(\beta))$$

Proof. Denote respectively $\alpha' = \epsilon_{X,Y}(\alpha)$ and $\beta' = \epsilon_{Y,Z}(\beta)$. We need to show that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(XZ/B) \arrow[r, "p^*"] \arrow[dr, "R(\alpha)"'] & M^{BM}(XYZ/B) \arrow[r, "R(\delta_{Y/B})"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & M^{BM}(XY \times YZ/B)(d_Y)[2d_Y] \arrow[dl, "\alpha'\otimes\mathbb{1}"'] \arrow[d, "\alpha'\otimes\beta'"] \\ & M^{BM}(YZ/B) \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "R(\beta)"'] \arrow[ur, phantom, "(2)"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathbb{1}_B(-d_Z)[-2d_Z] \\ & M^{BM}(ZZ/B) \arrow[r, "\delta^*_Z"] & M^{BM}(Z/B). \arrow[u, "G(Z/B)"'] \end{tikzcd}$$

The triangle (2) is commutative by Lemma 2.2.25, and the square (3) follows from Lemma 2.2.40 (1). For the square (1), we are reduced to the following diagram:

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(XZ/S) \arrow[rr, "R(\alpha)"] \arrow[d, "p^*"'] & & M^{BM}(YZ/S) \\ M^{BM}(XYZ/S) \arrow[r, "R(\delta_{Y/B})"] & M^{BM}(XY \times YZ/S)(d_Y)[2d_Y], \arrow[ur, "R(\alpha')=\alpha'\otimes\mathbb{1}"'] & \end{tikzcd}$$

which is the base change of the diagram in Lemma 2.2.40 (2) by the proper morphism $Z \to S$. Therefore the result follows from the transitivity of the R-operation (Lemma 2.2.27) and the compatibility of R-operation with proper functoriality (Lemma 2.2.28 (1)). $\square$

2.3 Borel-Moore homology and Chow groups

In this chapter, k is a perfect base field, and all k-schemes are supposed to be seperated of finite type. According to this convention, a k-scheme is regular if and only if it is smooth over k, and every k-scheme contains a smooth open subscheme. For any abelian group A, denote by A_Λ the Λ-module $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$.

2.3.1 The niveau spectral sequence

Let S be a scheme and X be a separated S-scheme of finite type. Recall that (Definition 2.2.38) the Borel-Moore homology of X relative to S is defined as

$$H^{BM}_{m,n}(X/S) := Hom_{DM_c(S,\Lambda)}(M^{BM}(X/S), \mathbb{1}_S(-n)[-m]).$$

The aim of this section is to identify Borel-Moore homology with Chow groups, using the classical tool of coniveau spectral sequence. We follow the treatment in [CTHK] and [Déglise1]. Note that all the functorialities of Borel-Moore motives established in Chapter 2.2, including

- proper and smooth functorialities
- localization distinguished triangle
- Künneth formula
- Gysin and refined Gysin morphisms
- specialization maps

become naturally functorialities for the Borel-Moore homology, in a contravariant way. If X is a k-scheme, denote by $M^{BM}(X) = M^{BM}(X/k)$ and $H^{BM}_{p,q}(X) = H^{BM}_{p,q}(X/k)$. The localization distinguished triangle (Lemma 2.2.4 (3)) leads to a long exact sequence of localization on Borel-Moore homology:

Corollary 2.3.1. *Let X be a k-scheme and $i : Z \to X$ be a closed immersion with complementary open immersion $j : X - Z \to X$. There is a long exact sequence*

$$\cdots \to H^{BM}_{p,q}(Z) \xrightarrow{i_*} H^{BM}_{p,q}(X) \xrightarrow{j^*} H^{BM}_{p,q}(X - Z) \xrightarrow{\partial_{X,Z}} H^{BM}_{p-1,q}(Z) \to \cdots .$$

Definition 2.3.2. *Let X be a scheme. A **tower** on X is an increasing chain $\bar{Z} = (Z_i)_i$ of closed subschemes of X of the form*

$$Z_{-1} = \emptyset \subset Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots$$

such that $dim\, Z_i \leqslant i$ and $Z_i = Z_{i+1}$ for sufficiently large i. We denote by Z_∞ the increasing limit (=union) of the chain $\bar{Z}$.

Now we construct the niveau spectral sequence, following the same steps as [CTHK, 1.2] and [Déglise1, Definition 1.6]. Fix a k-scheme X and let $\bar{Z}$ be a tower on X. Applying Lemma 2.3.1 to the closed immersion $Z_{p-1} \to Z_p$, we have a long exact sequence

$$\cdots \to H^{BM}_{m,n}(Z_{p-1}) \to H^{BM}_{m,n}(Z_p) \to H^{BM}_{m,n}(Z_p - Z_{p-1}) \to H^{BM}_{m-1,n}(Z_{p-1}) \to \cdots,$$

which provides an exact couple (D, E), with $D_{p,q}(\bar{Z}, i) = H^{BM}_{p+q,i}(Z_p)$ and $E_{p,q}(\bar{Z}, i) = H^{BM}_{p+q,i}(Z_p - Z_{p-1})$.[4] Such an exact couple gives rise to a spectral sequence (of homological type):

$$E^1_{p,q}(\bar{Z}, i) = H^{BM}_{p+q,i}(Z_p - Z_{p-1})$$

converging to $H^{BM}_{p+q,i}(Z_\infty)$, with respect to the increasing filtration $F_p = Im(H^{BM}_{p+q,i}(Z_p) \to H^{BM}_{p+q,i}(Z_\infty))$. (i.e. $E^\infty_{p,q}(\bar{Z}, i) = F_p/F_{p-1}$).

Now by taking the limit of all towers $\bar{Z}$, we obtain an exact couple, which we denote by $(D_{p,q}(X, i), E_{p,q}(X, i))$, and therefore a spectral sequence of the form

$$E^1_{p,q}(X, i) = \varinjlim H^{BM}_{p+q,i}(Z_p - Z_{p-1}) \Rightarrow H^{BM}_{p+q,i}(X),$$

called respectively the **niveau exact couple** and the **niveau spectral sequence** of X.

Definition 2.3.3. *Let $x \in X$ be a topological point. Define*

$$\hat{H}^{BM}_{n,i}(x) := \varinjlim H^{BM}_{n,i}(\bar{x} \cap U)$$

where the limit is taken over Zariski open neighborhoods U of x in X.[5]

By Remark 2.2.5 (2), the E^1 terms can be identified as

$$E^1_{p,q}(X, i) = \varinjlim H^{BM}_{p+q,i}(Z_p - Z_{p-1}) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \hat{H}^{BM}_{p+q,i}(x)$$

Remark 2.3.4. *Instead of taking limits over all towers, we can restrict to towers that have only two non-empty strata, i.e. towers of the form*

$$\emptyset \subset \emptyset \subset \cdots \subset \emptyset \subset Z_{p-1} \subset Z_p \subset Z_p \cdots,$$

and the resulting spectral sequence is still the same, since the two have the same D^1 and E^1 terms.

4. The index i here means the i-th graded part of the total term.

5. In view of the theory of generic motives, $\hat{H}^{BM}_{n,i}(x)$ is nothing else but the Borel-Moore homology of the generic motive associated to the residue field of x, which only depends on the residue field, see [Déglise1].

The following lemma results from Lemma 2.1.1 and Lemma 2.4.2, which shows that the spectral sequence is bounded:

Lemma 2.3.5. *If x is a d-dimensional point of X, then $\hat{H}^{BM}_{p,q}(x) = 0$ whenever $p < d + q$ or $q > d$.*

Corollary 2.3.6. *The term $E^1_{p,q}(X, i)$ is zero if $q < i$ or $p < i$.*

By the previous corollary, the group $H^{BM}_{2n,n}(X)$ can be identified as the cokernel of the map

$$d^1_{n+1,n} : E^1_{n+1,n}(X, n) \to E^1_{n,n}(X, n).$$

The following lemma, which will be proved in Section 2.4.1, describes the local behavior of basic operations on Borel-Moore homology:

Lemma 2.3.7. *For any irreducible smooth k-scheme X of dimension d, there are isomorphisms $H^{BM}_{2d,d}(X) \simeq \Lambda$ and $H^{BM}_{2d-1,d-1}(X) \simeq \mathcal{O}^*(X)_\Lambda$. Consequently, for any k-scheme X and any d-dimensional point x of X, there are isomorphisms $\hat{H}^{BM}_{2d,d}(x) \simeq \Lambda$ and $\hat{H}^{BM}_{2d-1,d-1}(x) \simeq \kappa(x)^*_\Lambda$, where $\kappa(x)$ is the residue field of x. In addition, these isomorphisms satisfy the following functorial properties:*

1. *For any finite surjective morphism $p : X \to Y$ between irreducible smooth k-schemes both of dimension d, the proper functoriality map $p_* : H^{BM}_{2d,d}(X) \to H^{BM}_{2d,d}(Y)$ on Borel-Moore homology is the multiplication by the degree of field extension $[k(X) : k(Y)]$ as a map $\Lambda \to \Lambda$;*
2. *For any smooth morphism $f : X \to Y$ between irreducible smooth k-schemes, of dimension respectively d and d', the smooth functoriality map $f^* : H^{BM}_{2d',d'}(Y) \to H^{BM}_{2d,d}(X)$ is the identity map $\Lambda \to \Lambda$;*
3. *For any closed immersion $i : Z \to X$ of codimension 1 between irreducible smooth k-schemes (Z is then a divisor of X), with x the generic point of X and d the dimension of X, the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2d-1,d-1}(X-Z) \simeq \mathcal{O}^*(X-Z)_\Lambda \arrow[rr, "\partial_{X,Z}"] \arrow[dr] & & H^{BM}_{2d-2,d-1}(Z) \simeq \Lambda, \\ & \hat{H}^{BM}_{2d-1,d-1}(x) \simeq \kappa(x)^*_\Lambda \arrow[ur, "ord_Z"] & \end{tikzcd}$$

   where $ord_Z : \kappa(x)^*_\Lambda \to \Lambda$ is the order of vanishing along Z, extended to Λ-coefficients ([Fulton, 1.2]).
4. *Let X and Y be irreducible smooth k-schemes of dimension respectively d and d'. Then the tensor product map $H^{BM}_{2d,d}(X) \otimes H^{BM}_{2d',d'}(Y) \to H^{BM}_{2d+2d',d+d'}(X \times Y)$ defined by the Künneth isomorphism (Lemma 2.2.25) sends the class $1 \otimes 1$ to the class $\sum_I 1$, where elements of I are irreducible components of $X \times Y$.*

Therefore we have

$$E^1_{n+1,n}(X,n) = \underset{x\in X_{(n+1)}}{\oplus} \hat{H}^{BM}_{2n+1,n}(x) \simeq \underset{x\in X_{(n+1)}}{\oplus} (\kappa(x))^*_\Lambda$$

and

$$E^1_{n,n}(X,n) = \underset{x\in X_{(n)}}{\oplus} \hat{H}^{BM}_{2n,n}(x) \simeq \underset{x\in X_{(n)}}{\oplus} \Lambda = \mathcal{Z}_n(X)_\Lambda,$$

where $\mathcal{Z}_n(X)_\Lambda$ is the group of n-dimensional algebraic cycles of X with Λ-coefficients. The next objective is to study the map $d^1_{n+1,n}$.

Definition 2.3.8. *Let X be a scheme and $z \in X_{(n+1)}$ and $y \in X_{(n)}$ be two points. Suppose that y is a specialization of z. Let Z be the reduced closure of z in X and $\tilde{Z} \xrightarrow{f} Z$ its normalization. Let $z' = f^{-1}(z)$. Let Z_y be the reduced closure of y in X and for each $t \in f^{-1}(y)$, let Z_t be the reduced closure of t in $\tilde{Z}$. Then f induces a finite morphism $f_t : Z_t \to Z_y$. We define the map*

$$\phi_{t*} : \hat{H}^{BM}_{p,q}(t) \to \hat{H}^{BM}_{p,q}(y)$$

to be the limit of the maps

$$f_{t*|_U} : H^{BM}_{p,q}(Z_t \times_X U) \to H^{BM}_{p,q}(Z_y \times_X U),$$

where U runs through all Zariski open neighborhoods of y in X, and the map

$$\partial_t : \hat{H}^{BM}_{p+1,q}(z') \to \hat{H}^{BM}_{p,q}(t)$$

to be the limit of the maps

$$\partial_{U,Z_t\times_X U} : H^{BM}_{p+1,q}(U - Z_t \times_X U) \to H^{BM}_{p,q}(Z_t \times_X U),$$

where U runs through all Zariski open neighborhoods of t in $\tilde{Z}$.

Composing these two maps, we obtain a map [6]

$$res_t : \hat{H}^{BM}_{p+1,q}(z) \simeq \hat{H}^{BM}_{p+1,q}(z') \overset{\phi_{t*}\circ\partial_t}{\to} \hat{H}^{BM}_{p,q}(y).$$

We define the ***residue map*** *as*

$$res = \sum_{t\in f^{-1}(y)} res_t : \hat{H}^{BM}_{p+1,q}(z) \to \hat{H}^{BM}_{p,q}(y).$$

If y is not a specialization of z, we put $res = 0$ as a map $\hat{H}^{BM}_{p+1,q}(z) \to \hat{H}^{BM}_{p,q}(y)$.

Lemma 2.3.9. *Let $z \in X_{(n+1)}$ and $y \in X_{(n)}$ be two points. Then*

6. The isomorphism is constructed in the following way: there is a natural map $\hat{H}^{BM}_{p,q}(z') \to \hat{H}^{BM}_{p,q}(z)$ defined in a similar way as the map ϕ^*_t above, and it is an isomorphism because f induces an isomorphism between the residue fields of z and z', therefore induces an isomorphism between the associated pro-schemes.

1. *We have a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} E^1_{n+1,n}(X,n) \arrow[r, "d^1_{n+1,n}"] \arrow[d] & E^1_{n,n}(X,n) \\ \hat{H}^{BM}_{2n+1,n}(z) \arrow[r, "res"] & \hat{H}^{BM}_{2n,n}(y). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

2. *If y is a specialization of z, then we have a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} \hat{H}^{BM}_{2n+1,n}(z) \arrow[r, "res"] \arrow[d, "\wr"'] & \hat{H}^{BM}_{2n,n}(y) \arrow[d, "\wr"] \\ \kappa(z)^*_\Lambda \arrow[r, "ord_y"] & \Lambda, \end{tikzcd}$$

where both vertical isomorphisms are deduced from Lemma 2.3.7.

Proof. The proof is adapted from [Déglise1, Proposition 1.16]. The differential map $d^1_{n+1,n}$ in the spectral sequence is the limit of maps

$$H^{BM}_{2n+1,n}(Z_{n+1}-Z_n) \xrightarrow{\partial_{Z_{n+1},Z_n}} H^{BM}_{2n,n}(Z_n) \to H^{BM}_{2n,n}(Z_n-Z_{n-1}).$$

Denote $Z=Z_{n+1}-Z_{n-1}$ and $Y=Z_n-Z_{n-1}$, and we know according to Lemma 2.2.10 that the previous map is equal to the map

$$H^{BM}_{2n+1,n}(Z-Y) \xrightarrow{\partial_{Z,Y}} H^{BM}_{2n,n}(Y).$$

As one takes the limit of towers, one may enlarge Z_n and Z_{n-1}, and thus one may suppose that $Z-Y$ and Y are regular schemes. We suppose $z\in Z$ and $y\in Y$. Denote by Z_z (respectively Y_y) the irreducible component of Z (respectively Y) containing z (respectively y). As the scheme Y is regular, the difference $Y'_y=Y-Y_y$ is the union of other connected components, thus is a closed subscheme of Y. Applying Lemma 2.2.10 again, we know that the composite map

$$H^{BM}_{2n+1,n}(Z-Y) \xrightarrow{\partial_{Z,Y}} H^{BM}_{2n,n}(Y) \to H^{BM}_{2n,n}(Y_y).$$

is equal to the map

$$H^{BM}_{2n+1,n}(Z-Y) \xrightarrow{\partial_{Z-Y'_y,Y_y}} H^{BM}_{2n,n}(Y_y).$$

We now study the limit of this map.

Suppose first that y is not a specialization of z, then by enlarging Z_{n-1}, one may suppose that the scheme-theoretic intersection $Y_y\cap Z_z$ is empty. Therefore we have a cartesian square of closed immersions

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & Y_y \arrow[d] \\ Z_z-Y\cap Z_z \arrow[r] & Z-(Y-Y_y). \end{tikzcd}$$

According to Lemma 2.2.9 (1), the map $\partial_{Z-(Y-Y_y),Y_y}$ is zero, as the proposition asserts.

Now suppose that y is a specialization of z, and we may suppose that the scheme Z is irreducible with generic point z. Let $p : \tilde{Z} \to Z$ be the normalization map, and we know that the scheme $\tilde{Z}$ is regular in codimension 1, so we may suppose that $\tilde{Z}$ is regular. Denote by $\tilde{Y}$ (respectively $\tilde{Y}_y$ and $\tilde{Y}_y'$) the fiber product $Y \times_Z \tilde{Z}$ (respectively $Y_y \times_Z \tilde{Z}$ and $Y_y' \times_Z \tilde{Z}$). We may suppose that $\tilde{Y}_y$ is regular and the two schemes $\tilde{Y}_y$ and $\tilde{Y}_y'$ are disjoint. In addition, we may suppose that $\tilde{Y}_y$ is of pure dimension n, so that all of its components dominates Y_y. Therefore there is a cartesian square

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}_y & \longrightarrow & \tilde{Z} - \tilde{Y}_y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_y & \longrightarrow & Z - Y_y'. \end{array}$$

According to Lemma 2.2.9 (1) there is a commutative square

$$\begin{array}{ccc} H^{BM}_{2n+1,n}(\tilde{Z} - \tilde{Y}) & \xrightarrow{\partial_{\tilde{Z}-\tilde{Y}_y',\tilde{Y}_y}} & H^{BM}_{2n,n}(\tilde{Y}_y) \\ {\scriptstyle p_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ H^{BM}_{2n+1,n}(Z - Y) & \xrightarrow{\partial_{Z-Y_y',Y_y}} & H^{BM}_{2n,n}(Y_y). \end{array}$$

The vertical map in the left is an isomorphism when we take the limit, so we are reduced to study the map $\partial_{\tilde{Z}-\tilde{Y}_y',\tilde{Y}_y}$ in the upper row. The scheme $\tilde{Y}_y$ is not necessarily connected; however, the set of its connected components are in bijection with the set $f^{-1}(y)$, and for any $t \in f^{-1}(y)$ we denote by $\tilde{Y}_t$ the corresponding component, and $\tilde{Y}_t' = \tilde{Y} - \tilde{Y}_t$. For every $t \in f^{-1}(y)$ there is a finite surjective map $p_t : \tilde{Y}_t \to Y_y$ between integral schemes. Then by Lemma 2.2.10 and Remark 2.2.5 (2), the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n+1,n}(\tilde{Z} - \tilde{Y}) \arrow[r, "\partial_{\tilde{Z}-\tilde{Y}_y',\tilde{Y}_y}"] \arrow[dr, "\underset{t}{\oplus}(\partial_{\tilde{Z}-\tilde{Y}_t',\tilde{Y}_t})"'] & H^{BM}_{2n,n}(\tilde{Y}_y) \arrow[r, "p_*"] & H^{BM}_{2n,n}(Y_y), \\ & \bigoplus_{t\in f^{-1}(y)} H^{BM}_{2n,n}(\tilde{Y}_t) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "\sum_t p_{t*}"'] & \end{tikzcd}$$

which proves the first part of the lemma. For the second part, it follows from Lemma 2.3.7 that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n+1,n}(\tilde{Z} - \tilde{Y}) \arrow[rr, "\partial_{\tilde{Z}-\tilde{Y}_t',\tilde{Y}_t}"] \arrow[dr] & & H^{BM}_{2n,n}(\tilde{Y}_t), \\ & \hat{H}^{BM}_{2n+1,n}(z) = \kappa(z)^*_\Lambda \arrow[ur, "ord_{\tilde{Y}_t}"'] & \end{tikzcd}$$

and the result is straightforward.

$\square$

Corollary 2.3.10. *For any separated k-scheme of finite type X, there is a canonical isomorphism*

$$H^{BM}_{2n,n}(X) \simeq CH_n(X)_\Lambda.$$

Proof. Lemma 2.3.9 shows that the map $d^1_{n+1,n} : E^1_{n+1,n}(X,n) \to E^1_{n,n}(X,n)$ is the divisor class map

$$div : \bigoplus_{x \in X_{(n+1)}} (\kappa(x))^*_\Lambda \to \bigoplus_{x \in X_{(n+1)}} \Lambda,$$

whose cokernel is nothing else but the Chow group. □

In the next section we are going to study functorial properties of this isomorphism.

2.3.2 Operations on Chow groups

We now show that the isomorphism in Corollary 2.3.10 is compatible with proper and smooth functorialities and refined Gysin maps on Chow groups. Start with the special case of open immersions:

Lemma 2.3.11. *Let X be an irreducible n-dimensional k-scheme and U a nonempty open subscheme of X. Then the pull-back map $H^{BM}_{2n,n}(X) \to H^{BM}_{2n,n}(U)$ is the identity map $\Lambda \to \Lambda$.*

Proof. We know that $H^{BM}_{2n,n}(X) \simeq E^1_{n,n}(X,n)$ and $H^{BM}_{2n,n}(U) \simeq E^1_{n,n}(U,n)$. It is not difficult to check that the pull-back map agrees with the map $E^1_{n,n}(X,n) \to H^{BM}_{2n,n}(U)$ defined by taking limits of the maps $H^{BM}_{2n,n}(X - Z_{n-1}) \to H^{BM}_{2n,n}((X - Z_{n-1}) \cap U)$. Taking Z_{n-1} large enough we may suppose that $X - Z_{n-1}$ is regular, and the result follows from Lemma 2.3.7 (2). □

Proposition 2.3.12. *For any proper morphism $p : X \to Y$ between separated k-schemes of finite type, the diagram*

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n,n}(X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\wr"] & H^{BM}_{2n,n}(Y) \arrow[d, "\wr"] \\ CH_n(X)_\Lambda \arrow[r, "p_*"] & CH_n(Y)_\Lambda \end{tikzcd}$$

is commutative.

Proof. The push-forward on Chow groups $CH_n(X) \overset{p_*}{\to} CH_n(Y)$ is induced by the push-forward on the group of cycles of dimension n: $\mathcal{Z}_n(X) \overset{p_*}{\to} \mathcal{Z}_n(y)$. In view of Lemma 2.3.9, we construct a push-forward map on the niveau spectral sequence, and we show that the map induced on the group of cycles is the one we need.

Let Z_k be a closed subscheme of X of dimension less than or equal to k. As $p : X \to Y$ is proper, the image $Z'_k = p(Z_k)$ is a closed subscheme of Y of dimension at most k, and the restriction of p is a proper surjective morphism $p_1 : Z_k \to Z'_k$. Let Z'_{k-1} be a closed subscheme of Z'_k which does not contain the image of any k-dimensional point of Z_k by p_1, and let Z_{k-1} be the fiber product $Z'_{k-1} \times_{Z'_k} Z_k$. Then both Z_{k-1} and Z'_{k-1} are of dimension less than or equal to $k-1$, and we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} Z_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z_k \arrow[d, "p_1"] & Z_k - Z_{k-1} \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "q_1"] \\ Z'_{k-1} \arrow[r] & Z'_k & Z'_k - Z'_{k-1}, \arrow[l, "j'"'] \end{tikzcd}$$

where both squares are cartesian. We can complete the couple (Z_k, Z_{k-1}) (respectively the couple (Z'_k, Z'_{k-1})) into a tower $\bar{Z}$ (respectively $\bar{Z}'$), such that the previous relation is satisfied for all k. Then for all r and s, the maps

$$H^{BM}_{r,s}(Z_k) \overset{p_{1*}}{\to} H^{BM}_{r,s}(Z'_k)$$

$$\text{and } H^{BM}_{r,s}(Z_k - Z_{k-1}) \overset{q_{1*}}{\to} H^{BM}_{r,s}(Z'_k - Z'_{k-1})$$

define respectively maps $D^1_{r,s}(\bar{Z}, i) \to D^1_{r,s}(\bar{Z}', i)$ and $E^1_{r,s}(\bar{Z}, i) \to E^1_{r,s}(\bar{Z}', i)$. Using Lemma 2.2.8, we can show that these maps define a morphism of exact couples. On the other hand, we can show that the exact couple obtained by taking limit of towers of the form $\bar{Z}$ is isomorphic to the niveau exact couple of X. Therefore there is a well-defined map from the niveau exact couple of X to that of Y.

Now we focus in particular on the induced maps on the groups $H^{BM}_{2n,n}$. Without loss of generality, we may suppose that Z_n is irreducible, and therefore $Z'_n = p(Z_n)$ is irreducible as well. Then by Lemma 2.2.8 there is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n,n}(Z_n) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "p_{1*}"] & H^{BM}_{2n,n}(Z_n - Z_{n-1}) \arrow[d, "q_{1*}"] \\ H^{BM}_{2n,n}(Z'_n) \arrow[r, "j'^*"] & H^{BM}_{2n,n}(Z'_n - Z'_{n-1}), \end{tikzcd}$$

where by Lemma 2.3.11, the two horizontal maps are both isomorphisms. In consequence, we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n,n}(Z_n - Z_{n-1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "q_{1*}"] & H^{BM}_{2n,n}(Z_n) \arrow[r] \arrow[d, "p_{1*}"] & H^{BM}_{2n,n}(X) \arrow[d, "p_*"] \\ H^{BM}_{2n,n}(Z'_n - Z'_{n-1}) \arrow[r, "\sim"] & H^{BM}_{2n,n}(Z'_n) \arrow[r] & H^{BM}_{2n,n}(Y). \end{tikzcd}$$

By taking limit on the first column, we obtain a map $p_* : E^1_{n,n}(X, n) \to E^1_{n,n}(Y, n)$, which fits in a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} E^1_{n,n}(X, n) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & E^1_{n,n}(Y, n) \arrow[d] \\ H^{BM}_{2n,n}(X) \arrow[r, "p_*"] & H^{BM}_{2n,n}(Y). \end{tikzcd}$$

It remains to compute the map p_* on the first row, which is the limit of the maps q_{1*} : $H^{BM}_{2n,n}(Z_n - Z_{n-1}) \to H^{BM}_{2n,n}(Z'_n - Z'_{n-1})$. If the dimension of $Z'_n = p(Z_n)$ is less than n, then $H^{BM}_{2n,n}(Z'_n - Z'_{n-1}) = 0$ and the map is zero.

Suppose now Z'_n is n-dimensional, then the map q_{1*} is finite and surjective. By enlarging Z'_{n-1}, one may suppose that both $Z_n - Z_{n-1}$ and $Z'_n - Z'_{n-1}$ are regular. Then by Lemma 2.3.7 (1) the map $q_{1*} : H^{BM}_{2n,n}(Z_n - Z_{n-1}) \to H^{BM}_{2n,n}(Z'_n - Z'_{n-1})$ is the multiplication by the degree $[k(Z'_n - Z'_{n-1}) : k(Z_n - Z_{n-1})]$ of the extension between the relevant function fields as a map $\Lambda \to \Lambda$.

In the general case on deduces from the discussion above that the map $E^1_{n,n}(X, n) \to E^1_{n,n}(Y, n)$ is the push-forward map on cycles, which completes the proof. □

Proposition 2.3.13. *For any smooth morphism $f : Y \to X$ of relative dimension d between separated k-schemes of finite type, the diagram*

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n,n}(X) \arrow[r, "f^*"] & H^{BM}_{2n+2d,n+d}(Y) \\ CH_n(X)_\Lambda \arrow[r, "f^*"] \arrow[u, "\wr"] & CH_{n+d}(Y)_\Lambda \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

is commutative, where the map on the second line is the usual pull-back on Chow groups.

Proof. In the same way as for the previous proposition, we start with the construction of a pull-back map on the niveau spectral sequence. Let Z_n be an n-dimensional irreducible closed subscheme of X and Z_{n-1} be a closed subscheme of Z_n of pure dimension $(n - 1)$. As the morphism $f : X \to Y$ is flat of relative dimension d, the scheme-theoretic preimages $f^{-1}(Z_n)$ and $f^{-1}(Z_{n-1})$ are both closed subschemes of X respectively of pure dimension $n + d$ and $n + d - 1$. Therefore in the diagram

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(Z_n) - f^{-1}(Z_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & f^{-1}(Z_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z_n - Z_{n-1} \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

both squares (1) and (2) are cartesian. Applying functoriality to the square (1) and Lemma 2.2.8 to the square (2), we obtain the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2n+2d,n+d}(f^{-1}(Z_n) - f^{-1}(Z_{n-1})) & H^{BM}_{2n+2d,n+d}(f^{-1}(Z_n)) \arrow[l, "(*)"'] \arrow[r] & H^{BM}_{2n+2d,n+d}(Y) \\ H^{BM}_{2n,n}(Z_n - Z_{n-1}) \arrow[u, "(3)"'] & H^{BM}_{2n,n}(Z_n) \arrow[l, "(*)"'] \arrow[r] \arrow[u] & H^{BM}_{2n,n}(X). \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

By Lemma 2.3.11, the two maps marked with $(*)$ are isomorphisms, and therefore by taking the limit of the map of the form (3) with respect to the tower $\bar{Z}$, we obtain a map between the

E^1-terms of the niveau spectral sequence, with a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} E^1_{n+d,n+d}(Y, n+d) \arrow[r] & H^{BM}_{2n+2d,n+d}(Y) \\ E^1_{n,n}(X, n) \arrow[r] \arrow[u] & H^{BM}_{2n,n}(X). \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

Then we only need to study the map (3) for Z_n and Z_{n-1} large enough. One may suppose that both schemes $f^{-1}(Z_n) - f^{-1}(Z_{n-1})$ and $Z_n - Z_{n-1}$ are regular. Then by Lemma 2.3.7 (2), the map $E^1_{n,n}(X, n) \to E^1_{n+d,n+d}(Y, n+d)$ is the diagonal embedding $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{b_0(f^{-1}(Z_n))}$. In other words, for any n-dimensional point x of X, the map f^* sends the class of x in $H^{BM}_{2n,n}(X)$ to the cycle $\sum_{y \in f^{-1}(x)} y$ in $H^{BM}_{2n+2d,n+d}(Y)$. However, since the morphism f is smooth, for any point $y \in f^{-1}(x)$, its Zariski closure $\bar{y}$ in Y is smooth over $\bar{x}$, which is an integral scheme. Therefore the geometric multiplicity ([Fulton, 1.5]) of $\bar{y}$ in Y is 1, and the proposition follows since we have checked that f^* is exactly the pull-back map on cycles. $\square$

We now deal with the specialization map. We will need several lemmas:

Lemma 2.3.14. *Let $Z \to X$ be a closed immersion between irreducible regular schemes, where X is n-dimensional, and let C be the normal cone of Z in X. Then the specialization map $H^{BM}_{2n,n}(X) \overset{sp}{\to} H^{BM}_{2n,n}(C)$ is the identity map $\Lambda \to \Lambda$.*

Proof. By construction, the specialization map factors as $H^{BM}_{2n,n}(X) \to H^{BM}_{2n+1,n}(X \times \mathbb{G}_m) \overset{\partial_{D_Z X,C}}{\longrightarrow} H^{BM}_{2n,n}(C)$. The first map is the canonical inclusion $\Lambda \to \Lambda \oplus \mathcal{O}^*(X)_\Lambda$, which sends the class 1 to $(1, 0)$. By Lemma 2.3.7 (3), the image of $(1, 0)$ by $\partial_{D_Z X,C}$ is the vanishing order of the fundamental parameter of $\mathbb{G}_m$ along C, which equals to 1, and the result follows. $\square$

Lemma 2.3.15. *Let $Z \to X$ be a closed immersion. For any X scheme Y, denote by C_Y the normal cone of $Y \times_X Z$ in Y and D_Y the corresponding deformation space. Let W be an X-scheme, $V \to W$ be a closed immersion and $W \to S$ be a separated morphism of finite type. Then the diagram*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(W-V/S) \arrow[r] & M^{BM}(W/S) \arrow[r] & M^{BM}(V/S) \arrow[r] & M^{BM}(W-V/S)[1] \\ M^{BM}(C_{W-V}/S) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(C_W/S) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(V \times_W C_W) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(C_{W-V}/S)[1] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

is commutative, where all vertical maps are specialization maps and both rows are localization sequences.

Proof. By definition of the specialization map, we break the diagram into the following one:

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(W-V/S) \arrow[r] & M^{BM}(W/S) \arrow[r] & M^{BM}(V/S) \arrow[r] & M^{BM}(W-V/S)[1] \\
M^{BM}(\mathbb{G}_{m,W-V}/S)[1] \arrow[r] \arrow[u, "\phi_{W-V}"] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,W}/S)[1] \arrow[r] \arrow[u, "\phi_W"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,V}/S)[1] \arrow[r] \arrow[u, "\phi_V"'] & M^{BM}(\mathbb{G}_{m,W-V}/S)[2] \arrow[u, "\phi_{W-V}"'] \\
M^{BM}(C_{W-V}/S) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_{D_{W-V},C_{W-V}}"] & M^{BM}(C_W/S) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_{D_W,C_W}"] & M^{BM}(V\times_W C_W) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_{V\times_W D_W, V\times_W C_W}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & M^{BM}(C_{W-V}/S)[1]. \arrow[u, "\partial_{D_{W-V},C_{W-V}}"']
\end{tikzcd}$$

By Lemma 2.2.29, the map ϕ is compatible with basic functorialities, and therefore the three squares on the first row commute. The first two squares on the second row commute by Lemma 2.2.9. Finally the square $(*)$ commutes by applying Lemma 2.2.12 to the diagram

$$\begin{tikzcd}
V\times_W C_W \arrow[r] \arrow[d] & V\times_W D_W \arrow[d] & \mathbb{G}_{m,V} \arrow[l] \arrow[d] \\
C_W \arrow[r] & D_W & \mathbb{G}_{m,W} \arrow[l] \\
C_{W-V} \arrow[r] \arrow[u] & (W-V)\times_W D_W \arrow[u] & \mathbb{G}_{m,W-V}. \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 2.3.16. *Let S be a separated scheme of finite type over a field, and*

$$V \xrightarrow{i} Y \to S$$

be two consecutive closed immersions, with $U = S\backslash Y$ the open complement of Y in S. Suppose that the dimension of S is at most p and the dimension of V is at most $p-1$. Then there exists a closed subscheme W of Y satisfying the following properties:

1. *The boundary map $M^{BM}(Y) \xrightarrow{\partial_{S,Y}} M^{BM}(U)[1]$ factors through $M^{BM}(W)$;*
2. *The proper functoriality map $M^{BM}(Y) \xrightarrow{i^*} M^{BM}(V)$ factors through $M^{BM}(W)$;*
3. *The dimension of W is at most $p-1$.*

Proof. Denote by $\bar{U}$ the closure of U in S. Choose W to be the reduced closed subscheme of Y associated to the union of V and $\bar{U}\cap Y$, and we now show that this choice of W is appropriate.

For the first property, note that $W\cup U = V\cup\bar{U}$ is a closed subset of S, which we endow with the reduced closed subscheme structure. By Lemma 2.2.11, the triangle

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(Y) \arrow[r, "\partial_{S,Y}"] \arrow[d] & M^{BM}(U)[1] \\
M^{BM}(W) \arrow[ur, "\partial_{W\cup U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

commutes, which proves the result.

The second property follows from Lemma 2.2.6 since we have a chain of inclusions of underlying topological spaces $V \subset W \subset Y$.

For the third property, we need to show that both V and $\bar{U} \cap Y$ have dimension at most $p-1$. For V this is the hypothesis. The dimension of $\bar{U} \cap Y$ is at most p, and suppose that it contains a p-dimensional point η. Then η is a generic point of $\bar{U}$ for dimension reasons, and is therefore contained in U, which implies that η is contained in both U and Y, contradiction. As a result, the dimension of W is at most $p-1$, and we are done.

□

Proposition 2.3.17. *Let $i : Z \to X$ be a closed immersion between separated k-schemes of finite type and C be the corresponding normal cone of Z in X. Then the following diagram is commutative*

$$\begin{array}{ccc} H^{BM}_{2n,n}(X) & \xrightarrow{sp} & H^{BM}_{2n,n}(C) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ CH_n(X)_\Lambda & \xrightarrow{sp} & CH_n(C)_\Lambda, \end{array}$$

where the map sp in the lower row is the specialization map on Chow groups ([Fulton, 5.2]).

Proof. First we need to construct a map between niveau spectral sequences. For any X-scheme Y, denote by C_Y the normal cone of $Y \times_X Z$ in Y. Then there is a corresponding specialization map $M^{BM}(C_Y) \to M^{BM}(Y)$ (Definition 2.2.35).

Let $\bar{Z} = (Z_p)$ be a tower of closed subschemes of X with two non-empty strata. Let C'_p be the fiber product $Z_{p-1} \times_{Z_p} C_{Z_p}$, which is a closed subscheme of C_{Z_p}. Then $C_{Z_{p-1}}$ is a closed subcone of C'_p, and $C_{Z_p - Z_{p-1}}$ is the complementary open subscheme of C'_p in C_{Z_p}. By Lemma 2.3.15, where the scheme S is the base field k, we get a commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} M^{BM}(Z_p - Z_{p-1}) & \longrightarrow & M^{BM}(Z_p) & \longrightarrow & M^{BM}(Z_{p-1}) & \longrightarrow & M^{BM}(Z_p - Z_{p-1})[1] \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ M^{BM}(C_{Z_p - Z_{p-1}}) & \longrightarrow & M^{BM}(C_{Z_p}) & \longrightarrow & M^{BM}(C'_p) & \longrightarrow & M^{BM}(C_{Z_p - Z_{p-1}})[1], \end{array}$$

where both rows are localization distinguished triangles, and vertical maps are specialization maps.

We know that if Z_p is purely d-dimensional, then C_{Z_p} is d-dimensional as well ([Fulton, B.6.6]). Therefore in any case the dimension of C_{Z_p} is at most p, and that of C'_p is at most p as well. Applying Lemma 2.3.16 to $V = C_{Z_{p-1}}$, $Y = C'_p$, $S = C_{Z_p}$ and $U = C_{Z_p - Z_{p-1}}$, we get a subscheme W of C'_p, which we denote by C''_p, such that the square (3) above factors as

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(Z_{p-1}) \arrow[rr] & & M^{BM}(Z_p - Z_{p-1})[1] \\
M^{BM}(C_{Z_{p-1}}) \arrow[u, "sp"] & M^{BM}(C''_p) \arrow[l] \arrow[dr] & \\
M^{BM}(C'_p) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[rr] & & M^{BM}(C_{Z_p-Z_{p-1}})[1]. \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

This shows that we can replace $M^{BM}(C'_p)$ by $M^{BM}(C''_p)$ and obtain a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
M^{BM}(Z_p - Z_{p-1}) \arrow[r] & M^{BM}(Z_p) \arrow[r] & M^{BM}(Z_{p-1}) \arrow[r] & M^{BM}(Z_p - Z_{p-1})[1] \\
M^{BM}(C_{Z_p-Z_{p-1}}) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(C_{Z_p}) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(C''_p) \arrow[r] \arrow[u] & M^{BM}(C_{Z_p-Z_{p-1}})[1], \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

with C''_p of dimension at most $p-1$. By Remark 2.3.4, the corresponding maps on cohomology defines a map from the niveau spectral sequence of X to that of C. By Lemma 2.3.14, the induced map on E^2 is the specialization map on Chow groups, and the result follows.

□

Proposition 2.3.18. *Let X' and Y' be as in Definition 2.2.33. Then the following diagram is commutative*

$$\begin{tikzcd}
H^{BM}_{2n,n}(Y') \arrow[r, "R_f(i)"] \arrow[d, "\wr"] & H^{BM}_{2n-2c,n-c}(X') \arrow[d, "\wr"] \\
CH_n(Y')_\Lambda \arrow[r, "R_f(i)"] & CH_{n-c}(X')_\Lambda,
\end{tikzcd}$$

where the map $R_f(i)$ in the lower row is the refined Gysin map on Chow groups ([Fulton, 6.2]).

Proof. Let C' be the normal cone of X' in Y'. By definition, the refined Gysin map on Chow groups is the composite map $CH_n(Y') \xrightarrow{sp} CH_n(C') \xrightarrow{i_*} CH_n(N') \xrightarrow{(\pi'^*)^{-1}} CH_{n-c}(X')$ (since the map $N' \xrightarrow{\pi'} X'$ is a vector bundle, the pull-back map π'^* between Chow groups is an isomorphism by [Fulton, Theorem 3.3(a)]). Therefore it is sufficient to show that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
CH_n(Y')_\Lambda \arrow[r, "sp"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & CH_n(C')_\Lambda \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & CH_n(N')_\Lambda \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & CH_{n-c}(X')_\Lambda \arrow[l, "\pi'^*"'] \arrow[d, "\wr"] \\
H^{BM}_{2n,n}(Y') \arrow[r, "sp"] \arrow[dr, "R_f(i)"'] & H^{BM}_{2n,n}(C') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & H^{BM}_{2n,n}(N') & H^{BM}_{2n-2c,n-c}(X'). \arrow[l, "\pi'^*"'] \\
& H^{BM}_{2n-2c,n-c}(X') \arrow[ur, "\pi'^*"] \arrow[urr, equal] & &
\end{tikzcd}$$

We only need to apply the results already established: indeed the four squares (1), (2), (3) and (4) follow respectively from Proposition 2.3.17, Proposition 2.3.12, Proposition 2.3.13 and Corollary 2.2.36.

Proposition 2.3.19. *Let X and Y be two separated k-schemes of finite type. Then the following diagram is commutative*

$$\begin{tikzcd} H^{BM}_{2m,m}(X) \otimes H^{BM}_{2n,n}(Y) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\wr"] & H^{BM}_{2m+2n,m+n}(X \times Y) \arrow[d, "\wr"] \\ CH_m(X)_\Lambda \otimes CH_n(Y)_\Lambda \arrow[r, "\times"] & CH_{m+n}(X \times Y)_\Lambda, \end{tikzcd}$$

where the map $\times$ in the lower row is the exterior product on Chow groups ([Fulton, 1.10]).

Proof. The proof uses Lemma 2.3.7 (4) and is similar to Proposition 2.3.12. □

2.3.3 Heart of Chow weight structure

Let S be a quasi-projective k-scheme. Consider the two following categories:

– Let $CHM(S, \Lambda)$ be the category of Chow motives over the base S with Λ-coefficients, defined in [Corti-Hanamura, Definition 2.8]. This category is constructed from the category of projective S-schemes that are smooth over k.

– Let $Chow(S, \Lambda)$ be the smallest subcategory of $DM_c(S, \Lambda)$, pseudo-abelian and stable by finite sums, that contains all elements of the form

$$p_!\mathbb{1}_X(r)[2r] = M^{BM}(X/S)(r)[2r],$$

where X is a regular k-scheme endowed with a projective morphism $p : X \to S$.[7]

In the case of Beilinson motives, according to [Bondarko2, Theorem 2.1.1] and [Hébert, Théorème 3.3], $Chow(S, \mathbb{Q})$ is the heart of a canonical weight structure (Chow weight structure) on $DM_{\mathrm{B},c}(S, \mathbb{Q})$.[8] In the case of cdh motives, by [Bondarko-Ivanov, Theorem 2.1.3], for k a base field of characteristic p, there is Chow weight structure on $DM_{cdh,c}(S, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ defined in a similar way, whose heart is $Chow(S, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$.

The aim of this section is to identify the two categories $CHM(S, \Lambda)$ and $Chow(S, \Lambda)$ above. There is a natural map

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : CHM(S, \Lambda) &\to Chow(S, \Lambda) \\ (X, r) &\mapsto M^{BM}(X/S)(r)[2r], \end{aligned}$$

for any projective S-scheme X that is smooth over k. The map $\mathcal{F}$ extends to the whole $CHM(S, \Lambda)$, since both categories are pseudo-abelian and stable by finite sums.

7. Hébert showed that we can replace projective S-schemes by all proper S-schemes ([Hébert, Lemme 3.1]).

8. More generally, this assertion holds if S is separated of finite type over an excellent noetherian separated base scheme of dimension at most two (such a scheme is said to be “reasonable” in [Bondarko2, Definition 1.1.1]).

Theorem 2.3.20. *The map $\mathcal{F}$ is a functor, which is an equivalence between the two categories $CHM(S,\Lambda)$ and $Chow(S,\Lambda)$.*

Proof. First we show that $\mathcal{F}$ is a functor. Let X and Y be projective S-schemes that are smooth over k. Using Lemma 2.2.39 and Corollary 2.3.10, we have an isomorphism

$$\begin{aligned}\sigma_{X,Y}: Hom(M^{BM}(X/S)(r)[2r], M^{BM}(Y/S)(s)[2s]) &\overset{\epsilon_{X,Y}}{\simeq} H^{BM}_{2d_Y+2r-2s,d_Y+r-s}(X\times_S Y)\\ &\simeq CH_{d_Y+r-s}(X\times_S Y)_\Lambda,\end{aligned}$$

which shows that $\mathcal{F}$ induces a bijection on morphisms. It remains to see that $\mathcal{F}$ preserves composition of morphisms. On the one hand, Proposition 2.2.41 shows that $\epsilon_{X,Y}$ gives the desired formal composition law on $CHM(S,\Lambda)$; on the other hand, it follows from Proposition 2.3.12, Proposition 2.3.18 and Proposition 2.3.19 that the corresponding actions on Borel-Moore homology are compatible with the ones on Chow groups. Consequently, $\mathcal{F}$ is a functor which is fully faithful. Since every regular k-scheme is smooth, $\mathcal{F}$ is essentially surjective by the definition of $Chow(S,\Lambda)$, therefore a equivalence. □

2.4 Lemmas

2.4.1 On Lemma 2.3.7

The aim of this section is to show Lemma 2.3.7. In the whole section, k is a perfect field.

Definition 2.4.1. *Let $f: X\to Spec\ (k)$ be a smooth morphism. The* ***(homological) motive*** *of X over k is defined as the object $M(X)=f_!f^!\mathbb{1}_k$ in the category $DM_c(k,\Lambda)$, and the* ***motivic cohomology*** *of X is defined as*

$$H^{p,q}(X)\simeq Hom_{DM_c(k,\Lambda)}(M(X),\mathbb{1}_k(q)[p])$$

Note that Definition 2.4.1 agrees with [Voevodsky1, Definition 2.1.1] by [Cisinski-Déglise1, 16.1.6]. In particular, by [MVW, Theorem 4.1], for any irreducible smooth k-scheme X, there are isomorphisms $H^{0,0}(X)\simeq\Lambda$ and $H^{1,1}(X)\simeq\mathcal{O}^*(X)_\Lambda$.

The purity isomorphism implies that motivic cohomology for smooth k-schemes agrees with Borel-Moore homology:

Lemma 2.4.2. *For any d-dimensional smooth k-scheme X, there are isomorphisms*

$$M(X)\simeq M^{BM}(X)(d)[2d] \text{ and } H^{BM}_{p,q}(X)\simeq H^{2d-p,d-q}(X).$$

As a counterpart of the basic functorialities of Borel-Moore motives (Lemma 2.2.4), the motives have covariant functoriality with respect to all morphisms, contravariant functoriality with respect to projective morphisms, and Gysin triangle ([Déglise2, Definition 2.20]). The corresponding version of Lemma 2.3.7 in terms of motivic cohomology follows from [Déglise2, 3.15]:

Lemma 2.4.3. *1. Let $p : X \to Y$ be a finite surjective morphism between irreducible smooth k-schemes. Then the map $p_* : H^{0,0}(X) \to H^{0,0}(Y)$ on motivic cohomology of degree $(0,0)$ induced by the Gysin morphism is the multiplication by the degree of field extension $[k(X) : k(Y)]$ as a map $\Lambda \to \Lambda$.*

2. *Let $f : X \to Y$ be a morphism between irreducible smooth k-schemes. Then the map $f^* : H^{0,0}(Y) \to H^{0,0}(X)$ induced by functoriality is the identity map $\Lambda \to \Lambda$.*
3. *Let $i : Z \to X$ be a closed immersion of codimension 1 between irreducible smooth k-schemes (i.e. Z is a divisor of X). Denote by x the generic point of X. Then there is a commutative diagram*

$$\begin{tikzcd} H^{1,1}(X-Z) \arrow[rr, "\partial_{X,Z}"] \arrow[dr] & & H^{0,0}(Z)=\Lambda, \\ & \hat{H}^{1,1}(x)=\kappa(x)^*_\Lambda \arrow[ur, "ord_Z"] & \end{tikzcd}$$

   where $ord_Z : \kappa(x)^*_\Lambda \to \Lambda$ is the order of vanishing along Z.
4. *Let X and Y be irreducible smooth k-schemes of dimension respectively d and d'. Then there is a canonical isomorphism $M(X) \otimes M(Y) \simeq M(X \times Y)$ such that the induced map $H^{0,0}(X) \otimes H^{0,0}(Y) \to H^{0,0}(X \times Y)$ sends the class $1 \otimes 1$ to the class $\sum_I 1$, where elements of I are irreducible components of $X \times Y$.*

Therefore in order to prove Lemma 2.3.7 we need to check the compatibility of basic functorialities and the Künneth formula via Lemma 2.4.2. The Künneth formula follows from [Cisinski-Déglise1, 1.1.36], the smooth functoriality follows from the compatibility between purity isomorphisms (Corollary 2.2.19), and by Lemma 2.2.7, it remains to check the proper functoriality for a projective morphism:

Lemma 2.4.4. *Let X and Y be smooth k-schemes, $d = \dim X$ and $p : Y \to X$ be a projective morphism of relative dimension c. Then the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} M^{BM}(X) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "\wr"] & M^{BM}(Y) \arrow[d, "\wr"] \\ M(X)(-d)[-2d] \arrow[r, "p^*"] & M(Y)(-c-d)[-2c-2d]. \end{tikzcd}$$

Proof. A projective morphism is the composition of a closed immersion and the projection of a projective bundle, therefore it is sufficient to discuss these two cases.

Suppose that $i : Z \to X$ is a closed immersion of codimension c between regular schemes. Denote by $f : X \to S$ the structure morphism. According to [Déglise2, Definition 2.20] the Gysin morphism $M(X) \to M(Z)(c)[2c]$ is defined by the composition $M(X) \to M_Z(X) \simeq M(Z)(c)[2c]$, where $M_Z(X)$ is canonically identified with $f_!i_*i^*f^!\mathbb{1}_S$, the first map is induced by the adjunction $1 \xrightarrow{ad(i^*,i_*)} i_*i^*$ and the second map is the purity isomorphism. Therefore we have the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
f_!f^*\mathbb{1}_S \arrow[r, "ad(i^*,i_*)"] \arrow[d, "P(f)^{-1}"', "\wr"] & f_!i_*i^*f^*\mathbb{1}_S \arrow[d, "P(f)^{-1}"', "\wr"] \arrow[dr, "P(f\circ i)^{-1}", "\sim"'] & \\
f_!f^!\mathbb{1}_S(-d_X)[-2d_X] \arrow[r, "ad(i^*,i_*)"] & f_!i_*i^*f^!\mathbb{1}_S(-d_X)[-2d_X] \arrow[r, "P(i)^{-1}", "\sim"'] & f_!i_!i^!f^!\mathbb{1}_S(-d_Z)[-2d_Z],
\end{tikzcd}$$

which is commutative: the square on the left is clearly commutative, and the triangle on the right follows from Lemma 2.2.18.

The projective bundle case is more complicated, and we give here an idea of the proof. By localization sequence, we are reduced to the case of a trivial projective bundle $Y = \mathbb{P}^n_X$. By Künneth formula, we may suppose that $X = k$ is a point. Then we proceed by induction, as in [Déglise6, Theorem 3.2]. Note that the case $n = 1$ follows from the fact that the canonical proper functoriality map $\mathbb{1}_k \to M^{BM}(\mathbb{P}^1)$ is a section of the first Chern class of the canonical bundle $c_1(\mathcal{O}(1)) : M^{BM}(\mathbb{P}^1) \to \mathbb{1}_k$. □

2.4.2 Complements on purity isomorphisms

In this section we work on some additional properties of purity isomorphisms in order to prove some lemmas in Chapter 2.2. Concerning the relative purity isomorphism, we recall the following properties from [Cisinski-Déglise1]:

Recall 2.4.5.
1. *(Definition 1.1.2. and 2.4.20.) For any smooth morphism $f : Y \to X$ of relative dimension d, there is a functor $f_\# : DM_c(Y,\Lambda) \to DM_c(X,\Lambda)$ which is a left adjoint of the functor f^*, such that if f is an open immersion, then $f_\# = f_!$; there is also a functor $\Sigma_f : DM_c(Y,\Lambda) \to DM_c(Y,\Lambda)$ depending only on f, with a canonical isomorphism $f_\# \simeq f_!\Sigma_f$;*
2. *(Corollary 2.4.37. and Definition 2.4.38.) For any $K \in DM_c(Y,\Lambda)$ there is an isomorphism $\Sigma_f(K) \simeq K(d)[2d]$, and for any cartesian square*

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "p"] & X,
\end{tikzcd}$$

where f and g are smooth, there is an isomorphism of functors $\Sigma_g q^* \simeq q^*\Sigma_f$ such that the following diagram of functors is commutative:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_g q^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & q^*(d)[2d]. \\
q^*\Sigma_f \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

3. *(Theorem 2.4.50.) By definition, the relative purity isomorphism is deduced from the composed isomorphism $f_\# \simeq f_!\Sigma_f \simeq f_!(d)[2d]$ by adjunction.*

Proof of Lemma 2.2.8. We need to show that the following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} f_!f^* \arrow[r, "ad_{(p^*,p_*)}"] \arrow[d, "ad_{(q^*,q_*)}"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & p_!p^*f_!f^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & p_!p^*f_\#f^*(-d)[-2d] \arrow[r, "ad'_{(f_\#,f^*)}"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & p_!p^*(-d)[-2d] \\ f_!q_!q^*f^* \arrow[r, "\sim"] & p_!g_!q^*f^* \arrow[r, "\sim"] & p_!g_\#q^*f^*(-d)[-2d] \arrow[r, equal] & p_!g_\#g^*p^*(-d)[-2d]. \arrow[u, "ad'_{(g_\#,g^*)}"'] \end{tikzcd}$$

The squares (1) and (3) follow from a formal compatibility between adjunction pairs. For the square (2), divide the diagram as follows:

$$\begin{tikzcd} g_\#q^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & g_!\Sigma_g q^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & g_!q^*(d)[2d] \arrow[d, equal] \\ p^*f_\# \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "(4)"] & g_!q^*\Sigma_f \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(6)"] & g_!q^*(d)[2d] \arrow[d, "\wr"] \\ & p^*f_!\Sigma_f \arrow[r, "\sim"] & p^*f_!(d)[2d]. \end{tikzcd}$$

The diagrams (4) and (6) are commutative by formal compatibility, and the square (5) comes from Recall 2.4.5 (2). □

Proof of Lemma 2.2.28. The first assertion is a formal compatibility, and by Lemma 2.2.7 the third assertion follows from the two previous ones. Therefore it is sufficient to show the second assertion. Divide the diagram as

$$\begin{tikzcd} q_!\mathbb{1}_{X'}(d)[2d] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & q_\#\mathbb{1}_{X'} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathbb{1}_{Y'} \arrow[d, equal] \\ f^*p_!\mathbb{1}_X(d)[2d] \arrow[r, "\sim"] & f^*p_\#\mathbb{1}_X \arrow[r] & f^*\mathbb{1}_Y. \end{tikzcd}$$

The square on the left follows from the square (2) in the proof of Lemma 2.2.8, and the square on the right follows from adjunction.

Now consider the absolute purity case. Let $i : Z \to X$ be a closed immersion of codimension c between regular schemes. Following [Déglise5, Remark 2.3.3], there is a map $i_*\mathbb{1}_Z \to \mathbb{1}_X(c)[2c]$, which by adjunction induces the absolute purity isomorphism $\mathbb{1}_Z \simeq i^!\mathbb{1}_X(c)[2c]$. The following lemma follows from [Déglise5, Corollary 2.4.4]:

Lemma 2.4.6. *Consider a cartesian square of regular schemes*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X, \end{tikzcd}$$

where i and i' are closed immersions of codimension c and f is transversal to i. Then the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
f^*i_*\mathbb{1}_Z \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & f^*\mathbb{1}_X(c)[2c] \arrow[d, equal] \\
i'_*\mathbb{1}_{Z'} \arrow[r] & \mathbb{1}_{X'}(c)[2c].
\end{tikzcd}$$

Proof of Lemma 2.2.16. First we show that there is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
f_!i'_*g^*(d)[2d] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & f_\# i'_*g^* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & f_\# f^*i_* \arrow[d, "ad'_{(f_\#,f^*)}"] \\
i_*g_!g^*(d)[2d] \arrow[r, "\sim"] & i_*g_\# g^* \arrow[r, "ad'_{(g_\#,g^*)}"] & i_*.
\end{tikzcd}$$

The square on the left is similar to the square (2) in the proof of Lemma 2.2.8 (the intersection is transversal since f is smooth), and the one on the right is a formal compatibility between adjunctions. On the other hand, using Lemma 2.4.6, we have the following big commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
f_!i'_*\mathbb{1}_{Z'} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & f_\# i'_*\mathbb{1}_{Z'}(-d)[-2d] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, "\sim"] & f_\#\mathbb{1}_{X'}(c-d)[2c-2d] \arrow[dr, "\sim"] & \\
i_*g_!\mathbb{1}_{Z'} \arrow[r] & i_*g_\#\mathbb{1}_{Z'}(-d)[-2d] \arrow[dr, "ad'_{(g_\#,g^*)}"] & f_\# f^*i_*\mathbb{1}_Z(-d)[-2d] \arrow[r] \arrow[d, "ad'_{(f_\#,f^*)}"] & f_\# f^*\mathbb{1}_X(c-d)[2c-2d] \arrow[d, "ad'_{(f_\#,f^*)}"] \\
& & i_*\mathbb{1}_Z(-d)[-2d] \arrow[r] & \mathbb{1}_X(c-d)[2c-2d],
\end{tikzcd}$$

which proves the result.

Proof of Lemma 2.2.22. By Lemma 2.2.7 it is sufficient to show the first assertion, and we may assume that $X = S$. From Lemma 2.4.6 we know that the following diagram is commutative:

$$\begin{tikzcd}
p^*i_*\mathbb{1}_Z \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & p^*\mathbb{1}_X(c)[2c] \arrow[d, equal] \\
i'_*\mathbb{1}_{Z'} \arrow[r] & \mathbb{1}_Z(c)[2c].
\end{tikzcd}$$

Applying the functor i_* to the previous diagram, and we obtain the result by a formal computation of adjunctions.

3 Algebraic G-theory in motivic homotopy categories

3.1 Introduction

The study of Algebraic G-theory (or K'-theory) originated from Grothendieck's definition of the group G_0 in [SGA6, Exposé IV Définition 2.2.], which associates to a noetherian scheme X the Grothendieck group of the abelian category of coherent sheaves on X. It was Quillen who first defined higher G-groups for noetherian schemes in [Quillen1, Section 7], in the same way as he defined higher K-groups. He was able to prove many properties of G-theory which he failed to prove for K-theory, including homotopy invariance and localization property. By combining Waldhausen's construction in [Waldhausen] and Grothendieck's idea, Thomason ([Thomason-Trobaugh]) redefined the G-groups for all schemes using derived categories and showed that for noetherian schemes these groups agree with Quillen's G-groups. Thomason's construction improved the functoriality of G-theory, and his definition is widely used together with his reformulation of algebraic K-theory.

Ever since its birth, G-theory has been conceived as a cohomological theory that accompanies K-theory, and the two theories share many properties such as Brown-Gersten property and projective bundle formula. The definition of the two are quite similar as well: in Grothendieck's definition of K_0 of a scheme X, it suffices to replace vector bundles over X by coherent sheaves over X to obtain the definition of G_0. As a consequence, K-theory and G-theory agree over regular noetherian schemes, due to the existence of a finite resolution of any coherent sheaf over a regular scheme by vector bundles ([SGA2, Exposé VIII Lemme 2.4.]). However, G-theory also possesses some properties that K-theory does not have. The following is a list of classical properties of (Thomason's) G-theory, due to Quillen, Nisnevich and Thomason:

Theorem 3.1.1 (Properties of G-theory)**.** *For any scheme X, denote by $G(X)$ Quillen-Thomason's G-theory spectrum ([Thomason-Trobaugh, 3.3.]). Then the following properties hold:*

1. *(contravariance) For any morphism of schemes $f : X \to X'$ of (globally) finite Tor-dimension (also called perfect, see [SGA6, Exposé III Exemple 4.1.1.]), there is a map $f^* : G(X') \to G(X)$. ([Thomason-Trobaugh, 3.14.1.])*
2. *(proper functoriality) For any proper morphism between noetherian schemes $f : X \to X'$ there is a map $f_* : G(X) \to G(X')$. ([Thomason-Trobaugh, 3.16.1.])*
3. *(homotopy invariance) For any noetherian scheme X, the pull-back by the canonical projection induces a homotopy equivalence $G(X) \xrightarrow{p^*} G(X \times \mathbb{A}^1)$. ([Quillen1, Section 7 Proposition 4.1.].)*

4. *(Brown-Gersten property) For any Cartesian diagram of noetherian schemes*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

where p is étale, j an open immersion such that p induces an isomorphism over $X \setminus U$ (i.e. the square is a distinguished Nisnevich square), the square

$$\begin{tikzcd} G(X) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"'] & G(U) \arrow[d] \\ G(Y) \arrow[r] & G(V) \end{tikzcd}$$

is a homotopy pullback square. ([Nisnevich, 4.4.])

5. *(localization) Let X be a noetherian scheme and $i : Z \to X$ a closed immersion with complementary open immersion $j : U \to X$. Then there is a homotopy fiber sequence*

$$G(Z) \xrightarrow{i_*} G(X) \xrightarrow{j^*} G(U).$$

In other words, there is a long exact sequence

$$\cdots \to G_{n+1}(U) \to G_n(Z) \xrightarrow{i_*} G_n(X) \xrightarrow{j^*} G_n(U) \cdots .$$

([Quillen1, Section 7 Proposition 3.2.])

6. *(action by K-theory) For any noetherian scheme X there is a map $K(X) \wedge G(X) \to K(X)$ which makes $G(X)$ a module spectrum and is compatible with the contravariant functoriality. ([Thomason-Trobaugh, 3.15.3.])*

7. *(coincidence with K-theory for regular schemes) For any regular noetherian scheme X, there is a canonical homotopy equivalence $K(X) \simeq G(X)$. ([Thomason-Trobaugh, 3.21.])*

8. *(projective bundle formula) Let X be a noetherian scheme and E be a vector bundle of rank r over X. Denote by $p : \mathbb{P}(E) \to X$ the projection of the projective bundle associated to E and $\alpha \in K_0(\mathbb{P}(E))$ the class of the line bundle $\mathcal{O}(1)$. Then the map*

$$\prod^{r} G(X) \to G(\mathbb{P}(E))$$
$$(x_0, \cdots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{r-1} \alpha^i \cdot p^*(x_i)$$

is a homotopy equivalence. ([Quillen1, Section 7 Proposition 4.3.])

From those properties above, we remark especially that G-theory is a module over K-theory with respect to the ring spectrum structure of the latter, is covariant with respect to proper morphisms and contravariant with respect to morphisms that are geometrically nice enough, and possesses a localization sequence in a simple form as in Theorem 3.1.1 (5). These facts suggest that G-theory should be considered as a *Borel-Moore homology* associated to K-theory seen as a cohomology theory (see also [Bondarko-Déglise], [Déglise5], [Jin2]). The main interest of this paper is concerned with proving such a result in the language of motivic homotopy theory, first in Morel-Voevodsky's $\mathbb{A}^1$-homotopy category of schemes ([Morel-Voevodsky]) and then in the stable homotopy category constructed by Jardine ([Jardine]), by using the six functors formalism established by Ayoub in his thesis ([Ayoub]).

The first problem concerning G-theory in motivic homotopy categories is representability problem, which is already well-studied for Thomason's K-theory: Morel and Voevodsky showed in [Morel-Voevodsky, Theorem 4.3.13.] that over a regular noetherian base scheme S, K-theory is represented in the pointed $\mathbb{A}^1$-homotopy category $\mathbf{H}_\bullet(S)$ by the group completion of the infinite Grassmannian space $\mathbb{Z} \times Gr$; the representability result is promoted to the stable homotopy category $\mathbf{SH}(S)$ in [Riou] and respectively [PPR], where K-theory is represented by a $\mathbb{P}^1$-spectrum $\mathbf{KGL}_S$ constructed from $\mathbb{Z} \times Gr$ in [Voevodsky3].

We will follow the same steps in this paper dealing with G-theory over an arbitrary noetherian base scheme S: in Chapter 3.2 we show the representability of G-theory in $\mathbf{H}_\bullet(S)$ (Corollary 3.2.4); in Chapter 3.3, we imitate Voevodsky's construction to obtain an object $\mathbf{GGL}_S$ in $\mathbf{SH}(S)$ (Corollary 3.3.6), show that $\mathbf{GGL}_S$ is indeed an Ω-spectrum (Proposition 3.3.7), and therefore deduce the representability of G-theory in $\mathbf{SH}(S)$ by $\mathbf{GGL}_S$:

Theorem 3.1.2 (see Corollary 3.3.9)**.** *The spectrum GGL_S represents the G theory in the stable homotopy category $\mathbf{SH}(S)$. In other words, for any smooth S-scheme X, there is a natural isomorphism*

$$Hom_{\mathbf{SH}(S)}(\Sigma^\infty X_+[n], \mathbf{GGL}_S) \simeq G_n(X).$$

In Chapter 3.4, we study functorial behaviors of the spectrum $\mathbf{GGL}_S$. By investigating respectively the case of a closed immersion and that of a smooth morphism, we obtain:

Theorem 3.1.3 (see Corollary 3.4.4)**.** *For any quasi-projective morphism $f : Y \to X$ between noetherian schemes, there is an isomorphism $f^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Y$.*

To conclude, we deduce from Theorem 3.1.1 (7), Theorem 3.1.2 and Theorem 3.1.3 the following:

Corollary 3.1.4. *For any scheme X which is quasi-projective over a regular scheme S, we have an isomorphism $\mathbf{GGL}_X \simeq f^!\mathbf{KGL}_S$.*

With Corollary 3.1.4 we have proved that G-theory is the Borel-Moore theory associated to K-theory.

Remark 3.1.5. *Throughout the paper, we will be repeatedly using the classical properties of G-theory in Theorem 3.1.1 as a main tool.*

3.2 Representability of G-theory

Denote by Sch_0 the category of schemes where morphisms are morphisms of schemes of finite Tor-dimension.

Lemma 3.2.1. *For any scheme S, the category Sm/S of smooth S-schemes is a full subcategory of Sch_0.*

Proof. This is because any S-morphism between smooth S-schemes is l.c.i. ([Fulton, B.7.6.]), therefore of finite Tor-dimension ([SGA6, Exposé VIII Proposition 1.7.]).

□

Definition 3.2.2. *1. For any scheme X, denote by $\mathcal{M}_0(X)$ the complicial biWaldhausen category of pseudo-coherent complexes of $\mathcal{O}_X$-modules with globally bounded cohomology ([Thomason-Trobaugh, Definition 3.3.]). By [Quillen1, Section 7 2.5.], we know that the map $X \mapsto \mathcal{M}_0(X)$ is contravariant with respect to morphisms of finite Tor-dimension, and therefore defines a presheaf of categories (or a 2-pseudofunctor) over Sch_0. By [Vistoli, Theorem 3.45.], there is a strict 2-functor which is equivalent to the 2-pseudofunctor $\mathcal{M}_0$, which we denote by $X \mapsto \mathcal{M}(X)$.* [1]

2. *For any scheme X, denote by $G(X)$ the Waldhausen K-theory space associated to the complicial biWaldhausen category $\mathcal{M}(X)$, which is the zeroth space of the corresponding K-theory spectrum ([Waldhausen, 1.3.], [Thomason-Trobaugh, 1.5.2.]). More precisely, we have*

$$G(X) = \Omega|wS_{\bullet}\mathcal{M}(X)|.$$

3. *By Theorem 3.1.1 (1), the map $X \mapsto G(X)$ is a (strict) presheaf of simplicial sets over Sch_0. Therefore for any scheme S, its restriction to Sm/S defines a pointed motivic space denoted by G_S.*

Following [Blander, Lemma 5.3.], we know that there is a model structure on the category of pointed motivic spaces over S, called *projective model structure*, where fibrant objects are those who are homotopy invariant and who satisfy Brown-Gersten property. By Theorem 3.1.1 (3) and (4) we have

Corollary 3.2.3. *For any noetherian scheme S, G_S is an fibrant object for the projective model structure.*

As a consequence, G_S defines an object in the unstable motivic homotopy category $\mathbf{H}_{\bullet}(S)$ which represents Thomason-Trobaugh G-theory:

Corollary 3.2.4. *For any $X \in Sm/S$ there is a functorial isomorphism:*

$$Hom_{\mathbf{H}_{\bullet}(S)}(S^n \wedge X_+, G_S) \simeq G_n(X).$$

1. In other words, for the functor $\mathcal{M}$ we have an *equality* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ instead of a natural isomorphism.

3.3 Representability in the stable homotopy category

We first introduce the object representing algebraic K-theory by the same procedure as G_S (see also [PPR, Example A.3.4.]):

Definition 3.3.1. *For any scheme X, let $\mathcal{N}(X)$ be the subcategory of $\mathcal{M}(X)$ (see Definition 3.2.2) corresponding to the complicial biWaldhausen category of perfect complexes of globally finite Tor-amplitude ([Thomason-Trobaugh, 3.1.]). Denote by $K(X)$ the Waldhausen K-theory space associated to $\mathcal{N}(X)$. By [Thomason-Trobaugh, 3.14.], the map $X \mapsto K(X)$ is a presheaf of simplicial sets over Sch_0, and for any scheme S, its restriction to Sm/S defines a pointed motivic space denoted by K_S^0.*

We define K_S as a fibrant replacement of K_S^0 for the projective model structure in the category of motivic spaces over S.

In other words there is a trivial cofibration $K_S^0 \to K_S$ and K_S is a fibrant object for the projective model structure. Therefore K_S defines an object in $\mathbf{H}_\bullet(S)$, and the following lemma is straightforward:

Lemma 3.3.2. *For any $X \in Sm/S$, there is a functorial isomorphism*

$$Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, K_S) \simeq K_n(X).$$

In the case where the base scheme is regular, the two objects K_S and G_S are the same:

Lemma 3.3.3. *For any regular scheme S we have $K_S = G_S$.*

Proof. By Theorem 3.1.1 (7) we know that for regular schemes K-theory and G-theory agree, and therefore $K_S^0 = G_S$. By Corollary 3.2.3 the object G_S is already fibrant, and the result follows.

□

The aim of introducing K_S is to define its action over G_S, which follows quickly from Theorem 3.1.1 (6):

Proposition 3.3.4. *For any noetherian scheme S, there is a map $\gamma_S : K_S \wedge G_S \to G_S$ which is compatible with the structure of G-theory spectrum as a module spectrum over K-theory.*

Definition 3.3.5. *We define the map $\sigma_S : \mathbb{P}^1 \wedge G_S \to G_S$ in $\mathbf{H}_\bullet(S)$ as the composition*

$$\sigma_S : \mathbb{P}^1 \wedge G_S \xrightarrow{\beta \wedge 1} K_S \wedge G_S \xrightarrow{\gamma_S} G_S$$

where $\beta : \mathbb{P}^1 \to K_S$ is the Bott class $\beta \in K_0(\mathbb{P}^1)$ corresponding to the class of $[\mathcal{O}(1)] - 1$ ([Riou, Définition IV.1.]). For any separated scheme of finite type S, we define $\mathbf{GGL}_S$ as the $\mathbb{P}^1$-spectrum with $\mathbf{GGL}_{S,n} = G_S$ for all n and suspension map $\sigma_S : \mathbb{P}^1 \wedge G_S \to G_S$ as defined above.

Corollary 3.3.6. *The spectrum $\mathbf{GGL}_S$ is an object in the stable homotopy category $\mathbf{SH}(S)$.*

Proof. By Corollary 3.2.3, the spectrum $\mathbf{GGL}_S$ is degreewise fibrant for the projective model structure, and therefore defines an object in $\mathbf{SH}(S)$.

□

Proposition 3.3.7. *The spectrum $\mathbf{GGL}_S$ is an Ω-spectrum.*

Proof. For any $X \in Sm/S$, we have a map

$$\begin{aligned}\phi(X) : G_n(X) = Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+, G_S) &\to Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+ \wedge \mathbb{P}^1, G_S \wedge \mathbb{P}^1)\\ &\to Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+ \wedge \mathbb{P}^1, G_S).\end{aligned}$$

And we know that the last group $Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+ \wedge \mathbb{P}^1, G_S)$ agrees with the n-th homotopy group of the homotopy fiber of the map $G(X \times \mathbb{P}^1) \to G(X \times \mathbb{A}^1)$, which is exactly $G_n(X)$ by Theorem 3.1.1 (5). In addition, we deduce from the definition that the composite map

$$G_n(X) \xrightarrow{\phi(X)} Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(S^n \wedge X_+ \wedge \mathbb{P}^1, G_S) \to G_n(X \times \mathbb{P}^1)$$

is the multiplication by the Bott class. Therefore the map $\phi(X)$ is an isomorphism by the projective bundle formula for G-theory (Theorem 3.1.1 (8)) and the result follows.

□

Therefore we have immediate consequences:

Corollary 3.3.8. *For any pointed motivic space A over S the adjunction map*

$$Hom_{\mathbf{H}_\bullet(S)}(A, G_S) \to Hom_{\mathbf{SH}(S)}(\Sigma^\infty A, \mathbf{GGL})$$

is an isomorphism.

Corollary 3.3.9. *The spectrum $\mathbf{GGL}_S$ represents the G-theory in the stable homotopy category $\mathbf{SH}(S)$. In other words, for any smooth S-scheme X, there is a natural isomorphism*

$$Hom_{\mathbf{SH}(S)}(\Sigma^\infty X_+[n], \mathbf{GGL}_S) \simeq G_n(X).$$

3.4 Functorial properties of the G-theory spectrum

Proposition 3.4.1. *For any smooth morphism $f : Y \to X$, there is an isomorphism $f^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Y$.*

Proof. Since f is smooth, by Corollary 3.3.9 and [Morel-Voevodsky, Proposition 3.2.9.], for any smooth Y-scheme W we have an isomorphism

$$Hom_{SH(Y)}(\Sigma^\infty W_+[n], f^*\mathbf{GGL}_X) \simeq Hom_{SH(X)}(f_\#(\Sigma^\infty W_+[n]), G_X) \simeq G_n(W).$$

Therefore we have a canonical identification $f^*\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Y$.

On the other hand, by relative purity of f, we have an isomorphism of functors $f^! \simeq f^*(d)[2d]$, where d is the relative dimension of f. By Proposition 3.3.7 we have a Bott periodicity isomorphism

$$\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_X(1)[2]$$

induced by the multiplication by the Bott class. Then we deduce the result by combining the arguments above.

□

In particular, for any open immersion $j : U \to X$, we have an identification $j^*\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_U$. The following proposition explains the gluing information given by Quillen's localization theorem:

Proposition 3.4.2. *Let X be a noetherian scheme and $i : Z \to X$ a closed immersion with complementary open immersion $j : U \to X$. Then $i_*\mathbf{GGL}_Z$ is canonically isomorphic to the homotopy fiber of the canonical map $\mathbf{GGL}_X \to j_*\mathbf{GGL}_U$.*

Proof. For any smooth X-scheme X', denote $Z' = Z \times_X X'$ and $U' = U \times_X X'$. By Corollary 3.3.9 we have

$$Hom_{SH(X)}(\Sigma^\infty X'_+[n], i_*\mathbf{GGL}_Z) = Hom_{SH(Z)}(i^*\Sigma^\infty X'_+[n], \mathbf{GGL}_Z) \simeq G_n(Z'),$$

$$Hom_{SH(X)}(\Sigma^\infty X'_+[n], j_*\mathbf{GGL}_U) = Hom_{SH(U)}(j^*\Sigma^\infty X'_+[n], \mathbf{GGL}_U) \simeq G_n(U').$$

Then the result follows from the localization sequence in Theorem 3.1.1 (5).

□

Corollary 3.4.3. *With the notations in Proposition 3.4.2, there is a canonical isomorphism $i^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Z$.*

Proof. In the category $\mathbf{SH}(S)$ we have a homotopy fiber sequence

$$i_!i^!\mathbf{GGL}_X \to \mathbf{GGL}_X \to j_*j^*\mathbf{GGL}_X$$

([Ayoub, Proposition 1.4.9.]). By Proposition 3.4.2 we obtain an isomorphism $i_!i^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Z$. Then the result follows from the fact that the adjunction map $i^*i_* \to 1$ is an isomorphism ([Ayoub, 1.4.1.]).

□

Corollary 3.4.4. *For any quasi-projective morphism $f : Y \to X$ between noetherian schemes, there is an isomorphism $f^!\mathbf{GGL}_X \simeq \mathbf{GGL}_Y$.*

Proof. The result follows from Proposition 3.4.1 and Corollary 3.4.3 since every quasi-projective morphism factors as a closed immersion followed by a smooth morphism.

□

Remark 3.4.5. *One may expect to extend this isomorphism to the class of all separated morphisms of finite type. We plan to deal with this problem in a further work.*

As a consequence, let $f : Y \to X$ be a projective morphism between noetherian schemes. Since f_* is left adjoint to $f^!$, we have an adjunction map

$$\tau_f : f_*\mathbf{GGL}_Y \simeq f_*f^!\mathbf{GGL}_X \to \mathbf{GGL}_X.$$

For any smooth X-scheme X', let $Y' = Y \times_X X'$. Then by applying the derived global section functor $R\Gamma(X', \cdot)$, τ_f induces a map

$$\tau_f^{X'} : G(Y') \simeq R\Gamma(X', f_*\mathbf{GGL}_Y) \to R\Gamma(X', \mathbf{GGL}_X) = G(X')$$

Proposition 3.4.6. *For any projective morphism f, the map $\tau_f^{X'}$ agrees with the proper functoriality of G-theory in Theorem 3.1.1 (2).*

Proof. We are reduced to two cases: the one of a closed immersion and the one of the projection of a projective bundle.

In the case where $f = i$ is a closed immersion with j complementary open immersion, consider the diagram

$$\begin{tikzcd} G(Y') \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & G(X') \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & G(X' \setminus Y') \arrow[d, equal] \\ R\Gamma(X', i_*\mathbf{GGL}_Y) \arrow[r, "\tau_i^{X'}"] & R\Gamma(X', \mathbf{GGL}_X) \arrow[r] & R\Gamma(X', j_*\mathbf{GGL}_{X\setminus Y}) \end{tikzcd}$$

where both rows are fiber sequences by Proposition 3.4.2. The square (2) commutes by the definition of j^*, and by the five lemma the square (1) commutes as well, which proves the result.

In the case where f is the projection of a projective bundle of rank n, the map τ_f is given by the composition

$$f_*\mathbf{GGL}_Y = f_*f^*\mathbf{GGL}_X \overset{(1)}{\simeq} f_*f^!\mathbf{GGL}_X(-n)[-2n] \overset{(2)}{\simeq} f_*f^!\mathbf{GGL}_X \to \mathbf{GGL}_X$$

where the isomorphism (1) is given by the relative purity isomorphism ([Cisinski-Déglise1, Theorem 2.4.50.]) and the isomorphism (1) is given by the multiplication by the inverse of the Bott class n times (Definition 3.3.5). Then the result follows from a computation of the Thom class of the relative tangent bundle T_f ([Fulton, B.5.8.]) and the projective bundle formula for G-theory (Theorem 3.1.1 (8)).

□

Bibliographie

[André] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, **17**. Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Ayoub] J. Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique*, Astérisque No. 314-315 (2007).

[BBD] A. Beĭlinson, J. Bernstein, P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981), 5-171, Astérisque, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Blander] B. Blander, *Local projective model structures on simplicial presheaves*, K-Theory 24 (2001), no. **3**, 283-301.

[Bloch-Ogus] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181-201 (1975).

[Borel-Moore] A. Borel, J. C. Moore, *Homology theory for locally compact spaces*, Michigan Math. J. **7** (1960) 137-159.

[Bondarko1] M. V. Bondarko, *Weight structures vs. t-structures ; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)*, J. K-Theory 6 (2010), no. 3, 387-504.

[Bondarko2] M. V. Bondarko, *Weights for relative motives ; relation with mixed complexes of sheaves*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, no. 17, 4715-4767.

[Bondarko-Déglise] M. Bondarko, F. Déglise, *Dimensional homotopy t-structures in motivic homotopy theory*, prepublication 2015.

[Bondarko-Ivanov] M. V. Bondarko, M. A. Ivanov, *On Chow weight structures for cdh-motives with integral coefficients*, prepublication 2015.

[Bloch] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher K-theory*, Adv. in Math. **61** No. 3 (1986), 267-304.

[Chow] W.-L. Chow, *On equivalence classes of cycles in an algebraic variety*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 450-479.

[Cisinski-Déglise1] D.-C. Cisinski, F. Déglise, *Triangulated categories of motives*, prepublication 2013.

[Cisinski-Déglise2] D.-C. Cisinski, F. Déglise, *Integral mixed motives in equal characteristic*, Documenta Math. Extra Volume : Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015), 145-194.

[CTHK] J.-L. Colliot-Thélène, R. Hoobler, B. Kahn, *The Bloch-Ogus-Gabber theorem*, in *Algebraic K-theory*, 31-94, Fields Inst. Commun., *16*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Conrad] B. Conrad, *Grothendieck duality and base change*, Lecture Notes in Mathematics **1750**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Corti-Hanamura] A. Corti, M. Hanamura, *Motivic decomposition and intersection Chow groups I*, Duke Math. J., **103** (2000), 459-522.

[Déglise1] F. Déglise, *Coniveau filtration and mixed motives*, in *Regulators*, Contemporary Mathematics, **571** (2012), 51-76.

[Déglise2] F. Déglise, *Around the Gysin triangle I*, in *Regulators*, Contemporary Mathematics, **571** (2012), 77-116.

[Déglise3] F. Déglise, *Modules homotopiques*, Doc. Math. **16** (2011), 411-455.

[Déglise4] F. Déglise, *Motifs génériques*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, **119** (2008), 173-244.

[Déglise5] F. Déglise, *Orientation theory in arithmetic geometry*, prepublication 2014.

[Déglise6] F. Déglise, *Around the Gysin triangle II*, Doc. Math. **13** (2008), 613-675.

[Déglise7] F. Déglise, *Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques.*, thèse de Doctorat, Université Paris VII, Décembre 2002.

[Deligne] P. Deligne, *Théorie de Hodge. III.*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **44** (1974), 5-77.

[Deninger-Murre] C. Deninger, J. Murre, *Motivic decomposition of abelian schemes and the Fourier transform*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **422** (1991), 201-219.

[EGA4] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième Partie).*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **32** (1967).

[Fulton] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Hartshorne] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics **20**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[Hébert] D. Hébert, *Structure de poids à la Bondarko sur les motifs de Beilinson*, Compos. Math. **147** (2011), no. 5, 1447-1462.

[Hirschhorn] P. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, **99**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Grothendieck] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **29** (1966), 95-103.

[Jardine] J. F. Jardine, *Motivic symmetric spectra*, Doc. Math. **5** (2000), 445-553.

[Jin1] F. Jin, *Introduction aux motifs de Voevodsky*, mémoire de magistère à l'Ecole Normale Supérieure, sous la direction de Frédéric Déglise, 2012.

[Jin2] F. Jin, *Borel-Moore motivic homology and weight structure on mixed motives*, Math. Z. **283** (2016), no. 3, 1149-1183.

[Kahn] B. Kahn, *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*, cours spécialisé de Master 2 Mathématiques Fondamentales, Université Pierre et Marie Curie, 2013.

[Levine] M. Levine, *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs, **57**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Levine-Morel] M. Levine, F. Morel, *Algebraic cobordism*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.

[MVW] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, **2**, American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[Morel-Voevodsky] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy of schemes*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **90** (1999), p. 45-143.

[Navarro] A. Navarro, *The Riemann-Roch theorem and Gysin morphism in arithmetic geometry*, thèse à l'Université Complutense de Madrid, 2016.

[Nisnevich] Y. Nisnevich, *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory*, in *Algebraic K-theory : connections with geometry and topology* (Lake Louise, AB, 1987), 241-342, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[Pauksztello] D. Pauksztello, *Compact corigid objects in triangulated categories and co-t-structures*, Cent. Eur. J. Maths. **6** (2008), 25-42.

[PPR] I. Panin, K. Pimenov, O. Röndigs, *On Voevodsky's Algebraic K-Theory Spectrum*, Algebraic topology, 279-330, Abel Symp., **4**, Springer, Berlin, 2009.

[Quillen1] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory : I*, in *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories* (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85-147. Lecture Notes in Math., Vol. **341**, Springer, Berlin 1973.

[Quillen2] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **43**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[Riou] J. Riou, *Opérations sur la K-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas*, Ph. D. thesis at University Paris 7, 2006.

[Rost] M. Rost, *Chow groups with coefficients*, Doc. Math. **1** (1996), No. 16, 319-393.

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, 1962 (SGA 2). With an exposé by Michèle Raynaud. With a preface and edited by Yves Laszlo. Revised reprint of the 1968 French original. Documents Mathématiques (Paris), **4**. Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4). Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270, 305. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972-1973.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966-1967 (SGA 6). With the collaboration of D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **225**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Suslin-Voevodsky1] A. Suslin, V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles* (Banff, AB, 1998), 117-189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Suslin-Voevodsky2] A. Suslin, V. Voevodsky, *Relative cycles and Chow sheaves*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, 10-86, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[Thomason-Trobaugh] R. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, 247-435, Progr. Math., **88**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Vistoli] A. Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in *Fundamental Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, **123**, American Mathematical Society, 2006.

[Voevodsky1] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, 188-238, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[Voevodsky2] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, 87-137, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.

[Voevodsky3] V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory*, Doc. Math., Extra Vol. ICM 1998(I), 417-442.

[Waldhausen] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, in *Algebraic and geometric topology*, (New Brunswick, N.J., 1983), 318-419, Lecture Notes in Math., **1126**, Springer, Berlin, 1985.