Universität Duisburg-Essen | Fakultät für Mathematik

Master-Arbeit

Abstrakte Kurven und fast euklidische Ringe

Jan Carl Dette

Matrikel Nr.: 3004987

24. September 2020

Betreuer: Prof. Dr. Jan Kohlhaase
Zweitprüfer: Prof. Dr. Jochen Heinloth

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Abstrakte Kurven **2**

1.1 Grundlagen 2

1.2 Glatte, projektive Kurven 7

2 Fast euklidische Ringe **14**

2.1 Zwei Konstruktionen von vollständigen Kurven 16

2.2 Die Fargues-Fontaine-Kurve 31

3 Vektorbündel auf Kurven **33**

4 Kurven der Form $\mathrm{Spec}(B) \cup \{\infty\}$ mit $\mathrm{Pic}(B) = 0$ **43**

4.1 Berechnung der Garbenkohomologie 43

4.2 Ein Kriterium zur Euklidizität von B 46

Literaturverzeichnis **51**

Einleitung

Die vorliegende Arbeit basiert hauptsächlich auf den Kapiteln 5.1 bis 5.4 aus [FF18]. Wie dort werden abstrakte Kurven als noethersche, reguläre, zusammenhängende, separierte, eindimensionale Schemata zusammen mit einer Gradfunktion definiert. Diese Gradfunktion induziert eine Gradfunktion auf Divisoren, jedoch im Allgemeinen nicht auf der Picard-Gruppe. Daher werden vollständige, abstrakte Kurven betrachtet, welche dieses Problem nicht haben. Klassische Beispiele für vollständige, abstrakte Kurven sind glatte, projektive, zusammenhängende Kurven über einem Körper. Dies wird in Abschnitt 1.2 bewiesen.

Fast euklidische Ringe sind wie auch euklidische Ring mit einer Gradfunktion ausgestattet. In dieser Arbeit wird eine Konstruktion von vollständigen, abstrakte Kurven aus fast euklidischen Hauptidealringen mit gewissen Eigenschaften vorgestellt. Zudem gibt es eine zweite Konstruktion, um aus einer graduierten Algebra mit gewissen Eigenschaften eine vollständige, abstrakte Kurve zu konstruieren. Als ein Beispiel für diese zweite Konstruktion wird die Konstruktion der Fargues-Fontaine-Kurve aus [FF18] im algebraisch abgeschlossenen Fall skizziert.

In den letzten beiden Kapiteln werden zunächst Vektorbündel für allgemeine abstrakte Kurven untersucht. Danach werden Kurven einer bestimmten Form betrachtet, zu denen sowohl die Fargues-Fontaine-Kurve als auch die projektive Gerade über einem Körper gehört. Dies wird zu einem Kriterium führen, welches gewisse glatte, projektive, zusammenhängende Kurven der klassischen algebraischen Geometrie von der Fargues-Fontaine-Kurve unterscheidet. In der Tat wird gezeigt, dass dieses Kriterium keine vollständigen Kurven im Sinne der klassischen algebraischen Geometrie liefern kann, die zu fast euklidischen, aber nicht euklidischen Ringen führt. Dafür ist die Betrachtung exotischer Kurven wie der Fargues-Fontaine-Kurve notwendig.

1 Abstrakte Kurven

In diesem Kapitel werden wir abstrakte Kurven definieren und aufgrund der Definition allgemeine Eigenschaften von Kurven herleiten. Danach werden wir den Begriff der Vollständigkeit für Kurven einführen und zum Schluss als Beispiel glatte, projektive, zusammenhängende Kurven über Körpern betrachten.

1.1 Grundlagen

Definition 1.1. Eine *(abstrakte) Kurve* ist ein Paar $(X, \deg)$ bestehend aus einem noetherschen, regulären, zusammenhängenden, separierten, eindimensionalen Schema X und einer Funktion $\deg : |X| \to \mathbb{N}_{\geq 1}$, wobei $|X|$ die Menge aller abgeschlossenen Punkte von X bezeichnet.

Bemerkung. Wenn die Gradfunktion bei unserer Betrachtung keine Rolle spielt, so werden wir auch ein Schema X mit den obigen Eigenschaften als *Kurve* bezeichnen.

Wir halten zunächst ein paar Eigenschaften von Kurven fest.

Lemma 1.2. *Ein zusammenhängendes, separiertes Schema X ist genau dann eine Kurve, wenn es eine endliche Überdeckung*

$$X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec}(R_i)$$

mit Dedekindringen R_i und einen Index $i_0 \in I$ gibt, sodass R_{i_0} kein Körper ist. Insbesondere ist jede Kurve normal und integer.

Beweis. Sei X eine Kurve. Dann existiert eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ von offenen, affinen Mengen $X_i = \operatorname{Spec}(R_i)$. Die Kurve X ist noethersch, also insbesondere quasikompakt. Folglich gibt es eine Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i \in J} X_i$ mit einer endlichen Menge $J \subseteq I$. Für $i \in J$ ist der Ring R_i noethersch, da X noethersch ist. Für alle $x \in X_i$ ist $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X_i,x} = (R_i)_{\mathfrak{p}}$ regulär, da X regulär ist, wobei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R_i) = X_i$ dem Punkt x entspricht. Jeder reguläre, lokale Ring ist integer (vgl. [BIV89, Satz 14.5]). Da X zusammenhängend und noethersch ist, folgt, dass X integer ist. Weiter sind für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R_i)$ die lokalen Ringe $(R_i)_{\mathfrak{p}}$ regulär, also faktoriell (vgl. [BIV89, Satz 14.33]), und daher ganzabgeschlossen. Deshalb ist X normal. Da ganzabgeschlossen zu sein eine lokale Eigenschaft ist, ist auch der Ring R_i ganzabgeschlossen. Also bleibt noch zu zeigen, dass R_i höchstens eindimensional ist. Es gilt $1 = \dim(X) = \max\{\dim(X_i) \mid i \in J\}$. Für $i \in J$ ist also

$$\dim(R_i) = \dim(X_i) \leq \dim(X) = 1,$$

wobei Gleichheit für mindestens einen Index angenommen wird. Damit haben wir gezeigt, dass jeder Ring R_i ein noetherscher, ganzabgeschlossener, höchstens eindimensionaler Integritätsbereich, also ein Dedekindring, ist.

Sei nun umgekehrt eine endliche Überdeckung von Dedekindringen R_i gegeben. Dann ist X noethersch, da Dedekindringe noethersch sind. Zudem existiert zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $X_i := \operatorname{Spec}(R_i)$ mit $x \in X_i$ und $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X_i,x} = (R_i)_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{p}$ das zu x zugehörige Primideal in R_i ist. Die Lokalisierung eines Dedekindrings an einem Primideal ist ein diskreter Bewertungsring oder ein Körper, also in beiden Fällen ein regulärer Ring. Folglich ist X regulär. Schließlich ist

$$\dim(X) = \max\{\dim(X_i) \mid i \in I\} = \dim(X_{i_0}) = 1$$

und somit ist X eine Kurve. □

Korollar 1.3. *Die nichtleeren, offenen Mengen einer Kurve sind genau die Komplemente von endlich vielen, abgeschlossenen Punkten. Insbesondere ist jedes nichtleere, offene Unterschema einer Kurve selbst wieder eine Kurve.*

Beweis. Sei X eine Kurve und $X = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec}(R_i)$ eine affine Überdeckung mit Dedekindringen R_i und einer endlichen Indexmenge I. Sei $U \subseteq X$ offen, nichtleer und $Z := X \setminus U$. Dann existieren Ideale $I_i \subseteq R_i$, sodass

$$Z = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec}(R_i/I_i)$$

ist. Dabei ist kein Ideal I_i das Nullideal, da ansonsten $U \cap \operatorname{Spec}(R_i) \subseteq U \cap Z = \emptyset$ wäre, im Widerspruch zur Irreduzibilität von X. Sei $i \in I$ ein Index. Ist $I_i = R_i$, so folgt $\operatorname{Spec}(R_i/I_i) = \emptyset$. Ist andererseits $I_i \neq R_i$, so lässt sich das Ideal I_i in ein endliches Produkt von Primidealen aus R_i zerlegen, da R_i ein Dedekindring ist. Also besteht $\operatorname{Spec}(R_i/I_i)$ aus nur endlich vielen Primidealen. Folglich ist $\operatorname{Spec}(R_i/I_i)$ eine endliche Menge für jedes $i \in I$ und damit ist auch Z endlich.

Sei $U \subseteq X$ ein nichtleeres, offenes Unterschema. Dann ist U noethersch, regulär, separiert und integer, da X diese Eigenschaften besitzt. Da U das Komplement von endlich vielen abgeschlossenen Punkten ist, ist U auch eindimensional und somit eine Kurve. □

Wir haben gesehen, dass es für jeden Punkt x auf einer Kurve eine offene, affine Umgebung $\operatorname{Spec}(R)$ für einen Dedekindring R gibt. Im Allgemeinen ist das zu x gehörige Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ also kein Hauptideal. Jedoch ist es nach dem folgenden Lemma möglich eine offene, affine Umgebung zu wählen, sodass das entsprechende Primideal ein Hauptideal ist.

Lemma 1.4. *Sei X eine Kurve und $x \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt. Dann gibt es eine offene, affine Umgebung $\operatorname{Spec}(R)$ von x mit einem Dedekindring R, sodass das zu x gehörige Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Hauptideal ist.*

Beweis. Nach Lemma 1.2 gibt es einen Dedekindring R, sodass $\operatorname{Spec}(R)$ eine offene, affine Umgebung von x ist. Wir werden ein Element $g \in R$ konstruieren, sodass x in $\operatorname{Spec}(R_g)$ liegt und $\mathfrak{p}R_g$ ein Hauptideal ist.

Die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ ist ein diskreter Bewertungsring, also insbesondere ein Hauptidealring. Sei $f \in R$ ein Erzeuger des Hauptideals $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Da R ein Dedekindring ist, gibt es eine eindeutige Primfaktorzerlegung $fR = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{n_i}$ mit paarweise verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_i \neq 0$ von R und natürlichen Zahlen $n_1, \ldots, n_n$. Wegen $fR_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ ist $f \in \mathfrak{p}$ und folglich auch $\prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{n_i} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt daraus, dass es es einen Index $1 \leq i \leq n$ mit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$ gibt. Nach Umsortierung dürfen wir $i = 1$ annehmen. Da R ein Dedekindring ist, sind die Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ maximal. Demnach ist $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$ für jeden Index $2 \leq i \leq n$ und es existieren Elemente $g_i \in \mathfrak{p}_i$ mit $g_i \notin \mathfrak{p}$. Also ist g_i eine Einheit in $R_\mathfrak{p}$ und folglich ist $\mathfrak{p}_i R_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$. Damit folgt

$$\mathfrak{p}^{n_1} R_\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{n_i} R_\mathfrak{p} = fR_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}.$$

Da $R_\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist, folgt daraus $n_1 = 1$. Ferner ist $g := \prod_{i=2}^n g_i$ von Null verschieden und nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten, da das Ideal $\mathfrak{p}$ prim ist. Zudem ist g in jedem der Primideale $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ enthalten. Damit ist $\operatorname{Spec}(R_g)$ eine Umgebung von x, die keinen der zu $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ gehörigen Punkte enthält. Für $2 \leq i \leq n$ ist die Einheit g^{n_i} des Rings R_g in $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ enthalten und daher gilt $\mathfrak{p}_i^{n_i} R_g = R_g$. Damit folgt $\mathfrak{p}R_g = \prod_{i=1}^n \mathfrak{p}_i^{n_i} R_g = fR_g$. □

Bemerkung. Wir haben in Lemma 1.2 gesehen, dass jede Kurve X integer ist. Also gibt es auf X einen eindeutigen generischen Punkt $\eta \in X$. Im Folgenden bezeichnen wir mit $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ stets den Funktionenkörper von X. Ist $x \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt, so gibt es eine offene, affine Umgebung $U = \operatorname{Spec}(R)$ von x, sodass R ein Dedekindring ist. Folglich ist $\mathcal{O}_{X,x} \cong R_x$ ein diskreter Bewertungsring. Seine zugehörige Bewertung auf $\operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) = K(X)$ bezeichnen wir mit ord_x. Dann ist

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{f \in K(X) \mid \operatorname{ord}_x(f) \geq 0\}$$

und folglich gilt für eine beliebige, offene Menge $U \subseteq X$

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x} = \{f \in K(X) \mid \forall x \in |U| : \ \operatorname{ord}_x(f) \geq 0\}$$

(vgl. [GW10, Prop. 3.29]).

Auf Kurven definieren wir Divisoren in der üblichen Weise.

Definition 1.5. Sei X eine Kurve mit Funktionenkörper $K(X)$. Sei S die Menge der Familien $(U_i, f_i)_{i \in I}$, sodass $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist mit $U_i \neq \emptyset$, $f_i \in K(X)^\times$ und $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ für alle $i, j \in I$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf S, indem wir zwei Familien $(U_i, f_i)_{i \in I}$, $(V_j, g_j)_{j \in J}$ aus S äquivalent setzen, falls $f_i g_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap V_j)^\times$ für alle Indizes $i \in I$, $j \in J$ ist. Ein *Cartier-Divisor* auf X ist dann ein Element der Menge $\operatorname{CaDiv}(X) := S/\sim$. Ein Cartier-Divisor heißt *effektiv*, falls er durch eine Familie $(U_i, f_i)_{i \in I}$ repräsentiert wird, sodass $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i) \setminus \{0\}$ für alle $i \in I$ gilt.

Cartier-Divisoren lassen sich auch durch affine, abgeschlossene Unterschemata beschreiben.

Lemma 1.6. *Sei X eine Kurve. Sei D ein durch eine Familie $(U_i, f_i)_{i\in I}$ gegebener, effektiver Cartier-Divisor. Dann ist*

$$Y := \{x \in X \mid (f_i)_x \notin \mathcal{O}_{X,x}^\times \text{ für ein } i \in I \text{ mit } x \in U_i\}$$

der unterliegende Raum eines affinen, abgeschlossenen Unterschemas von X.

Beweis. Da D effektiv ist, liegen alle Elemente f_i in $\mathcal{O}_X(U_i)$. Für $i, j \in I$ sind daher $f_i\mathcal{O}_{U_i}$, $f_j\mathcal{O}_{U_j}$ Idealgarben und wegen $f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^\times$ gilt

$$f_i\mathcal{O}_{U_i|U_i\cap U_j} = f_j\mathcal{O}_{U_j|U_i\cap U_j}.$$

Folglich verkleben diese zu einer Idealgarbe $\mathcal{I}(D)$ auf X und das zu $\mathcal{I}(D)$ gehörige, abgeschlossene Unterschema hat den unterliegenden Raum

$$Y_{\mathcal{I}} := \{x \in X \mid \mathcal{I}(D)_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Für einen Punkt $x \in X$ gibt es einen Index $i \in I$ mit $x \in U_i$ und die Bedingung $\mathcal{I}(D)_x \neq \mathcal{O}_{X,x}$ ist äquivalent zu $(f_i)_x\mathcal{O}_{U_i,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}$, was genau dann der Fall ist, falls $(f_i)_x$ keine Einheit in $\mathcal{O}_{X,x}$ ist. Daraus folgt, dass $Y_{\mathcal{I}} = Y$ ist. Da Y abgeschlossen ist, ist Y aufgrund von Korollar 1.3 eine endliche Menge. Dann gilt (vgl. das Argument in [GW10, Prop. 5.20])

$$Y = \operatorname{Spec}\left(\prod_{y\in Y} \mathcal{O}_{Y,y}\right) = \operatorname{Spec}\left(\prod_{y\in Y} \mathcal{O}_{X,y}/f_y\right),$$

wobei $f_y := (f_i)_y$ für $y \in Y$ mit $y \in U_i$ ist. □

Wir werden in den späteren Abschnitten hauptsächlich von Weil-Divisoren Gebrauch machen, die wie folgt definiert sind.

Definition 1.7. Sei $(X, \deg)$ eine Kurve mit Funktionenkörper $K(X)$. Ein *Weil-Divisor* ist ein Element der freien, abelschen Gruppe $\operatorname{Div}(X) := \bigoplus_{x\in|X|} \mathbb{Z}$. Ein Element $D \in \operatorname{Div}(X)$ schreiben wir als formale Summe $\sum_{x\in|X|} m_x[x]$, wobei nur endlich viele ganze Zahlen m_x ungleich Null sind. Ein Weil-Divisor $D = \sum_{x\in|X|} m_x[x]$ heißt *effektiv*, falls alle $m_x \geq 0$ sind. In diesem Fall schreiben wir $D \geq 0$. Ist $U \subseteq X$ offen, so definieren wir

$$D_U := \sum_{x\in|U|} m_x[x]$$

für einen Weil-Divisor $D = \sum_{x\in|X|} m_x[x]$. Für ein Element $f \in K(X)^\times$ definieren wir den Weil-Divisor

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{x\in X} \operatorname{ord}_x(f)[x]$$

und nennen einen Weil-Divisor dieser Form *Hauptdivisor*. Die Gradfunktion deg induziert eine Gradfunktion auf Weil-Divisoren, indem wir für einen Weil-Divisor $D = \sum_{x\in|X|} m_x[x]$

$$\deg(D) := \sum_{x\in|X|} m_x \deg(x)$$

setzen. Zwei Weil-Divisoren D, E heißen linear äquivalent zueinander, falls ihre Differenz ein Hauptdivisor ist. Wir erhalten so eine Äquivalenzrelation $\sim$ in $\mathrm{Div}(X)$ und wir setzen $\mathrm{DivCl}(X) := \mathrm{Div}(X)/\sim$.

Bemerkung. Sei X eine Kurve. Dann stimmen Cartier- und Weil-Divisoren auf ihr überein, das heißt $\mathrm{CaDiv}(X) \cong \mathrm{Div}(X)$ (vgl. [GW10, Thm. 11.38]). Wir werden daher in der Folge manchmal keine Unterscheidung zwischen ihnen machen und sie kurz als *Divisoren* bezeichnen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Pic}(X)$ die Picardgruppe von X, das heißt die Gruppe der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X. Da X integer ist, gilt $\mathrm{DivCl}(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$, indem wir einem Weil-Divisor D die Isomorphieklasse des Geradenbündels $\mathcal{O}_X(D)$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K(X)^\times \mid \mathrm{div}(f)_U + D_U \geq 0\} \cup \{0\}$$

für $U \subseteq X$ offen zuordnen (vgl. [GW10, Remark 11.39]).

Aus den Eigenschaften einer Bewertung folgt, dass die Abbildung $\mathrm{div} : K(X)^\times \to \mathrm{Div}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Damit erhalten wir die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)^\times \longrightarrow K(X)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} & \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0 \\ & D & \longmapsto & [\mathcal{O}_X(D)] \end{array}$$

Auch die Abbildung $\deg : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, was direkt aus der Definition folgt.

Im Allgemeinen induziert die Gradfunktion keine wohldefinierte Abbildung $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{DivCl}(X) \to \mathbb{Z}$, da sie auf Hauptdivisoren nicht verschwinden muss. Aus diesem Grund führen wir den Begriff der Vollständigkeit für Kurven ein.

Definition 1.8. Eine Kurve X heißt *vollständig*, falls alle Hauptdivisoren den Grad 0 haben, also falls $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ für alle Elemente $f \in K(X)^\times$ gilt.

Bemerkung. Ist $(X, \deg)$ eine vollständige Kurve, so induziert die Gradfunktion deg eine Funktion $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$, $[\mathcal{O}_X(D)] \mapsto \deg(D)$. Diese ist wohldefiniert, denn ist $[\mathcal{O}_X(D)] = [\mathcal{O}_X(D')]$ für zwei Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$, so sind $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ linear äquivalent. Also gibt es ein Element $f \in K(X)^\times$ mit $D = D' + \mathrm{div}(f)$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \deg([\mathcal{O}_X(D)]) &= \deg(D) \\ &= \deg(D') + \deg(\mathrm{div}(f)) \\ &= \deg([\mathcal{O}_X(D')]) \end{aligned}$$

Lemma 1.9. *Sei X eine vollständige Kurve. Dann ist $\mathcal{O}_X(X)$ ein Unterkörper in $K(X)$ und in diesem algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Lemme 5.1.5] und setzen

$$E := \mathcal{O}_X(X) = \{f \in K(X) \mid \forall x \in |X| :\ \mathrm{ord}_x(f) \geq 0\}.$$

Sei $f \in K(X)^\times$ gegeben. Dann ist

$$f \in E \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) = 0.$$

Die linke Äquivalenz folgt direkt aus der Definition von E. Die eine Richtung der rechten Äquivalenz ist trivial, für die andere betrachten wir

$$0 = \deg(\operatorname{div}(f)) = \deg\left(\sum_{x \in |X|} \operatorname{ord}_x(f)\right) = \sum_{x \in |X|} \underbrace{\operatorname{ord}_x(f)}_{\geq 0} \underbrace{\deg(x)}_{\geq 1}.$$

Folglich ist $\operatorname{ord}_x(f) = 0$ für alle $x \in |X|$ und damit ist auch $\operatorname{div}(f) = 0$. Dann ist $\operatorname{div}(f^{-1}) = -\operatorname{div}(f) = 0$ und $f^{-1} \in E$, womit gezeigt ist, dass E ein Körper ist.

Sei nun $\alpha \in K(X) \setminus E$ algebraisch über E und $m_\alpha(T) = T^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i T^i \in E[T]$ das Minimalpolynom von α. Angenommen für einen abgeschlossenen Punt $x \in |X|$ wäre $\operatorname{ord}_x(\alpha) < 0$, so ist $\operatorname{ord}_x(\alpha^n) < \operatorname{ord}_x(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha^i)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\infty = \operatorname{ord}_x(0) = \operatorname{ord}_x(m_\alpha(\alpha)) &= \operatorname{ord}_x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha^i\right) \\
&= \min\left\{\operatorname{ord}_x(\alpha^n), \operatorname{ord}_x\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \alpha^i\right)\right\} \\
&= n \operatorname{ord}_x(\alpha) \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Angenommen es wäre $\operatorname{ord}_x(\alpha) > 0$, dann ist

$$\operatorname{ord}_x(\alpha^{-1}) = -\operatorname{ord}_x(\alpha) < 0$$

und da auch α^{-1} algebraisch über E ist, führt dies auf analoge Weise zu einem Widerspruch. Also ist $\operatorname{ord}_x(\alpha) = 0$ für alle $x \in |X|$. Folglich ist $\alpha \in E$ und damit ist E algebraisch abgeschlossen in $K(X)$. □

Korollar 1.10. *Eine affine Kurve ist niemals vollständig.*

Beweis. Ist $X = \operatorname{Spec}(R)$ eine affine Kurve, so ist R ein Dedekindring. Da X eindimensional ist, ist auch R eindimensional. Somit ist $\mathcal{O}_X(X) = R$ kein Körper und X ist nicht vollständig. □

Definition 1.11. Sei X eine vollständige Kurve. Dann nennen wir den Körper $\mathcal{O}_X(X)$ den *Grundkörper* von X.

1.2 Glatte, projektive Kurven

Erste Beispiele für vollständige Kurven entstammen der klassischen algebraischen Geometrie. Dazu betrachten wir glatte, projektive Kurven von endlichem Typ über einem Körper k. Diese sind gerade die glatten, projektiven, zusammenhängenden Kurven *im üblichen Sinn*, wobei wir mit solch einer Kurve ein Schema von endlichem Typ über k meinen, sodass alle irreduziblen Komponenten von Dimension 1 sind (vgl. [GW10, Def. 15.14]). Da jedes glatte Schema regulär ist (vgl. [GW10, Cor. 6.32]) und jedes projektive Schema separiert ist (vgl. [Bos13, Kap. 9.5, Thm. 9]), sind glatte, projektive, zusammenhängende Kurven im üblichen Sinn abstrakte Kurven. Diese statten wir im Folgenden stets mit der Gradfunktion

$$\begin{aligned} \deg : |X| &\longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \\ x &\longmapsto [\kappa(x) : k] \end{aligned} \tag{1.1}$$

aus, wobei $\kappa(x)$ den Restklassenkörper des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnet. Um zu zeigen, dass diese Kurven vollständig sind, orientieren wir uns an dem Beweis in [GW10, Thm. 15.32] und gehen dabei wir wie folgt vor. Ein Element $f \in K(X)^\times$ induziert einen Morphismus $X \to \mathbb{P}^1_k$ und mittels diesem werden wir den Grad des Hauptdivisors $\operatorname{div}(f)$ auf den Grad eines bestimmten Divisors in $\operatorname{Div}(\mathbb{P}^1_k)$ zurückführen. Daher untersuchen wir, wie sich der Grad von Divisoren unter dem Pullback f^* verhält. Davor benötigen wir aber noch den Begriff eines *Moduls endlicher Länge*.

Definition 1.12. Sei A ein Ring. Ein A-Modul M heißt *von endlicher Länge*, falls es A-Moduln $M_0, \ldots, M_r$ gibt, welche eine Zerlegungsreihe

$$0 = M_0 \subset \ldots \subset M_r = M$$

von M bilden, das heißt, dass für alle $0 \leq i < r$ der Modul M_{i+1}/M_i einfach ist. Wir bezeichnen dann mit $\lg_A(M) := r$ die Länge der Zerlegungsreihe von M.

Für einen Modul endlicher Länge ist dessen Länge eindeutig bestimmt (vgl. [BIV89, Folg. 4.43]).

Beispiel. Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein diskreter Bewertungsring mit einem uniformisierenden Element $\pi \in A$ sowie zugehöriger Bewertung $\operatorname{ord}_\infty$, so ist für jedes Element $f \in A \setminus \{0\}$ mit $r := \operatorname{ord}_\infty(f)$

$$0 = \pi^r A/fA \subset \pi^{r-1}A/fA \subset \ldots \subset \pi A/fA \subset \pi^0 A/fA = A/fA$$

eine Zerlegungsreihe des A-Moduls A/fA und deshalb gilt $\operatorname{ord}_\infty(f) = \lg_A(A/f)$.

Lemma 1.13 (vgl. [Liu06, Kap.7, Exercise 1.6])**.** *Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und gleichzeitig eine k-Algebra über einem Körper k. Für einen A-Modul M endlicher Länge gilt dann*

$$\dim_k M = \lg_A(M) \dim_k A/\mathfrak{m}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion über $r := \lg_A(M)$. Ist $r = 0$, so folgt $M = 0$ und die Aussage ist trivial. Für $r = 1$ ist M ein einfacher A-Modul. Daher ist $M \cong A/\mathfrak{m}$ (vgl. [BIV89, Feststellung 4.50]) und somit ist

$$\dim_k M = 1 \cdot \dim_k A/\mathfrak{m}.$$

Wir nehmen nun an, dass die Aussage für $r = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt und leiten den Fall $n+1$ daraus ab. Da M die Länge $n+1$ hat, gibt es eine Zerlegungsreihe

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset M_{n+1} = M,$$

sodass M_i ein A-Untermodul von M ist und M_{i+1}/M_i ein einfacher Modul für alle Indizes $0 \leq i \leq n$ ist. Daraus folgt $\lg_A(M_n) = n$. Nach Anwendung der Induktionsannahme erhalten wir

$$\dim_k M_n = \lg_A(M_n) \dim_k A/\mathfrak{m}.$$

Da M/M_n ein einfacher Modul ist, folgt wieder $M/M_n \cong A/\mathfrak{m}$ und daher ist

$$\begin{aligned} \dim_k M &= \dim_k M_n + \dim_k M/M_n \\ &= n \dim_k A/\mathfrak{m} + \dim_k A/\mathfrak{m} = \lg_A(M_n) \dim_k A/\mathfrak{m}. \end{aligned}$$

□

Mithilfe des vorhergehenden Lemmas können wir den Grad eines Divisors über dessen zugehöriges Unterschema berechnen.

Korollar 1.14. *Ist X eine glatte, projektive Kurve von endlichem Typ über einem Körper k und D ein effektiver Cartier-Divisor, dann gilt für das gemäß Lemma 1.6 zugehörige, abgeschlossene Unterschema Y*

$$\dim_k \mathcal{O}_Y(Y) = \deg(D).$$

Beweis. Sei $(U_i, f_i)_{i \in I}$ ein Repräsentant von D. Wir haben schon gesehen, dass dann

$$Y = \operatorname{Spec}\left(\prod_{y \in Y} \mathcal{O}_{X,y}/f_y\right)$$

gilt, wobei $f_y := (f_i)_y$ für $y \in Y$ mit $y \in U_i$ ist. Wir fassen $\mathcal{O}_{X,y}/f_y$ als Modul über dem Ring $\mathcal{O}_{X,y}$ auf. Mit Lemma 1.13 und dem obigen Beispiel folgt dann

$$\begin{aligned} \dim_k \mathcal{O}_Y(Y) &= \sum_{y \in Y} \dim_k \mathcal{O}_{X,y}/f_y \\ &= \sum_{y \in Y} \lg_{\mathcal{O}_{X,y}}(\mathcal{O}_{X,y}/f_y)[\kappa(y) : k] = \deg(D) \end{aligned}$$

□

Einen weiteren Begriff, den wir benötigen werden, ist der eines *endlichen, lokal freien Morphismus*. Wir werden diesen allgemein definieren und einem solchem Morphismus eine Gradfunktion zuordnen. In unserem Fall wird diese jedoch konstant sein.

Definition 1.15. Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt *endlich, lokal frei*, falls er eine der folgenden, äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- f ist affin und $f_*\mathcal{O}_X$ ist über $f^\sharp$ ein endlich erzeugter, lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul.

- Das Urbild $f^{-1}(V)$ ist für jede offene, affine Menge $V = \mathrm{Spec}(A) \subseteq Y$ affin, also $f^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(B)$, und die A-Algebra B ist ein endlich erzeugter, projektiver A-Modul.

Ist $f : X \to Y$ endlich, lokal frei, so ordnen wir f eine Gradfunktion $\deg(f) : Y \to \mathbb{N}$ zu, indem wir für $y \in Y$

$$\deg(f)(y) := \dim_{\kappa(y)}(f_*\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y)$$

setzen. Falls die Gradfunktion von f konstant ist, so schreiben wir $\deg(f)$ für ihren Wert.

Bemerkung. Die Bedingungen in der obigen Definition sind tatsächlich äquivalent und jeder endlich, lokal freie Morphismus ist insbesondere endlich (vgl. [GW10, Prop. 12.19]). Zudem ist die Gradfunktion lokal konstant, das heißt, dass es für jeden Punkt $y \in Y$ eine Umgebung $U \subseteq Y$ gibt mit

$$\deg(f)(y') = \deg(f)(y)$$

für alle $y' \in U$. Denn für einen Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(f_*\mathcal{O}_X)_{|U} \cong \mathcal{O}_U^n$, da $f_*\mathcal{O}_X$ ein endlicher, lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul ist. Für alle $y' \in U$ ist dann $(f_*\mathcal{O}_X)_{y'} \cong \mathcal{O}_{Y,y'}^n$ und somit

$$\begin{aligned}\deg(f)(y') &= \dim_{\kappa(y')} \mathcal{O}_{Y,y'}^n \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y'}} \kappa(y') \\ &= n \\ &= \dim_{\kappa(y)} \mathcal{O}_{Y,y}^n \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y) = \deg(f)(y).\end{aligned}$$

Für integre Schemata, also auch für Kurven, lässt sich der Grad eines Morphismus wie folgt berechnen.

Lemma 1.16. *Sei $f : X \to Y$ ein endlicher, lokal freier Morphismus von integren Schemata. Dann ist seine Gradfunktion konstant und es gilt für alle $y \in Y$:*

$$\deg(f) = \dim_{\kappa(y)} \mathcal{O}_{f^{-1}(y)}(f^{-1}(y)) = [K(X) : K(Y)]$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Grad von f tatsächlich konstant ist. Denn angenommen dies ist nicht so, dann gibt es zwei Punkte $y, y' \in Y$ mit $n := \deg(y) \neq \deg(y')$. Nach der obigen Bemerkung ist $\deg(f)$ lokal konstant. Also können wir jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $U(y) \subseteq Y$ zuordnen, sodass $\deg(f)_{|U(y)}$ konstant ist. Dann ist

$$Y = \bigcup_{\substack{y \in Y \\ \deg(f)(y) = n}} U(y) \;\dot\cup\; \bigcup_{\substack{y \in Y \\ \deg(f)(y) \neq n}} U(y)$$

eine disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer, offener Mengen. Aber da Y irreduzibel und somit zusammenhängend ist, kann es so eine Vereinigung nicht geben und $\deg(f)$ muss konstant sein.

Für die erste Gleichung siehe [GW10, Prop. 12.21].

Da die Gradfunktion konstant ist, reicht es für die zweite Gleichung aus, den generischen Punkt $\eta \in Y$ zu betrachten. Sei $V \subseteq Y$ eine offene, affine Umgebung von η. Dann ist $U := f^{-1}(V) = \mathrm{Spec}(B)$ affin, wobei wir $A \to B$ als endlich frei annehmen dürfen, da f endlich ist. Insbesondere ist $A \to B$ injektiv, das heißt, $B|A$ ist eine endlich freie Ringerweiterung. Sei $b_1, \dots, b_r \in B$ eine A-Basis von B. Wegen $f^{-1}(\eta) \subseteq U$ gilt nun

$$\begin{aligned} f^{-1}(\eta) = f_{|U}^{-1}(\eta) &= U \times_V \kappa(\eta) \\ &= \mathrm{Spec}(B) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(\kappa(\eta)) \\ &= \mathrm{Spec}(B \otimes_A K(Y)), \end{aligned}$$

sodass der mittlere Term in Lemma 1.16 gleich $\dim_{K(Y)}(B \otimes_A K(Y)) = \mathrm{rg}_A(B)$ ist. Andererseits gilt $K(X) = \mathrm{Quot}(B) = B \cdot \mathrm{Quot}(A) = \sum_{i=1}^r b_i K(Y)$, weil $B \cdot \mathrm{Quot}(A)$ ein B enthaltender Unterring von $\mathrm{Quot}(B)$ ist, der endlich über dem Körper $\mathrm{Quot}(A)$ und daher selbst ein Körper ist. Offenbar sind $b_1, \dots, b_r$ auch linear unabhängig über $\mathrm{Quot}(A)$ und daher gilt $[K(X) : K(Y)] = r = \mathrm{rg}_A(B)$. Das beendet den Beweis und zeigt außerdem, dass der natürliche Ringhomomorphismus $B \otimes_A K(Y) \to K(X)$ bijektiv ist. □

Wir betrachten nun den Pullback von Divisoren. Bevor wir jedoch einen allgemeinen Divisor betrachten, schauen wir uns die Situation für einen einzelnen, abgeschlossenen Punkt an.

Lemma 1.17 (vgl. [GW10, Exercise 15.12])**.** *Sei $f : Y \to X$ ein endlicher Morphismus von projektiven, glatten Kurven endlichen Typs über einem Körper k und $x \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt. Wir betrachten den Divisor $[x]$ als Cartier-Divisor. Dann ist $f^*[x]$ der Cartier-Divisor, welcher zu dem abgeschlossenen Unterschema $f^{-1}(x)$ gehört (vgl. Korollar 1.3).*

Beweis. vgl. [GW10, Cor. 11.49] □

Proposition 1.18 (vgl.[GW10, Prop. 15.31])**.** *Sei $f : Y \to X$ ein endlicher Morphismus von glatten, projektiven, zusammenhängenden Kurven endlichen Typs über einem Körper k sowie D ein Divisor auf X. Dann gilt:*

$$\deg(f^* D) = \deg(f) \deg(D)$$

Beweis. Der Pullback ist ein Homomorphismus (vgl. [GW10, S. 312]). Daher ist es ausreichend, die Aussage für $D = [x]$ mit $x \in |X|$ zu zeigen. Nach Lemma 1.17 ist $Z := f^{-1}(x)$ das zu $f^*[x]$ zugehörige, abgeschlossene Unterschema. Nach [Bos13, Kap. 7.2, Cor. 7] ist $Z \cong Y \times_X \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ und daher ist Z ein $\kappa(x)$-Schema. Insbesondere ist $\mathcal{O}_Z(Z)$ ein $\kappa(x)$-Vektorraum und es gilt

$$\begin{aligned} \deg(f^*[x]) &= \dim_k \mathcal{O}_Z(Z) && \text{(Korollar 1.14)} \\ &= [\kappa(x) : k] \dim_{\kappa(x)} \mathcal{O}_Z(Z) \\ &= \deg([x]) \deg(f) && \text{(Lemma 1.16).} \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zu dem Hauptresultat von diesem Abschnitt.

Satz 1.19 (vgl. [FF18, Exemple 5.1.4]). *Sei X eine glatte, projektive, zusammenhängende Kurve von endlichem Typ über einem Körper k augestattet mit der Gradfunktion*

$$\begin{aligned} \deg : |X| &\longrightarrow \mathbb{N}_{\geq 1} \\ x &\longmapsto [\kappa(x) : k]. \end{aligned}$$

Dann ist $(X, \deg)$ eine vollständige Kurve.

Beweis. Sei $f \in K(X)^\times$ ein Element des Funktionenkörpers von X. Wir betrachten zunächst den Fall, dass f algebraisch über k ist. Dann gibt es ein normiertes Polynom $m \in k[T]$ mit $m(f) = 0$. Für einen Punkt $x \in X$ ist dann $m \in k[T] \subseteq \mathcal{O}_{X,x}[T]$ und somit ist f ganz über der k-Algebra $\mathcal{O}_{X,x}$. Die Kurve X ist ein normales Schema und folglich ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ganzabgeschlossen. Somit ist $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, da $\mathcal{O}_{X,x}$ ganzabgeschlossen in $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,x}) = K(X)$ ist. Da f algebraisch über k ist, ist auch f^{-1} algebraisch über k. Wir wenden das obige Argument analog auf f^{-1} an und erhalten so $f^{-1} \in \mathcal{O}_{X,x}$, also $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$. Daher ist $\mathrm{ord}_x(f) = 0$ und da x beliebig war, ist auch

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{x \in |X|} \mathrm{ord}_x(f)[x] = 0.$$

Es bleibt der Fall zu zeigen, dass f transzendent über k ist. Dann induziert f einen Körperhomomorphismus $k(T) \to K(X)$ via $T \mapsto f$. Wir betrachten $k(T)$ als Funktionenkörper der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ und erhalten so einen dominanten Morphismus $\widetilde{f} : X \to \mathbb{P}^1_k$ (vgl. [GW10, Cor. 15.23]). Da $\widetilde{f}$ dominant ist, ist $\widetilde{f}(X)$ dicht in $\mathbb{P}^1_k$. Also ist $\widetilde{f}$ ein surjektiver, endlicher, lokal freier Morphismus (vgl. [GW10, Prop. 15.16]). Wir überdecken

$$\mathbb{P}^1_k = \mathrm{Spec}(k[T]) \cup \mathrm{Spec}(k[T^{-1}])$$

und bezeichnen mit 0 bzw. ∞ den Punkt, der dem Primideal $(T) \in \mathrm{Spec}(k[T])$ bzw. $(T^{-1}) \in \mathrm{Spec}(T^{-1})$ entspricht. Nach Lemma 1.17 ist $\widetilde{f}^*[0]$ assoziiert zu dem abgeschlossenen Unterschema $f^{-1}(0)$. Da $\widetilde{f}$ endlich ist, ist $U := \widetilde{f}^{-1}(\mathrm{Spec}(k[T]))$ affin und daher ist

$$\widetilde{f}^{-1}(0) = V(f\mathcal{O}_X(U)) = \{x \in U \mid \mathrm{ord}_x(f) > 0\}.$$

Also ist $\widetilde{f}^*[0] = \sum_{x \in U} \mathrm{ord}_x(f)[x]$ und durch eine analoge Überlegung erhalten wir $\widetilde{f}^*[\infty] = \sum_{x \in U'} \mathrm{ord}_x(f^{-1})[x]$, wobei $U' := \widetilde{f}^{-1}(\mathrm{Spec}(k[T^{-1}]))$. Offenbar ist $U \cup U' = X$ und wir erhalten daraus

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^*[0] - \widetilde{f}^*[\infty] &= \sum_{x \in U} \mathrm{ord}_x(f)[x] - \sum_{x \in U'} \mathrm{ord}_x(f^{-1})[x] \\ &= \sum_{x \in U} \mathrm{ord}_x(f)[x] + \sum_{x \in U'} \mathrm{ord}_x(f)[x] = \mathrm{div}(f). \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.16 ist $\deg(\widetilde{f}) = [K(X) : K(\mathbb{P}^1_k)]$ und mit Proposition 1.18 folgt daher

$$\begin{aligned} \deg(\mathrm{div}(f)) &= \deg(\widetilde{f}^*[0] - \widetilde{f}^*[\infty]) \\ &= [K(X) : K(\mathbb{P}^1_k)] \deg([0] - [\infty]). \end{aligned}$$

Es reicht daher zu zeigen, dass der Divisor $[0] - [\infty]$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ den Grad 0 hat. Es gilt:

$$\begin{aligned}\kappa(0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k,0}/\mathfrak{m}_0 &= \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k[T]),Tk[T]}/\mathfrak{m}_0\\ &= k[T]_{(T)}/Tk[T]_{(T)}\\ &\cong k[T]/(T) \cong k\end{aligned}$$

Wir erhalten analog $\kappa(\infty) = k$ und damit folgt

$$\deg([0] - [\infty]) = [\kappa(0) : k] - [\kappa(\infty) : k] = 0.$$

□

2 Fast euklidische Ringe

Nachdem wir schon Einiges über Kurven erfahren haben, wenden wir uns nun den fast euklidischen Ringen zu. Dazu definieren wir zunächst die zentralen Begriffe. Danach schauen wir uns an, wie wir aus einem fast euklidischen Hauptidealring B mit gewissen Voraussetzungen eine graduierte Algebra P konstruieren können, sodass $\mathrm{Proj}(P)$ eine vollständige Kurve ist. Als zweite Konstruktion schauen wir uns an, wie wir aus einer graduierten Algebra P mit bestimmten Eigenschaften eine vollständige Kurve konstruieren können. Die so konstruierte Kurve wird dann offene, affine Unterschemata besitzen, welche Spektren von fast euklidischen Hauptidealringen sind. Ein Beispiel für die zweite Konstruktion ist die der Fargues-Fontaine-Kurve $X_{E,F}$ im algebraisch abgeschlossenen Fall, welche wir im Anschluss kurz skizzieren.

Definition 2.1. Sei B ein Ring. Eine *euklidische Gradfunktion* ist eine Funktion $\deg : B \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\deg(a) = -\infty$ genau dann, wenn $a = 0$

ii) Für alle $a, b \in B \setminus \{0\}$ gilt $\deg(a) \leq \deg(ab)$.

Eine euklidische Gradfunktion deg heißt *multiplikativ*, falls

$$\deg(ab) = deg(a) + \deg(b)$$

für alle $a, b \in B \setminus \{0\}$ ist.

Definition 2.2. Ein Integritätsbereich B zusammen mit einer euklidischen Gradfunktion deg heißt *euklidischer Ring*, falls für alle Paare $x, y \in B$ mit $y \neq 0$ Elemente $a, b \in B$ existieren, sodass

$$x = ay + b$$

und $\deg(b) < \deg(y)$ ist.

Definition 2.3. Ein *fast euklidischer Ring* ist ein Integritätsbereich B zusammen mit einer euklidischen Gradfunktion deg mit folgenden Eigenschaften:

i) Alle Elemente von Grad 0 in B sind invertierbar.

ii) Für alle $x, y \in B$ mit $\deg(y) \geq 1$ existieren Elemente $a, b \in B$, sodass $x = ay + b$ und $\deg(b) \leq \deg(y)$ gilt.

Bemerkung. Natürlich ist jeder euklidische Ring $(B, \deg)$ auch fast euklidisch. Denn für $y \in B$ mit $\deg(y) = 0$ ist $y \neq 0$ und daher existieren Elemente $a, b \in B$, sodass

$$1 = ay + b$$

und $\deg(b) < \deg(y) = 0$ ist. Folglich ist $\deg(b) = -\infty$, also $b = 0$ und $a = y^{-1}$.

Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring. Für fast euklidische Ringe gilt die folgende Charakterisierung.

Proposition 2.4. *Sei $(B, \deg)$ ein fast euklidscher Ring mit einer multiplikativen Gradfunktion. Dann ist B genau dann ein Hauptidealring, wenn für alle $x, y \in B \setminus \{0\}$ vom gleichen Grad Elemente $a, b \in B$ existieren, sodass*

- *entweder $-\infty \neq \deg(ax + by) < \deg(x)$*
- *oder $ax + by = 0$ und $b \in B^\times$*

gilt.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Prop. 5.2.2] und betrachten zuerst den Fall, dass B ein Hauptidealring ist. Seien $x, y \in B \setminus \{0\}$ von gleichem Grad. Falls $(x) = (y)$ ist, so existiert ein Element $b \in B$ mit $x = by$. Aus der Multiplikativität der Gradfunktion folgt

$$\deg(b) = \deg(x) - \deg(y) = 0,$$

und somit ist $b \in B^\times$. Also ist die zweite Bedingung erfüllt.

Falls $(x) \neq (y)$ ist, so gibt es Elemente $\delta, x', y' \in B$ mit $x = \delta x'$, $y = \delta y'$ und $\mathrm{ggT}(x', y') = 1$. Aus den Eigenschaften der Gradfunktion folgt $\deg(\delta) \leq \deg(x)$. Angenommen es ist $\deg(\delta) = \deg(x)$, so folgt

$$\deg(x') = \deg(x) - \deg(\delta) = 0$$

und analog ist $\deg(y') = 0$, da $\deg(x) = \deg(y)$. Folglich sind x' und y' Einheiten in B und es gilt

$$(x) = (\delta) = (y)$$

im Widerspruch zur Annahme $(x) \neq (y)$. Also gilt $\deg(\delta) < \deg(x)$. Da B ein Hauptidealring ist, existieren Elemente $a, b \in B$ mit $ax' + by' = 1$ und es folgt

$$ax + by = ax'\delta + by'\delta = (ax' + by')\delta = \delta$$

sowie $-\infty \neq \deg(ax + by) = \deg(\delta) < \deg(x)$, womit die erste Bedingung erfüllt ist.

Wir betrachten nun den umgekehrten Fall. Sei $I \neq (0)$ ein Ideal von B. Wir wählen ein Element $x \in I$ von minimalem Grad unter den Elementen von $I \setminus \{0\}$. Sei ein Element $y \in I \setminus \{0\}$ gegeben. Es reicht zu zeigen, dass $y \in (x)$ ist. Da B fast euklidisch ist, existieren Elemente $a, b \in B$ mit $y = ax + b$ und $\deg(b) \leq \deg(x)$. Wegen $b = y - ax \in I$ folgt aus der Minimalität von $\deg(x)$ entweder $\deg(b) = \deg(x)$ oder $b = 0$. Im zweiten

Fall ist $y = ax \in (x)$. Also betrachten wir den Fall $\deg(b) = \deg(x)$. Aufgrund der Minimalität von $\deg(x)$ kann es keine Elemente $a', b' \in B$ geben, sodass $a'x + b'b \neq 0$ und $\deg(a'x + b'b) < \deg(x)$ ist, da $a'x + b'b$ in I liegt. Nach Voraussetzung an den Ring B existieren also Elemente $a' \in B$ und $b' \in B^\times$, sodass $a'x + b'b = 0$ ist. Daraus folgt $y = ax + b = ax - a'(b')^{-1}x \in (x)$. □

2.1 Zwei Konstruktionen von vollständigen Kurven

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, ausgehend von einem fast euklidischen Hauptidealring B, der kein Körper ist, eine vollständige Kurve zu konstruieren. Wir haben schon gesehen, dass die Kurve $\mathrm{Spec}(B)$ nicht vollständig ist (vgl. Korollar 1.10). Der nächstbeste Versuch ist es, der Kurve $\mathrm{Spec}(B)$ einen Punkt ∞ hinzuzufügen. Sei also $X = \mathrm{Spec}(B) \cup \{\infty\}$ eine Kurve, sodass $\infty \notin \mathrm{Spec}(B)$ ist. Falls die Kurve X vollständig ist, so ist ihr Grundkörper gegeben durch $B \cap \mathcal{O}_{X,\infty}$, wobei wir den Durchschnitt in $K(X)$ bilden. Wie sich die diskrete Bewertung ord_∞ in diesem Fall verhält, beschreibt das folgende Lemma.

Lemma 2.5 (vgl. [FF18, Lemme 5.2.4])**.** *Für einen Integritätsbereich B mit Quotientenkörper K sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- *Es existiert ein diskreter Bewertungsring $A \subseteq K$ mit $\mathrm{Quot}(A) = K$, sodass $A \cap B$ ein Körper ist.*
- *Es gibt eine Bewertung $\mathrm{ord}_\infty : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, mit folgenden Eigenschaften:*
  i) $\mathrm{ord}_\infty(K^\times) = \mathbb{Z}$
  ii) Für alle $b \in B \setminus \{0\}$ gilt $\mathrm{ord}_\infty(b) \leq 0$ und aus $\mathrm{ord}_\infty(b) = 0$ folgt $b \in B^\times$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es einen diskreten Bewertungsring $A \subseteq K$ gibt, sodass $E := A \cap B$ ein Körper ist. Dann ist

$$A \cap (B \setminus \{0\}) = (A \cap B) \setminus \{0\} = (A \cap B)^\times = E^\times.$$

Sei $\mathrm{ord}_\infty : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ die diskrete Bewertung auf K mit Bewertungsring A und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A. Wir nehmen an, dass es ein Element $b \in B \setminus \{0\}$ mit $k := \mathrm{ord}_\infty(b) > 0$ gäbe. Dann ist $b \in \mathfrak{m}^k \subseteq A$ und daher $b \in E^\times \subseteq A^\times$. Also ist b eine Einheit in A, die in dem Ideal $\mathfrak{m}^k$ enthalten ist. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $\mathfrak{m}$ ein Primideal ist. Damit gilt für alle $b \in B \setminus \{0\}$, dass $\mathrm{ord}_\infty(b) \leq 0$ ist. Ist $\mathrm{ord}_\infty(b) = 0$ für $b \in B \setminus \{0\}$, so folgt $b \in \mathfrak{m}^0 = A$ und daher gilt $b \in E^\times \subseteq B^\times$.

Sei umgekehrt eine Bewertung ord_∞ mit den obigen Eigenschaften gegeben. Wir setzen $A := \{x \in K \mid \mathrm{ord}_\infty(x) \geq 0\}$. Dann ist $\mathrm{Quot}(A) = K$, denn für $x \in K$ ist $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$, da $\mathrm{ord}_\infty(x) \geq 0$ oder $\mathrm{ord}_\infty(x^{-1}) \geq 0$ ist. Ferner ist $A \cap B$ ein Körper wegen

$$(A \cap B) \setminus \{0\} = \{x \in B \mid \mathrm{ord}_\infty(x) = 0\} = B^\times.$$

Für $x \in K$ ist $x \in A^\times$ genau dann, wenn $\operatorname{ord}_\infty(x) \geq 0$ und $\operatorname{ord}_\infty(x^{-1}) = -\operatorname{ord}_\infty(x) \geq 0$. Also ist

$$A^\times = \{x \in K \mid \operatorname{ord}_\infty(x) = 0\}.$$

Wir setzen

$$\mathfrak{m} := A \setminus A^\times = \{x \in K \mid \operatorname{ord}_\infty(x) > 0\}.$$

Anhand der Eigenschaften der Bewertung $\operatorname{ord}_\infty$ ist klar, dass $\mathfrak{m}$ ein Ideal ist. Folglich ist A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein beliebiges Ideal. Wir wählen ein Element $a \in \mathfrak{a}$ mit $\operatorname{ord}_\infty(a) = \min\{\operatorname{ord}_\infty(\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{a}\}$. Dann ist $\mathfrak{a} = aA$, denn für $a' \in \mathfrak{a}$ ist $\operatorname{ord}_\infty(a') \geq \operatorname{ord}_\infty(a)$ und somit

$$\operatorname{ord}_\infty(\tfrac{a'}{a}) = \operatorname{ord}_\infty(a') - \operatorname{ord}_\infty(a) \geq 0.$$

Folglich ist $\frac{a'}{a} \in A$ und $a' = a \cdot \frac{a'}{a} \in aA$. Damit folgt, dass A ein Hauptidealring ist. Aus der Surjektivität der Bewertung folgt weiter, dass A kein Körper ist, und daher ist A ein diskreter Bewertungsring. $\square$

Bemerkung. Ist B ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K und existiert ein diskreter Bewertungsring A, wie in Lemma 2.5, so gilt $(A \cap B)^\times = B^\times$. Denn jede Einheit in B hat die Bewertung 0 und ist deshalb auch in A enthalten. Umgekehrt ist $(A \cap B)^\times \subseteq B^\times$.

Wir wissen bereits, dass es für eine Kurve $X = \operatorname{Spec}(B) \cup \{\infty\}$ mit einem Hauptidealring B notwendig ist, dass $B \cap \mathcal{O}_{X,\infty}$ ein Körper ist, damit X vollständig ist. Wie das folgende Lemma zeigt, ist diese Bedingung in diesem Fall sogar hinreichend, um X mit einer Gradfunktion deg auszustatten, sodass $(X, \deg)$ vollständig ist.

Lemma 2.6. *Sei X ein integres, separiertes Schema mit offenem Unterschema $X_0 = \operatorname{Spec}(B)$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

i) $X \setminus X_0 = \{\infty\}$ *besteht aus einem einzelnen Punkt.*

ii) B *ist ein Hauptidealring, aber kein Körper.*

iii) $A := \mathcal{O}_{X,\infty}$ *ist ein diskreter Bewertungsring.*

iv) $E := B \cap A$ *als Unterring von* $K(X)$ *ist ein Körper.*

Dann ist X eine Kurve. Weiter gilt $|X| = |X_0| \cup \{\infty\}$. Bezeichnet $\operatorname{ord}_\infty$ *die diskrete Bewertung auf A und ist $x \in |X_0| = \operatorname{Max}(B)$, so setzen wir* $\deg(x) := -\operatorname{ord}_\infty(p_x)$, *wobei p_x ein beliebiger Erzeuger des Hauptideals x ist. Setzen wir außerdem* $\deg(\infty) := 1$, *so ist* $(X, \deg)$ *eine vollständige Kurve.*

Bevor wir das Lemma beweisen, erinnern wir uns an die Definition eines *Krullrings.*

Definition 2.7 (vgl. [Mat86, §12])**.** Sei R ein Integritätsbereich und $K := \operatorname{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper. Dann heißt R *Krullring*, falls es eine Familie $\mathscr{F} = (R_i)_{i \in I}$ von diskreten Bewertungsringen $R_i \subseteq K$ mit zugehörigen Bewertungen ord_i gibt, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) $R = \bigcap_{i \in I} R_i$

ii) Für jedes $f \in K^\times$ ist $\mathrm{ord}_i(f) = 0$ für fast alle $i \in I$.

Beweis von 2.6. Sei $U := \mathrm{Spec}(S) \subseteq X$ eine offene, affine Umgebung von ∞. Es reicht zu zeigen, dass S ein Dedekindring ist, denn dann ist $X = \mathrm{Spec}(B) \cup \mathrm{Spec}(S)$ eine endliche Überdeckung von Dedekindringen und da B kein Körper ist, folgt $\dim(B) = 1$. Also ist nach Lemma 1.2 das Paar $(X, \deg)$ eine Kurve.

Wir behaupten, dass S ein Krullring ist. Dazu sei η der generische Punkt von X und $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ der Funktionenkörper von X. Da das Schema X integer ist, gilt

$$S = \bigcap_{y \in U} \mathcal{O}_{X,y} = \bigcap_{y \in U \setminus \{\eta\}} \mathcal{O}_{X,y}$$

(vgl. [GW10, Prop. 3.29]). Dabei sind für $y \in U \setminus \{\eta\}$ alle Ringe $\mathcal{O}_{X,y}$ diskrete Bewertungsringe. Denn für $y = \infty$ ist dies Voraussetzung (ii) und für $y \neq \infty$ ist $\mathcal{O}_{X,y} = \mathcal{O}_{X_0,y}$ die Lokalisierung von B an einem von Null verschiedenen Primideal, also ein diskreter Bewertungsring.

Es bleibt daher noch für jedes $f \in K(X)^\times$ zu zeigen, dass $\mathrm{ord}_y(f) = 0$ für fast alle $y \in U \setminus \{\eta\}$ gilt, wobei ord_y die zu $\mathcal{O}_{X,y}$ gehörige diskrete Bewertung auf $K(X)$ bezeichnet. Wegen $U \subseteq X_0 \cup \{\infty\}$ genügt es alle $y \in X_0 \setminus \{\eta\} = \mathrm{Max}(B)$ zu betrachten. Sei $p_y \in B$ ein Erzeuger des zu y gehörigen maximalen Ideals $\mathfrak{m}_y \subseteq B$. Für ein Element $f \in K(X) = \mathrm{Quot}(B)$ betrachten wir seine Primfaktorzerlegung $f = \prod_{n=1}^{r} p_n^{r_n}$ mit $r_1, \ldots, r_r \in \mathbb{Z}$ und untereinander verschiedenen Primelementen $p_1, \ldots, p_r \in B$. Dann gilt

$$\mathrm{ord}_y(f) = \begin{cases} r_n, & \text{falls } (p_n) = (p_y) \text{ für ein } n \in \{1, \ldots, r\} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt die behauptete Endlichkeit und somit ist S ein Krullring.

Als Nächstes zeigen wir, dass S eindimensional ist, denn dann ist S bereits ein Dedekindring (vgl. [Mat86, Theorem 12.5]). Der Ring S ist eindimensional, falls alle von Null verschiedenen Primideale von S maximal sind. Dazu ist äquivalent, dass alle Punkte $y \in U \setminus \{\eta\}$ abgeschlossen in U sind. Falls $y = \infty$ ist, so ist

$$U \setminus \{y\} = U \setminus \{\infty\} = U \cap X_0$$

offen in U und daher ist $\{\infty\}$ abgeschlossen. Wir betrachten daher $y \neq \infty$. Dann gilt $y \in X_0 \setminus \{\eta\} = \mathrm{Max}(B)$ und folglich ist y abgeschlossen in X_0. Wir nehmen an, dass y in X nicht abgeschlossen wäre, und führen dies zu einem Widerspruch. Aus $\overline{\{y\}} \cap X_0 = \{y\}$ und $X = X_0 \cup \{\infty\}$ folgt dann $\overline{\{y\}} = \{y, \infty\}$ in $U = \mathrm{Spec}(S)$. Seien $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$ die Primideale von S zugehörig zu y bzw. ∞. Da wir schon gesehen haben, dass der Punkt ∞ abgeschlossen ist, gilt als Teilmengen von U

$$V(\mathfrak{p}) = \overline{\{y\}} \supseteq \{\infty\} = \overline{\{\infty\}} = V(\mathfrak{m}).$$

Folglich ist $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ in S und wir erhalten

$$A = \mathcal{O}_{X,\infty} \cong S_{\mathfrak{m}} \subseteq S_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}_{X,y} \cong B_{(p_y)}, \tag{$*$}$$

wobei (p_y) das zu y gehörige maximale Ideal mit $p_y \in B \setminus \{0\}$ ist. Mit der Bemerkung nach Lemma 2.5 gilt $B^\times = E^\times$ und, da p_y prim in B ist, folgt $p_y \notin E$. Also ist $p_y \notin A$ und somit muss p_y^{-1} in A liegen. Wegen $(*)$ gilt $p_y^{-1} \in A \subseteq B_{(p_y)}$. Folglich ist p_y eine Einheit in $B_{(p_y)}$. Das kann aber nicht sein, da $p_y B_{(p_y)}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $B_{(p_y)}$ ist. Also ist y abgeschlossen in X.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Kurve $(X, \deg)$ vollständig ist. Wir bemerken zunächst, dass für alle abgeschlossenen Punkte $x = (p_x) \in |X_0|$ mit $p_x \in B$ stets $\deg(x) = -\operatorname{ord}_\infty(p_x) \geq 1$ gilt, da ansonsten $p_x \in B^\times$ wäre (vgl. Lemma 2.5), im Widerspruch dazu, dass p_x prim in B ist. Sei $f \in K(X)^\times = \operatorname{Quot}(B)^\times$ und

$$f = \prod_{x \in |X_0|} p_x^{n_x}$$

die Primfaktorzerlegung von f mit $n_x \in \mathbb{Z}$ und paarweise verschiedenen Primelementen $p_x \in B$. Dann gilt $n_x = \operatorname{ord}_x(f)$ für alle $x \in |X_0|$, wobei ord_x die diskrete Bewertung auf $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X_0,x}$ bezeichnet. Andererseits gilt

$$\operatorname{ord}_\infty(f) = \sum_{x \in |X_0|} n_x \operatorname{ord}_\infty(p_x) = -\sum_{x \in |X_0|} n_x \deg(x)$$

und daher

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \sum_{x \in |X_0|} \operatorname{ord}_x(f) \deg(x) = \operatorname{ord}_\infty(f) \cdot 1 + \sum_{x \in |X_0|} n_x \deg(f) = 0$$

□

Wir betrachten nun einen Hauptidealring B, der kein Körper ist und die Bedingungen aus Lemma 2.5 erfüllt, das heißt, es gibt einen diskreten Bewertungsring $A \subseteq \operatorname{Quot}(K)$, sodass $A \cap B$ ein Körper ist. In diesem Fall definiert die diskrete Bewertung $\operatorname{ord}_\infty$ von A eine euklidische Gradfunktion deg auf B, indem wir $\deg = -\operatorname{ord}_\infty$ setzen. Die folgende Proposition gibt uns eine Möglichkeit zu überprüfen, wann $(B, \deg)$ ein fast euklidischer Ring ist.

Proposition 2.8. *Sei B ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Angenommen es existieren A und $\operatorname{ord}_\infty$ so wie in Lemma 2.5. Dann ist $\deg := -\operatorname{ord}_\infty$ eine multiplikative, euklidische Gradfunktion und für alle $i \geq 1$ ist die Menge $\operatorname{Fil}_i(B) := \{b \in B \mid \deg(b) \leq i\}$ eine additive Untergruppe von B. Sind ferner für alle $i \geq 1$ die natürlichen Injektionen*

$$\operatorname{Fil}_i B / \operatorname{Fil}_{i-1}(B) = (B \cap \mathfrak{m}_A^{-i})/(B \cap \mathfrak{m}_A^{-i+1}) \hookrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

Isomorphismen, wobei $\mathfrak{m}_A$ das maximale Ideal von A bezeichnet, so ist $(B, \deg)$ ein fast euklidischer Ring.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Prop. 5.2.5] und setzen $E := A \cap B$. Zunächst zeigen wir, dass deg eine multiplikative, euklidische Gradfunktion ist. Das folgt direkt aus den Bewertungseigenschaften von $\operatorname{ord}_\infty$, denn es ist

$$-\infty = \deg(b) = -\operatorname{ord}_\infty(b) \text{ genau dann, wenn } b = 0$$

ist und es ist

$$\deg(ab) = -\operatorname{ord}_\infty(ab) = -\operatorname{ord}_\infty(a) - ord_\infty(b) = \deg(a) + \deg(b)$$

für alle $a, b \in B \setminus \{0\}$. Für $i \geq 1$ und alle Elemente $a, b \in \mathrm{Fil}_i(B)$ gilt

$$\begin{aligned}\deg(a+b) &= -\operatorname{ord}_\infty(a+b)\\ &\leq -\min\{\operatorname{ord}_\infty(a), \operatorname{ord}_\infty(b)\}\\ &\leq i\end{aligned}$$

und daher ist $\mathrm{Fil}_i(B)$ eine additive Untergruppe von B. Dass alle Elemente $b \in B$ von Grad 0 invertierbar sind, folgt aus Lemma 2.5.

Seien nun $x, y \in B$ mit $\deg(y) \geq 1$. Wir müssen zeigen, dass Elemente $a, b \in B$ existieren mit $x = ay + b$ und $\deg(b) \leq \deg(y)$. Falls $\deg(x) < \deg(y)$ ist, so ist dies offensichtlich für $a = 0$ und $b = x$ erfüllt. Also betrachten wir den Fall $\deg(x) \geq \deg(y)$ und nutzen Induktion über $\deg(x) - \deg(y)$. Der Induktionsanfang $\deg(x) = \deg(y)$ ist analog zu dem obigen Fall ($a = 0$ und $b = x$). Wir setzen $i := \deg(x)$, $j := \deg(y)$ und nehmen an, dass die Behauptung für $i - j - 1$ stimmt. Wir schreiben $\bar{x} \in \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$ und $\bar{y} \in \mathfrak{m}_A^{-j}/\mathfrak{m}_A^{-j+1}$. Wegen $\deg(x) \geq \deg(y)$ liegt das Element $\frac{y}{x}$ in A und hat Grad $-(i-j)$. Mit

$$c := \overline{\left(\frac{x}{y}\right)} \in \mathfrak{m}_A^{-(i-j)}/\mathfrak{m}_A^{-(i-j)+1}$$

gilt dann $\bar{x} = c\bar{y}$ im graduierten Ring $\oplus_{m \leq 0} \mathfrak{m}_A^{-m}$. Nach den Voraussetzungen existiert ein Element $\alpha \in \mathrm{Fil}_{i-j} B$ mit $\bar{\alpha} = c$. Wir setzen $\beta := x - \alpha y$ und berechnen seinen Grad

$$\deg(\beta) = \deg(x - \alpha y) \leq \max\{\deg(x), \deg(\alpha y)\} = \max\{i, i - j + j\} = i.$$

Daher können wir den obigen Isomorphismus auf β anwenden und erhalten so

$$\bar{\beta} = \overline{x - \alpha y} = \bar{x} - c\bar{y} = 0,$$

woraus folgt, dass $\beta \in \mathrm{Fil}_{i-1}(B)$ ist. Insbesondere ist also $\deg(\beta) \leq i - 1 < i = \deg(x)$. Falls $\deg(\beta) \leq \deg(y)$ ist, so sind wir fertig. Ansonsten ist $\deg(\beta) > \deg(y)$ und demnach $\deg(\beta) - \deg(y) \leq i - 1 - j$. Wenden wir die Induktionsannahme auf das Paar (β, y) an, so erhalten wir Elemente $a, b \in B$ mit $\beta = ay + b$ und $\deg(b) \leq \deg(y)$. Insgesamt folgt

$$x = \beta + \alpha y = ay + b + \alpha y = (a + \alpha)y + b$$

mit $\deg(b) \leq \deg(y)$. □

Bemerkung. Das einfachste klassische Beispiel ist der Fall $B = k[T]$ mit einem Körper k und der T^{-1}-adischen Bewertung auf $\mathrm{Quot}(B) = k(T)$. Dann ist deg auf $k[T]$ die gewöhnliche Gradfunktion, bezüglich der $k[T]$ bekanntermaßen euklidisch ist.

Sei nun B ein Hauptidealring, aber kein Körper, mit Quotientenkörper $K := \mathrm{Quot}(B)$, welcher die Voraussetzungen von Proposition 2.8 erfüllt, das heißt, es gibt eine diskrete Bewertung $\operatorname{ord}_\infty$ auf K, sodass für den zugehörigen Bewertungsring A und dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}_A =$ gilt:

i) $\forall b \in B : \deg(b) := -\operatorname{ord}_\infty(b) \geq 0$

ii) $E := A \cap B = \operatorname{Fil}_0(B)$ ist ein Körper

iii) Für alle $i \geq 1$ ist die natürliche Injektion

$$\operatorname{Fil}_i B / \operatorname{Fil}_{i-1}(B) = (B \cap \mathfrak{m}_A^{-i})/(B \cap \mathfrak{m}_A^{-i+1}) \hookrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

ein Isomorphismus.

Da die Gradfunktion deg multiplikativ ist, folgt $\operatorname{Fil}_i(B) \cdot \operatorname{Fil}_j(B) \subseteq \operatorname{Fil}_{i+j}(B)$ für $i, j \geq 0$. Daher ist die abelsche Gruppe

$$P := \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Fil}_i(B)$$

eine graduierte E-Algebra, indem wir für $a \in P_i := \operatorname{Fil}_i(B) \subseteq P$ und $b \in P_j$ das Produkt ab in $P_{i+j} \subseteq P$ bilden. Wir halten zunächst einige Eigenschaften von P fest.

Lemma 2.9. *Es gilt:*

i) P ist ein Integritätsbereich.

ii) Ist $d \geq 1$ und $f \in P_d$ irreduzibel in P, so ist f aufgefasst als Element in $\operatorname{Fil}_d(B) \subseteq B$ entweder in E enthalten und $d = 1$ oder f ist irreduzibel in B mit $\deg(f) = d$.

iii) Ist $f \in B$ irreduzibel mit $\deg(f) = d$, so ist $f \in P_d \subseteq P$ irreduzibel.

Beweis. Angenommen es gäbe Nullteiler $p = (p_i)_{i \geq 0}$, $p' = (p'_j)_{j \geq 0} \in P \setminus \{0\}$ mit $pp' = 0$. Dann ist für $n := \min\{i \in \mathbb{N} \mid p_i \neq 0\}$ und $m := \min\{j \in \mathbb{N} \mid p'_j \neq 0\}$ der $(n+m)$-te Eintrag von pp' gerade $p_n p'_m$ und wir haben daher $p_n p'_m = 0$ in B, was ein Widerspruch dazu ist, dass B ein Integritätsbereich ist. Also ist P ein Integritätsbereich.

Wir setzen $t := (0, 1, 0, \dots) \in P$. Sei $f \in P_d \subseteq P$ irreduzibel mit $d \geq 1$. Liegt f aufgefasst als Element in B in E, so gibt es eine Einheit $\varepsilon \in E$ mit $\varepsilon \cdot t^d = f$ in P. Da f irreduzibel ist, folgt daraus $d = 1$. Falls $f \notin E$ ist, so müssen wir also zeigen, dass f irreduzibel in B mit $\deg(b) = d$ ist. Dazu nehmen wir an, dass es Elemente $g, h \notin B^\times = \{b \in B \mid \deg(b) = 0\}$ gäbe mit $f = gh$ in B. Mit $i := \deg(g)$ gilt

$$0 < \deg(h) = \deg(f) - \deg(g) \leq d - i < d.$$

Nun fassen wir $g \in P_i$ und $h \in P_{d-i}$ als homogene Elemente in P von Grad i bzw. $d - i$ auf. Wegen $i \neq 0 \neq d - i$ sind es keine Einheiten in P und erfüllen $gh = f$ in P, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass f irreduzibel in P ist. Also ist f irreduzibel in B und es bleibt noch $\deg(f) = d$ zu zeigen. Angenommen es wäre $\deg(f) < d$. Wir setzen $i := d - \deg(f) > 0$, $j := \deg(f) > 0$ und $g := f \in P_j$. Folglich sind t^i und g keine Einheiten in P, erfüllen aber $gt^i = f$ in P, was wiederum ein Widerspruch zu der Irreduzibilität von f ist. Also ist $\deg(f) = d$.

Ist umgekehrt $f \in B$ irreduzibel vom Grad d, so ist f aufgefasst als Element von $P_d \subseteq P$, homogen und irreduzibel. Andernfalls gibt es homogene Elemente $g \in P_i$, $h \in P_j$ mit $i \neq 0 \neq j$, $i + j = d$ und $gh = f$ in P und damit auch in B. Wegen

$$d = i + j \geq \deg(g) + \deg(h) = \deg(f) = d$$

muss $\deg(g) = i$ und $\deg(h) = j$ gelten. Folglich sind $g, h \notin B^\times$, was ein Widerspruch zur Irreduzibilität von f in B ist. □

Bevor wir zeigen, dass $\mathrm{Proj}(P)$ eine Kurve ist, halten wir das folgende Lemma fest.

Lemma 2.10. *Sei $C|E$ eine Körpererweiterung und*

$$D := \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\},$$

aufgefasst als graduierte E-Unteralgebra des Polynomrings $C[T]$. Dann besteht $Proj(D)$ nur aus einem einzigen Punkt, nämlich dem homogenen Primideal (0).

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Lemme 5.2.8] und bezeichnen das irrelevante Ideal von D mit $D_+ = TC[T]$. Sei $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein homogenes Primideal in D und $f(T) \in \mathfrak{p}$ ein homogenes Element. Dann existiert ein Element $a \in C \setminus \{0\}$, sodass $f(T) = aT^i$ ist. Angenommen es wäre $i = 0$, dann folgt $f(T) = a \in E^\times \subseteq D^\times$ und folglich ist $\mathfrak{p} = D$, im Widerspruch dazu, dass $\mathfrak{p}$ prim ist. Also ist $i > 0$. Angenommen es wäre $a \in \mathfrak{p}$, dann folgt $a \in D$ und somit $a \in E^\times \subseteq D^\times$. Dies ist wie zuvor ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Also ist $a \notin \mathfrak{p}$ und aus der Primeigenschaft von $\mathfrak{p}$ folgt $T \in \mathfrak{p}$. Folglich ist $TD \subseteq \mathfrak{p}$ und insbesondere ist $(\lambda T)^2 \in \mathfrak{p}$ für jedes Element $\lambda \in C$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, folgt daraus $\lambda T \in \mathfrak{p}$. Also ist $D_+ \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Proj}(D)$. □

Es seien P, B, A wie vor Lemma 2.9. In diesem Fall haben wir den folgenden Satz.

Satz 2.11. *Sei $t := (0, 1, 0, \ldots) \in P$ und $X = X(B, A) := \mathrm{Proj}(P)$. Dann gilt:*

i) Das E-Schema X ist separiert und integer.

ii) Bezeichnet $C := A/\mathfrak{m}_A$ den Restklassenkörper von A, so gibt es einen Isomorphismus

$$P/tP \cong \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\}$$

graduierter E-Algebren. Insbesondere besteht die abgeschlossene Menge $V_+(t) = \mathrm{Proj}(P/tP) = \{\infty\}$ aus genau einem Punkt.

iii) Für das affine Schema $X_0 := X \setminus \{\infty\} = D_+(t) = \mathrm{Spec}(P_{(t)})$ gilt

$$\mathcal{O}_X(X_0) = P_{(t)} \cong B.$$

iv) Es gibt einen Isomorphismus $\mathcal{O}_{X,\infty} \cong A$ lokaler Ringe. Insbesondere ist X mit der in Lemma 2.6 definierten Gradfunktion eine vollständige Kurve.

v) Bezeichnet Q die Menge aller irreduziblen, homogenen Elemente von P, so ist das multiplikative Monoid

$$(\bigcup_{d\geq 1} P_d \setminus \{0\})/E^\times$$

frei über $Q/E^\times$, d.h. P ist ein graduiert faktorieller Ring.

vi) Die Abbildung $Q/E^\times \to |X|$, $fE^\times \to V_+(f)$ ist eine wohldefinierte Bijektion.

Beweis. Da P ein Integritätsbereich ist, ist das Nullideal von P ein relevantes Primideal und daher ist $V_+(0) = \operatorname{Proj}(P)$ irreduzibel (vgl. [GW10, Prop. 13.4]). Ferner ist für alle Punkte $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ eine homogene Lokalisierung von P, also ein reduzierter Ring. Folglich ist X reduziert und damit insgesamt integer. Das Schema X ist separiert, da das projektive Spektrum $\operatorname{Proj}(A)$ für jeden graduierten Ring A separiert ist (vgl. [GW10, Prop. 13.5]). Damit haben wir (i) gezeigt.

Für (ii) haben wir

$$tP = 0 \oplus \operatorname{Fil}_0(B) \oplus \operatorname{Fil}_1(B) \oplus \dots$$

und daher ist

$$\begin{aligned} P/tP &\cong E \oplus \bigoplus_{i\geq 1} \operatorname{Fil}_i(B)/\operatorname{Fil}_{i-1}(B) \\ &\cong E \oplus \bigoplus_{i\geq 1} \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}. \end{aligned}$$

Sei $\pi \in A$ ein uniformisierendes Element, also ein Erzeuger des Hauptideals $\mathfrak{m}_A$, dann ist für alle $i \geq 1$ die C-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} CT^i &\longrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1} \\ T^i &\longmapsto \pi^{-i} + \pi^{-i+1}A \end{aligned}$$

bijektiv. Denn ist $f \in C$ mit $f\pi^{-i} + \pi^{-i+1}A = 0$, so ist $f\pi^{-i} \in \pi^{-i+1}A$ und folglich $f \in \pi A = \mathfrak{m}_A$, also $f = 0$. Jedes Element $g \in \mathfrak{m}_A^{-i}$ lässt sich als $g = a\pi^{-i}$ mit $a \in A$ schreiben, woraus die die Surjektivität der Abbildung folgt. Die komponentenweise definierte Abbildung

$$\varphi : \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\} = E \oplus \bigoplus_{i\geq 1} CT^i \to E \oplus \bigoplus_{i\geq 1} \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

ist damit ebenfalls ein additiver Isomorphismus. Dieser erhält auch die Multiplikativität, denn für zwei homogene Elemente fT^i und gT^j mit $f, g \in C$ und $i, j > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(fgT^{i+j}) &= (0, \dots, fg\pi^{-(i+j)} + \pi^{-(i+j)+1}A, 0, \dots) \\ &= (0, \dots, f\pi^{-i} + \pi^{-i+1}A, 0, \dots)(0, \dots, g\pi^{-j} + \pi^{-j+1}A, 0, \dots) \\ &= \varphi(fT^i)\varphi(gT^j) \end{aligned}$$

Folglich ist φ ein Isomorphismus von graduierten E-Algebren. Wir haben in Lemma 2.10 gesehen, dass daher $V_+(t) = \operatorname{Proj}(P/tP) = \{\infty\}$ aus nur einem Punkt besteht.

Für (iii) betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} P &\to B \\ (b_i)_{i\geq 0} &\mapsto \sum_{i\geq 0} b_i. \end{aligned}$$

Sie ist offensichtlich ein surjektiver Ringhomomorphismus und bildet das Element $t = (0,1,0,\ldots)$ auf die Einheit $1 \in B^\times$ ab. Aufgrund der universellen Eigenschaft der Lokalisierung erhalten wir so einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} P_t &\to B \\ \frac{(b_i)_{i\geq 0}}{t^n} &\mapsto \sum_{i\geq 0} b_i. \end{aligned}$$

Seine Einschränkung auf die homogene Lokalisierung

$$P_{(t)} = \{\tfrac{b}{t^i} \mid b \in P_i = \mathrm{Fil}_i(B)\}$$

ist wegen $B = \bigcup_{i\geq 0} \mathrm{Fil}_i(B)$ weiterhin surjektiv und offenbar injektiv. Aus $X_0 = X\setminus\{\infty\} = X \setminus V_+(t) = D_+(t)$ folgt schließlich $\mathcal{O}_X(X_0) = \mathcal{O}_{D_+(t)}(D_+(t)) = P_{(t)} \cong B$.

Wir kommen nun zu Punkt (iv). Dafür überlegen wir uns zunächst, dass für $i \geq 0$ und $b \in \mathrm{Fil}_i(B)$ das homogene Element $b \cdot t^i := (0,\ldots,0,b,0,\ldots) \in P_i \subseteq P$ genau dann nicht in tP liegt, wenn $\deg(b) = i$ gilt. Denn ist $b \cdot t^i \notin tP$ und angenommen wir haben $j := \deg(b) < i$, dann ist $b \cdot t^j \in P$ und folglich führt $b \cdot t^i = t^{i-j}(b \cdot t^j) \in tP$ zu einem Widerspruch. Ist umgekehrt $b \cdot t^i \in tP$, dann ist $b \cdot t^i = tp$ für ein Element $p \in P$. Dann ist b der Eintrag von p an der Stelle $i-1$ und folglich muss $\deg(b) < i$ sein. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X,\infty} \cong P_{(tP)} &= \{\tfrac{a}{b} \mid a,b \in P_i,\ b \notin tP\} \\ &= \{\tfrac{a}{b} \mid a,b \in \mathrm{Fil}_i(B),\ \deg(b) = i\} \end{aligned}$$

Für $\frac{a}{b} \in \mathcal{O}_{X,\infty}$ gilt daher

$$\mathrm{ord}_\infty(\tfrac{a}{b}) = \mathrm{ord}_\infty(a) - \mathrm{ord}_\infty(b) = \deg(b) - \deg(a) \geq 0$$

und somit folgt $\frac{a}{b} \in A$.

Ist andererseits $f \in A \subseteq K(X) = \mathrm{Quot}(B)$, so gibt es Elemente $a, b \in B$ mit $b \neq 0$ und $f = \frac{a}{b}$. Wegen $f \in A$ ist $\mathrm{ord}_\infty(f) \geq 0$ und mit $i := \deg(b)$ folgt

$$\deg(a) = \deg(b) + \deg(f) = i - \mathrm{ord}_\infty(f) \leq i.$$

Also sind $a, b \in \mathrm{Fil}_i(B)$ mit $\deg(b) = i$ und daher ist $f = \frac{a}{b} \in \mathcal{O}_{X,\infty}$. Damit erfüllt X alle Voraussetzungen des Lemmas 2.6 und folglich ist X mit der dort definierten Gradfunktion eine vollständige Kurve.

Für (v) sei ein Element $f \in P_d \setminus \{0\}$ mit $d \geq 1$ gegeben. Wir fassen f wieder als Element von B auf und setzen $i := \deg(f)$. Der Ring B ist ein Hauptidealring, also faktoriell, und daher lässt sich f in paarweise verschiedene Primelemente $p_1, \ldots, p_n \in B$

zerlegen, also $f = \prod_{r=1}^{n} p_r^{n_r}$. Dabei sind $n_1, \ldots, n_n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $i_r := \deg(p_r)$ für alle $r \in \{1, \ldots, n\}$, so fassen wir p_r als Element von P_{i_r} auf und erhalten die Faktorisierung von f in irreduzible Elemente $f = t^{d-i} \prod_{r=1}^{n} p_r^{n_r}$ in P, wobei wir Lemma 2.9 verwenden.

Wir zeigen, dass diese Faktorisierung eindeutig bis auf Assoziiertheit ist. Dazu sei $f = \prod_{s=1}^{m} q_s^{m_s}$ eine weitere Faktorisierung mit paarweise verschiedenen irreduziblen Elementen $q_1, \ldots q_m \in Q$ und $m_1, \ldots, m_m \in \mathbb{N}$. Für alle $s \in \{1, \ldots, m\}$ ist das Element q_s homogen und wir fassen es als Element von B auf. Wir haben gesehen, dass es für q_s dann zwei Möglichkeiten gibt. Entweder ist $q_s \in E$ oder q_s ist irreduzibel in B. Nach Umsortierung können wir annehmen, dass $q_1, \ldots, q_t$ irreduzibel in B sind und, dass $q_{t+1}, \ldots, q_m \in E$ sind, für einen Index $1 \leq t \leq s$. In B gilt dann also $f = \prod_{s=1}^{m} q_s^{m_s}$ und da B faktoriell ist, folgt $t = n$ und nach Umsortierung $p_r = \varepsilon_r q_r$ mit $\varepsilon_r \in B^\times = E^\times$ für alle $r = 1, \ldots, n$. Folglich sind diese Elemente auch in P jeweils zueinander assoziiert. Für jedes $t < s \leq m$ existiert eine Einheit $\varepsilon_s \in E$ mit $q_s = \varepsilon_s t$ in P und daher ist $\prod_{s=t+1}^{m} q_s^{m_s}$ assoziiert zu t^{d-i}. Damit ist die Eindeutigkeit der Faktorisierung von f gezeigt und folglich ist P ein graduiert faktorieller Ring.

Wir kommen nun zum letzten Punkt. Wie in Lemma 2.9 gesehen ist ein Element $f \in Q$ entweder assoziiert zu t, also $f \in E^\times \subseteq P_1$, oder von der Form $f \in P_d$ mit $f \in B$ irreduzibel von Grad $d > 0$. Im zweiten Fall gilt $f \notin tP$, da ansonsten f assoziiert zu t wäre. Folglich ist $\infty \notin V_+(f)$ und damit ist

$$V_+(f) = V_+(f) \cap X_0 = V(f) = \operatorname{Spec}(B/fB)$$

ein abgeschlossener Punkt, da B ein Hauptidealring ist und somit $fB \in \operatorname{Max}(B)$. Damit ist klar, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Wegen $|X| = \{\infty\} \cup |X_0| = \{\infty\} \cup \operatorname{Max}(B)$ ist sie surjektiv, denn $tE^\times$ wird auf $\{\infty\}$ abgebildet und für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(B)$ existiert ein $f \in B$ mit $\mathfrak{m} = fB$. Für die Injektivität betrachten wir $f, g \in Q$ mit $V_+(f) = V_+(g)$. Also ist $fP = gP$ und somit sind f und g assoziiert zueinander in P. Folglich ist $fE^\times = gE^\times$, da $P^\times = P_0^\times = B^\times = E^\times$. □

Bemerkung. Im Fall $B = k[T]$ mit der üblichen Gradbewertung ist $P \cong k[T_1, T_2]$ als graduierte k-Algebren, indem $f(T) \in P_d \subseteq P$ auf $T_2^d f(\frac{T_1}{T_2})$ abgebildet wird. In diesem Fall ist die Kurve aus Satz 2.11 die projektive Gerade $\mathbb{P}_k^1$ über k.

Der vorhergehende Satz besitzt eine Umkehrung. Sei $P := \bigoplus_{i \geq 0} P_i$ ein graduierter Integritätsbereich. Unter den sehr speziellen Umständen weiter unten ist dann $X := \operatorname{Proj}(P)$ eine vollständige Kurve. Weiter ist dann $X = \operatorname{Spec}(B) \cup \{\infty\}$, wobei B ein Hauptidealring ist, welcher die Voraussetzungen von Proposition 2.8 erfüllt, also fast euklidisch ist. Bevor wir dazu kommen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.12. *Sei R ein faktorieller Ring. Falls für jedes irreduzible Element $f \in R$ das Ideal fR maximal ist, so ist R ein Hauptidealring.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Ist $\mathfrak{p} = 0$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal. Falls $\mathfrak{p} \neq 0$ ist, so gibt es ein Element $g \in \mathfrak{p}$ mit $g \neq 0$ und $g \notin R^\times$. Da R faktoriell ist, gibt es eine Faktorisierung von g in irreduzible Elemente $f_1, \ldots, f_n$. Dann gibt es einen Index $1 \leq i \leq n$ mit $f_i \in \mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Daraus folgt $f_iR \subseteq \mathfrak{p}$. Aber f_iR ist ein maximales Ideal, also folgt $\mathfrak{p} = f_iR$. Daher ist jedes Primideal in R ein Hauptideal und eine Standardanwendung des Zornschen Lemmas zeigt, dass R ein Hauptidealring ist. $\square$

Satz 2.13. *Sei $P := \bigoplus_{i\geq 0} P_i$ ein graduierter Integritätsbereich, sodass P_0 ein Körper ist, den wir mit E bezeichnen, und $\dim_E P_1 \geq 2$ ist. Wir nehmen an, dass P die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *Das multiplikative Monoid $\left(\bigcup_{d\geq 1} P_d \setminus \{0\}\right)/E^\times$ ist frei über den Elementen $P_1/E^\times$.*
2. *Für alle homogenen Elemente $t \in P_1 \setminus \{0\}$ existiert eine Körpererweiterung $C|E$, sodass es einen Isomorphismus*
$$P/tP \cong \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\}$$
von graduierten E-Algebren gibt.

Dann gilt für das E-Schema $X := \mathrm{Proj}(P)$:

i) *Für alle $t \in P_1 \setminus \{0\}$ besteht $V_+(t)$ aus einem einzelnen Punkt $\{\infty_t\}$.*

ii) *Für alle abgeschlossenen Punkte $\infty \in X$ ist $X \setminus \{\infty\}$ ein offenes, affines Schema $\mathrm{Spec}(B)$, wobei B ein fast euklidischer Hauptidealring ist.*

iii) *Sei $|X|$ die Menge der abgeschlossenen Punkte von X. Die Abbildung $(t \mapsto \infty_t)$ induziert eine Bijektion*
$$(P_1 \setminus \{0\})/E^\times \longrightarrow |X|.$$

iv) *Für alle abgeschlossenen Punkte $x \in |X|$ definieren wir $\deg(x) = 1$. Dann ist $(X, \deg)$ eine vollständige Kurve.*

v) *Für $t \in P_1 \setminus \{0\}$ mit zugehörigem Punkt ∞ und $A := \mathcal{O}_{X,\infty}$, $B := \mathcal{O}_X(X \setminus \{\infty\})$ gilt $A \cap B = E$ in $K(X)$. Ferner ist die Kurve $(X, \deg)$ isomorph zu der Kurve $X(B, A)$ aus Satz 2.11.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Thm. 5.2.7]. Sei $t \in P_1 \setminus \{0\}$ homogen und $C|E$ eine Körpererweiterung, sodass
$$P/tP \cong \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\} =: D.$$
Dann haben wir
$$V_+(t) = \mathrm{Proj}(P/tP) \cong \mathrm{Proj}(D),$$
was nach Lemma 2.10 ein einzelner Punkt ist, nämlich das homogene Primideal $(0) \subseteq D$. Das zeigt den ersten Punkt.

Sei nun $t \in P_1 \setminus \{0\}$. Wir schreiben $V_+(t) = \{\infty\}$ und erhalten $B := P_{(t)}$. Dann ist $X \setminus \{\infty\} = X \setminus V_+(t) = D_+(t) = \mathrm{Spec}(B)$. Wir zeigen zunächst, dass B ein faktorieller Ring ist. Dazu sei $b \in B \setminus \{0\}$. Dann existieren $d \geq 0$ und $x \in P_d$ mit $b = \frac{x}{t^d}$. Falls $d = 0$ ist, so ist $b = x \in E$ eine Einheit. Falls $d = 1$ ist und $x \notin tE^\times$ ist, so ist b irreduzibel in

B. Denn angenommen es gilt $b = cd$ für $c, d \in B$, so gibt es $i, j \geq 0$ und $y \in P_i,\ z \in P_j$ mit

$$\frac{x}{t} = b = cd = \frac{y}{t^i}\frac{z}{t^j}.$$

Folglich ist $i = 0$ oder $j = 0$ und damit ist $c \in B^\times$ oder $d \in B^\times$. Ist andernfalls $x \in tE^\times$, so ist $x = te$ für ein $\varepsilon \in E^\times$ und folglich ist $b = \varepsilon \in E^\times \subseteq B^\times$. Sei nun $i > 1$. Aus Voraussetzung 1 folgt, dass es bis auf Assoziiertheit eindeutige Elemente $x_1, \ldots, x_d \in P_1$ und $\varepsilon \in E^\times$ gibt mit $x = \varepsilon \prod_{i=1}^d x_i$. Folglich ist

$$b = \varepsilon \prod_{i=1}^{d} \frac{x_i}{t}.$$

Also ist B ein faktorieller Ring mit irreduziblen Elementen $\left\{\frac{x}{t} \mid x \in P_1 \setminus tE\right\}$. Als Nächstes zeigen wir, dass jedes von einem irreduziblen Element erzeugte Ideal maximal in B ist. Dazu sei $x \in P_1 \setminus tE$. Dann ist $t \notin xP$, da es ansonsten ein Element $\varepsilon \in P_0 = E$ mit $t = xe$ gäbe. Also wäre $x = te^{-1}$ im Widerspruch zur Definition von x. Daher ist für $\bar{t} := t + xP \neq 0$ der Ring $(P/xP)_{(\bar{t})} \neq 0$ und wir betrachten den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi : B \to (P/xP)_{(\bar{t})}$. Dieser hat den Kern $\ker(\varphi) = \frac{x}{t}B$, denn einerseits ist

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x + xP}{\bar{t}} = 0$$

und ist andererseits $\varphi(\frac{y}{t^i}) = 0$ für ein Element $y \in P_i \setminus \{0\}$, so folgt $y \in xP$. Daher ist $i \geq 1$ und es existiert ein homogenes Element $p \in P_{i-1}$ mit $y = xp$. Wir erhalten

$$\frac{y}{t^i} = \frac{xp}{t^i} = \frac{x}{t}\frac{p}{t^{i-1}} \in \frac{x}{t}B.$$

Offenbar ist φ surjektiv und wir erhalten somit

$$B/\tfrac{x}{t}B \cong (P/Px)_{(\bar{t})}.$$

Nach Voraussetzung 2 gibt es eine Körpererweiterung $C|E$ mit

$$P/Px \cong \{f \in C[T] \mid f(0) \in E\} =: D.$$

Wir bezeichnen mit $y(T) \in D$ das Bild von $\bar{t}$ unter diesem Isomorphismus. Da t homogen von Grad 1 ist, gilt dies auch für $\bar{t}$ und somit auch für $y(T)$. Also ist $y(T) = aT$ für ein $a \in C^\times$. Dann ist der durch $T \mapsto 1$ induzierte Ringhomomorphismus $D_{(y(T))} \to C$ bijektiv, denn für ein Element $b \in C$ ist $f(T) = \frac{baT}{y(T)} \in D_{(y(T))}$ mit $f(1) = b$ und seine Injektivität ist offensichtlich. Wir haben also insgesamt

$$B/\tfrac{x}{t}B = (P/xP)_{(\bar{t})} \cong D_{(y(T))} \cong C.$$

Demnach ist das von $\frac{x}{t}$ erzeugte Ideal in B maximal. Folglich sind also alle von irreduziblen Elementen erzeugten Ideale maximal und B ist nach Lemma 2.12 ein Hauptidealring.

Es bleibt noch zu zeigen, dass er fast euklidisch ist. Dazu zeigen wir, dass B die Voraussetzungen von Proposition 2.8 erfüllt. Der Ring B ist ausgestattet mit einer Filtrierung $(\mathrm{Fil}_i(B))_{i\geq 0}$ gegeben durch

$$\mathrm{Fil}_i(B) := \left\{\frac{x}{t^i} \mid x \in P_i\right\}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Fil}_0(B) = E$ ein Körper. Sei

$$\deg : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

die dazugehörige Gradfunktion. Wir betrachten $\mathrm{ord}_\infty : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ definiert durch $\mathrm{ord}_\infty(\frac{a}{b}) = -\deg(a) + \deg(b)$ für $a, b \in B$ und $K := \mathrm{Quot}(B)$. Wir behaupten, dass ord_∞ dann eine Bewertung auf K ist. Per Definition ist klar, dass $\mathrm{ord}_\infty(b) = -\infty$ genau dann der Fall ist, wenn $b = 0$ ist. Für die anderen Eigenschaften bemerken wir, dass deg multiplikativ ist, denn für $b, b' \in B$ schreiben wir $b = \frac{x}{t^i}$, $b' = \frac{y}{t^j}$ mit $x \in P_i$, $y \in P_j$ und $\deg(b) = i$, $\deg(b') = j$. Dann gilt $\deg(bb') = i + j$, da andernfalls $bb' = \frac{z}{t^k}$ mit $z \in P_k$ und $k < i + j$ gelten würde. Wegen $zt^{i+j-k} = xy$ müsste nach Voraussetzung 1 x oder y durch t teilbar sein, sodass $\deg(b) < i$ oder $\deg(b') < j$ gelten würde. Also ist deg multiplikativ und des Weiteren gilt für $i > j$ und $x \in P_i$, $y \in P_j$

$$\deg\left(\frac{x}{t^i} + \frac{y}{t^j}\right) = \deg\left(\frac{x + yt^{i-j}}{t^i}\right) \leq i = \max\{i, j\}.$$

Folglich ist auch ord_∞ multiplikativ und für $a, b \in K$ gilt

$$\mathrm{ord}_\infty(a + b) \geq \min\{\mathrm{ord}_\infty(a), \mathrm{ord}_\infty(b)\}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass ord_∞ surjektiv ist. Dies ist aber klar, denn nach Voraussetzung ist $\dim_E P_1 \geq 2$ und daher existiert ein Element $t' \in P_1$ mit $t' \notin tE$. Also ist $\deg(\frac{t'}{t}) = 1$ und daher ist $\mathrm{ord}_\infty((\frac{t'}{t})^{-k}) = k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Wir bezeichnen mit $(A, \mathfrak{m}_A)$ den nach Lemma 2.5 zu ord_∞ gehörigen diskreten Bewertungsring. Dann bleibt noch zu zeigen, dass für $i \geq 1$ die natürlichen Injektionen

$$\mathrm{Fil}_i(B)/\mathrm{Fil}_{i-1}(B) \longrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

Isomorphismen sind. Dazu betrachten wir zunächst die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Fil}_i(B)/\mathrm{Fil}_{i-1}(B) \longrightarrow P_i/tP_{i-1},\ \frac{x}{t^i} \longmapsto x + tP_{i-1}.$$

Diese ist ein Isomorphismus, denn sie ist offenbar surjektiv und es gilt

$$\begin{aligned} 0 = x + tP_{i-1} &\Leftrightarrow x \in tP_{i-1} \\ &\Leftrightarrow x = tp \text{ für ein } p \in P_{i-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{t^i} \in \mathrm{Fil}_{i-1}(B), \end{aligned}$$

woraus ihre Injektivität folgt. Sei S die multiplikative Teilmenge der von Null verschiedenen, homogenen Elemente in P/tP. Für alle ganzen Zahlen $i \in \mathbb{Z}$ graduieren wir den P/tP-Modul $t^iP/t^{i+1}P$, indem wir Elementen aus $t^iP_j/t^{i+1}P_{j-1}$ den Grad $i + j$ geben. Dadurch erhalten wir eine wohldefinierte Graduierung, denn für $i, k \in \mathbb{Z}$ und $j, l \geq 0$ ist $t^iP_j \cdot t^kP_l \subseteq t^{i+j}P_{k+l}$. Auf diese Weise fassen wir $t^iP/t^{i+1}P$ als graduierten Modul über dem graduierten Ring P/tP auf. Für $i \geq 1$ ist die Abbildung

$$(S^{-1}(t^{-i}P/t^{-i+1}P))_0 \longrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1},\ y^{-1}\overline{t^{-i}x} \longmapsto t^{-i}\tfrac{x}{y} + \mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus. Die Wohldefiniertheit folgt aus der Tatsache, dass im Fall $y \in P_j \setminus tP_{j-1}$ stets $x \in P_{i+j}$ gelten muss, weshalb

$$t^{-i}\frac{x}{y} = \frac{x}{t^{i+j}} \cdot \frac{t^j}{y}$$

einen Grad kleiner gleich $i + j - j = i$ hat, das heißt $\operatorname{ord}_\infty(t^{-i}\frac{x}{y}) \geq -i$. Ist $f \in \mathfrak{m}_A^{-i}$ mit $\operatorname{ord}_\infty(f) = -i$, so gibt es Elemente $a, b \in B$ mit $f = \frac{a}{b}$, da $\mathfrak{m}_A \subseteq \operatorname{Quot}(B)$ ist. Daraus folgt

$$\deg(b) = -\operatorname{ord}_\infty(b) = \operatorname{ord}_\infty(f) - \operatorname{ord}_\infty(a) = -i + \deg(a).$$

Mit $d := \deg(a)$ ist also $a = \frac{x}{t^d}$ mit $x \in P_d$ und $b = \frac{y}{t^{d-i}}$ mit $y \in P_{d-i} \setminus tP_{d-i+1}$ und somit ist $f = t^{-i}\frac{x}{y}$. Folglich ist $y^{-1}\overline{t^{-i}x} \in (S^{-1}(t^{-i}P/t^{-i+1}P))_0$ ein Urbild von f. Das zeigt die Surjektivität. Liegt für $d \geq i$, $x \in P_d$ und $y \in P_{d-i} \setminus tP_{d-i+1}$ das Element $t^{-i}\frac{x}{y}$ in $\mathfrak{m}_A^{-i+1}$ so folgt

$$-i + 1 \leq \operatorname{ord}_\infty\left(t^{-i}\frac{x}{y}\right) = \operatorname{ord}_\infty\left(\frac{x}{t^d}\right) - \operatorname{ord}_\infty\left(\frac{y}{t^{d-i}}\right) = -\deg\left(\frac{x}{t^d}\right) + d - i,$$

das heißt

$$\deg\left(\frac{x}{t^d}\right) \leq d - 1.$$

Also gibt es ein Element $p \in P$ mit $x = tp$ und es gilt

$$t^{-i}x = t^{-i+1}p \in t^{-i+1}P,$$

woraus die Injektivität folgt.

Auf der anderen Seite betrachten wir die Abbildung $(S^{-1}(P/tP))_i \to (S^{-1}(t^{-i}P/t^{-i+1}P))_0$ gegeben durch

$$y^{-1}\bar{x} \mapsto y^{-1}\overline{t^{-i}x}.$$

Diese ist wohldefiniert, denn für $y^{-1}\bar{x} = y'^{-1}\overline{x'}$ folgt $xy' - x'y = tp$ für ein $p \in P$ und

$$y^{-1}\overline{t^{-i}x} = y^{-1}(y')^{-1}\overline{t^{-i}y'x} = y^{-1}(y')^{-1}\overline{t^{-i}x'y} = (y')^{-1}\overline{t^{-i}x'}$$

Es ist klar, dass sie surjektiv ist und ihre Injektivität folgt aus

$$\begin{aligned} 0 = y^{-1}\overline{t^{-i}x} &\Leftrightarrow t^{-i}x \in t^{-i+1}P \\ &\Leftrightarrow x \in tP \Leftrightarrow y^{-1}\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir so

$$\operatorname{Fil}_i(B)/\operatorname{Fil}_{i-1}(B) \xrightarrow{\sim} P_i/tP_{i-1} \longrightarrow (S^{-1}(P/tP))_i \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1},$$

wobei ein Element $\frac{x}{t^i} + \operatorname{Fil}_{i-1}(B)$ auf $t^{-i}x + \mathfrak{m}_A^{-i+1}$ abgebildet wird, welches der natürlichen Abbildung $\operatorname{Fil}_i(B)/\operatorname{Fil}_{i-1} \to \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$ entspricht. Um die Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 zu zeigen, reicht es also aus zu zeigen, dass die natürliche Abbildung

$$P_i/tP_{i-1} \longrightarrow (S^{-1}(P/tP))_i, \; \bar{x} \longmapsto \frac{\bar{x}}{1}$$

surjektiv ist. Nach Voraussetzung 2 reicht es, dies für die graduierte Algebra

$$D' := \{f \in C'[T] \mid f(0) \in E\}$$

zu prüfen, wobei $C'|E$ eine Körpererweiterung ist. Dazu seien $f, g \in D'$ homogen mit $\deg(f) - \deg(g) = i$. Dann ist $f(T) = aT^{i+d}$ und $g(T) = bT^d$ mit $a, b \in C'$ und $d \geq 0$. Folglich ist

$$\frac{f(T)}{g(T)} = \frac{a}{b}T^i$$

homogen von Grad i. Damit ist die Surjektivität gezeigt und somit ist B ein fast euklidischer Hauptidealring.

Wir kommen zu Punkt (iii). Die Abbildung

$$(P_1 \setminus \{0\})/E^\times \longrightarrow |X|, \ t \longmapsto V_+(t)$$

ist offenbar injektiv, denn ist $V_+(t) = V_+(t')$ für zwei Elemente $t, t' \in P_1$, so folgt $tP = t'P$ und daher ist $tE^\times = t'E^\times$ nach Voraussetzung 1. Für die Surjektivität sei ein abgeschlossener Punkt $\infty \in |X|$ gegeben. Wir wählen ein Element $t \in P_1 \setminus \{0\}$. Falls $V_+(t) = \{\infty\}$ ist, so sind wir fertig. Ansonsten ist $\infty \in D_+(t)$. Wir haben in (ii) gesehen, dass $D_+(t) = \operatorname{Spec}(B)$ für einen Hauptidealring B ist, also entspricht ∞ einem maximalen Ideal von B. Außerdem haben wir gesehen, dass die maximalen Ideale von B der Form $\frac{t'}{t}B$ sind, wobei $t' \in P_1 \setminus \{0\}$ ist. Also gibt es ein Element $t' \in P_1$ mit $V_+(t') = \{\infty\}$.

Für (iv) bemerken wir, dass es zwei Elemente $t, t' \in P_1$ mit $tE^\times \neq t'E^\times$ gibt, da $\dim_E P_1 \geq 2$ ist. Dann ist $D_+(t) \cup D_+(t')$ eine Überdeckung von X, wobei $D_+(t)$ und $D_+(t')$ nach (ii) beides Spektren von Hauptidealringen sind. Folglich ist X eine Kurve. Für den Beweis der Vollständigkeit von X sei $f \in K(X)^\times = P_{(0)}$ gegeben. Dann gibt es zwei Elemente $a, b \in P_d$ mit $b \neq 0$ und $f = \frac{a}{b}$ für ein $d \geq 0$. Nach Voraussetzung 1 gibt es dann paarweise verschiedene Elemente $t_1, \ldots, t_r \in P_1$ und $t'_1, \ldots, t'_s \in P_1$ sowie natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ und $m_1, \ldots, m_s$ mit $a = \prod_{i=1}^r t_i^{n_i}$ und $b = \prod_{j=1}^s (t'_j)^{m_j}$ für $r, s \geq 0$. Da $a, b \in P_d$ sind, folgt $\sum_{i=1}^r n_i = d = \sum_{j=1}^s m_j$ und somit ist zusammen mit (iii)

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \sum_{x \in |X|} \operatorname{ord}_x(f) \deg(x) = \sum_{x \in |X|} \operatorname{ord}_x(a) - \operatorname{ord}_x(b) = 0.$$

Wir kommen zum letzten Punkt. Dazu sei $t \in P_1 \setminus \{0\}$ mit zugehörigem Punkt ∞ und $A := \mathcal{O}_{X,\infty}$ sowie $B := \mathcal{O}(X \setminus \{\infty\})$. Dann ist $A = P_{(tP)}$ und $B = P_{(t)}$ und daher ist

$$A \cap B = P_{(tP)} \cap P_{(t)} = \{\tfrac{p}{t^i} \mid p \in P_i, t^i \notin tP\} = P_0 = E.$$

Wir setzen $P' := \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Fil}_i(B)$. Für $i \geq 0$ ist

$$P_i \longrightarrow P'_i = \operatorname{Fil}_i(B), \ x \longmapsto \frac{x}{t^i}$$

offenbar ein Isomorphismus, welcher einen Isomorphismus $P \to P'$ von graduierten Ringen induziert. Also ist $X = \operatorname{Proj}(P) \cong \operatorname{Proj}(P') = X(A, B)$. $\square$

Bemerkung. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $P := k[T_1, T_2]$ mit der üblichen Graduierung. Ist $f \in P_d \setminus \{0\}$ mit $d \geq 1$, so ist $g(T) := f(T,1) \in k[T] \setminus \{0\}$ und daher ein eindeutiges Produkt von Linearfaktoren. Homogenisierung zeigt, dass P Voraussetzung 1 in Satz 2.13 erfüllt. Voraussetzung 2 ist mit $C = E = k$ für jeden Körper k erfüllt. Wir erhalten natürlich wieder die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_k$ über k.

2.2 Die Fargues-Fontaine-Kurve

Ein weiteres Beispiel für eine vollständige Kurve ist die Fargues-Fontaine-Kurve. Wir werden ihre Konstruktion im Folgenden nur kurz skizzieren und auf die wesentlichen Resultate, die zum Beweis ihrer Vollständigkeit notwendig sind, verweisen.

Sei p eine Primzahl und E ein Oberkörper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$, sodass die Körpererweiterung $E|\mathbb{Q}_p$ endlich ist. Dann ist E ein diskret bewerteter Körper und wir schreiben o für seinen Bewertungsring. Weiter sei k der Restklassenkörper von o. Dann ist $k|\mathbb{F}_p$ eine endliche Erweiterung und folglich ist $q := |k| < \infty$. Da E diskret bewertet ist, ist o ein diskreter Bewertungsring und wir fixieren einen Uniformisierer π von o. Sei $(F, |.|)$ ein vollständig, nichtarchimedisch, nichttrivial bewerteter, perfekter Oberkörper von k. Die Daten (p, E, q, π, F) bilden den Ausgangspunkt für die Konstruktion der Fargues-Fontaine-Kurve.

Wir schreiben $W_E(F)$ für die Algebra der verzweigten Witt-Vektoren über o mit Koeffizienten in F, das heißt $W_E(F) = F^{\mathbb{N}}$, wobei die Addition bzw. Multiplikation auf $W_E(F)$ über gewisse universelle Polynome definiert ist (vgl. [Sch17, S. 12]). In unserem Fall ist $W_E(F)$ ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\pi W_E(F)$ und Restklassenkörper F. Zudem gibt es für jedes Element $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W_E(F)$ die eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^n [x_n^{q^{-n}}],$$

wobei wir $[f] := (f, 0, 0, \ldots) \in W_E(F)$ für ein Element $f \in F$ setzen (vgl. [Sch17, Prop. 1.1.21]). Wir schreiben $W_E(F)[\frac{1}{\pi}]$ für die Lokalisierung an π. Dann lässt sich jedes Element $x \in W_E(F)[\frac{1}{\pi}]$ darstellen als

$$x = \sum_{n \gg -\infty} \pi^n [x_n]$$

mit eindeutig bestimmten Elementen $x_n \in F$.

Als Nächstes betrachten wir die E-Unteralgebra

$$B^b := \left\{ x = \sum_{n \gg -\infty} \pi^n [x_n] \in W_E(F)[\tfrac{1}{\pi}] \mid \sup_n \{|x_n|\} < \infty \right\}$$

der *beschränkten Elemente* von $W_E(F)$ (vgl. [FF18, Def. 1.3.2]). Für $0 \leq \rho < 1$ definieren wir die Normen $|.|_\rho : B^b \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ via

$$\left| \sum_{n \gg -\infty} \pi^n [x_n] \right|_\rho := \sup\{|x_n| \rho^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diese sind multiplikativ (vgl. [FF18, Prop. 1.4.9]) und nichtarchimedisch (vgl. [FF18, Prop. 1.4.3]). Für ein nichtleeres, kompaktes Intervall $I \subseteq (0,1]$ definieren wir die Normen $|.|_I : B^b \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ via $|x|_I := \sup\{|x|_\rho \mid \rho \in I\}$ und schreiben B_I für die Vervollständigung von B^b bezüglich der Norm $|.|_I$. Sind $\emptyset \neq J \subseteq I \subseteq (0,1]$ zwei kompakte Intervalle, so gilt $|.|_J \leq |.|_I$ und der kanonische Homomorphismus $B_I \to B_J$ ist injektiv. Wir betrachten das projektive System $(B_I)_{\emptyset \neq I \subseteq (0,1]\ kpt.}$ und setzen

$$B := \varprojlim_{\emptyset \neq I \subseteq (0,1]\ kpt.} B_I.$$

Auf der o-Algebra $W_E(F)$ gibt es eine Frobeniusabbildung φ (vgl. [Sch17, Def. 1.1.11]), welche sich fortsetzt zu $\varphi : B_{[\sigma,\rho]} \xrightarrow{\sim} B_{[\sigma^q,\rho^q]}$ und einen E-linearen Automorphismus auf B definiert. Für $n \geq 0$ setzen wir $B^{\varphi=\pi^n} := \{b \in B \mid \varphi(b) = \pi^n b\}$ und erhalten damit einen graduierten Unterring $P := \bigoplus_{n \geq 0} B^{\varphi=\pi^n}$ von B. Für $d \geq 0$ setzen wir $P_d := B^{\varphi=\pi^d}$, wobei $P_0 = B^{\varphi=1} = E$ ist (vgl. [FF18, Prop. 4.1.1]).

Definition 2.14. Das E-Schema

$$X_{E,F} := \mathrm{Proj}(P)$$

heißt die *Fargues-Fontaine-Kurve* assoziiert zu E und F.

Ist F algebraisch abgeschlossen, so erfüllt der Ring P die Voraussetzungen von Satz 2.13. Denn einerseits ist das Monoid $\bigcup_{d \geq 1}(P_d \setminus \{0\})/E^\times$ frei über $(P_1 \setminus \{0\})/E^\times$ (vgl. [FF18, Thm. 6.2.1]) und andererseits existiert für $t \in P_1 \setminus \{0\}$ eine Körpererweiterung $C|E$, sodass es einen kanonischen Isomorphismus

$$P/tP \xrightarrow{\sim} \{f(T) \in C[T] \mid f(0) \in E\}$$

von graduierten E-Algebren gibt (vgl. [FF18, Cor. 6.4.3]).

Proposition 2.15 (vgl. [FF18, Thm. 6.5.2])**.** *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen gilt:*

i) Für $x \in |X_{E,F}|$ setzen wir $\deg(x) = 1$. Dann ist $(X_{E,F}, \deg)$ eine vollständige Kurve.

ii) Die Gradfunktion induziert einen Isomorphismus $\deg : \mathrm{Pic} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

iii) Es gilt $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Beweis. Der erste Punkt ist Satz 2.13. Dass die zwei letzten Punkte erfüllt sind, werden wir später in Abschnitt 4.2 sehen. □

Bemerkung. Für $V_+(t) = \{\infty\}$ gilt $\mathcal{O}_{X_{E,F}}(X_{E,F} \setminus \{\infty\}) = P_{(t)} = P[\frac{1}{t}]_0 = B[\frac{1}{t}]^{\varphi=1}$. Nach Satz 2.13(ii) ist das ein fast euklidischer Hauptidealring. Unter der Bezeichnung $B_{cris}^{\varphi=1}$ für ein gewisses F ist dieser Ring seit Langem in der p-adischen Hodge-Theorie bekannt. Die Beobachtung, dass es sich um einen Hauptidealring handelt, war ein wichtiger Anstoß zur Entwicklung der Fargues-Fontaine-Kurve. Der komplettierte lokale Ring $\widehat{\mathcal{O}}_{X_{E,F},\infty} = B_{dR}^+$ ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring, dessen Quotientenkörper als *Körper der p-adischen Perioden* bekannt ist.

3 Vektorbündel auf Kurven

Im Folgenden werden wir Vektorbündel auf Kurven betrachten. Dazu schreiben wir Fib_X für die Kategorie der lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Rang über einer Kurve X. Wir werden zwei weitere Kategorien definieren und zeigen, dass diese zu Fib_X äquivalent sind. Im Anschluss betrachten wir Kurven X, welche ein nichtleeres, offenes, affines Unterschema $U \neq X$ besitzen, sodass $\mathrm{Pic}(U) = 0$ ist. Für diesen Fall werden wir mithilfe der Kategorienäquivalenzen die Isomorphieklassen von Vektorbündeln endlichen Rangs klassifizieren.

Bevor wir uns mit Vektorbündeln befassen, betrachten wir die folgende, algebraische Situation.

Definition 3.1. Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und $x = (f)$ ein maximales Hauptideal für ein Element $f \in R$. Wir definieren die Kategorie $\mathcal{D}_{R,x}$ bestehend aus den Tripeln (E, M, u), wobei E bzw. M endlich erzeugte, projektive R_f- bzw. R_x-Moduln sind und

$$u : M \otimes_{R_x} K \xrightarrow{\sim} E \otimes_{R_f} K$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist. Ein Morphismus zwischen zwei solchen Tripeln (E, M, u) und (F, N, v) ist ein Paar (g_1, g_2), sodass $g_1 : E \to F$ bzw. $g_2 : M \to N$ Morphismen von R_f- bzw. R_x-Moduln sind und sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{R_f} K & \xrightarrow{g_1 \otimes \mathrm{id}} & F \otimes_{R_f} K \\ \big\downarrow u & & \big\downarrow v \\ M \otimes_{R_x} K & \xrightarrow{g_2 \otimes \mathrm{id}} & N \otimes_{R_x} K \end{array}$$

kommutativ ist.

Auf ähnliche Weise definieren wir die Kategorie $\widehat{\mathcal{D}}_{R,x}$ bestehend aus den Tripeln (E, M, u), wobei E bzw. M endlich erzeugte, projektive R_f- bzw. $\widehat{R}_x$-Moduln sind und

$$u : M \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x \xrightarrow{\sim} E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x$$

ein Isomorphismus von $\widehat{K}_x$-Vektorräumen ist. Hierbei bezeichnet $\widehat{R}_x$ die x-adische Komplettierung von R_x und $\widehat{K}_x := \mathrm{Quot}(\widehat{R}_x)$ den Quotientenkörper von $\widehat{R}_x$. Ein Morphismus zwischen zwei solchen Tripeln (E, M, u) und (F, N, v) ist ein Paar (g_1, g_2), sodass $g_1 : E \to F$ bzw. $g_2 : M \to N$ Morphismen von R_f- bzw. $\widehat{R}_x$-Moduln sind und sodass das

Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x & \xrightarrow{g_1 \otimes \mathrm{id}} & F \otimes_{R_f} \widehat{K}_x \\ \big\downarrow u & & \big\downarrow v \\ M \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x & \xrightarrow{g_2 \otimes \mathrm{id}} & N \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x \end{array}$$

kommutativ ist.

Bemerkung. Da wir es hier stets mit endlich erzeugten Moduln über Dedekindringen zu tun haben, gilt für die x-adische Komplettierung eines R-Moduls M

$$\widehat{M_x} \cong M \otimes_R \widehat{R}_x,$$

wobei x ein maximales Ideal des Dedekindrings R ist (vgl. [BIV89, Satz 18.21]).

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass in der obigen Situation die Kategorien $\mathcal{D}_{R,x}$ bzw. $\widehat{\mathcal{D}}_{R,x}$ äquivalent zu der Kategorie der endlich erzeugten, projektiven R-Moduln sind. Dafür benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.2. *Sei R ein kommutativer Ring, $x = fR$ ein maximales Hauptideal sowie N ein R-Modul, sodass der R_f-Modul N_f und der R_x-Modul N_x beide endlich erzeugt sind. Dann ist auch N endlich erzeugt über R.*

Beweis. Wir wählen Erzeuger $\frac{n_1}{f^{i_1}}, \dots, \frac{n_r}{f^{i_r}}$ von N_f über R_f mit $n_j \in N$ und $i_j \in \mathbb{N}$ für alle $j \in \{1, \dots, r\}$. Durch Multiplikation mit einer ausreichend großen Potenz von f ist dann auch $\frac{n_1}{1}, \dots, \frac{n_r}{1}$ ein Erzeugendensystem von N_f. Auf gleiche Weise wählen wir Erzeuger $\frac{n_{r+1}}{1}, \dots, \frac{n_{r+s}}{1}$ von N_x über R_x. Sei $\varphi : R^{r+s} \to N$ die R-lineare Abbildung, die die Standardeinheitsvektoren auf $n_1, \dots, n_{r+s}$ abbildet. Dann ist φ genau dann surjektiv, wenn $\varphi_\mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ surjektiv ist. Wegen $\operatorname{Spec}(R) = \{x\} \cup D(f)$ müssen wir dafür zwei Fälle betrachten. Die Abbildung $\varphi_x : R_x^{r+s} \to N_x$ ist nach Wahl der Erzeuger $\frac{n_{r+1}}{1}, \dots, \frac{n_{r+s}}{1}$ surjektiv. Sei nun $\mathfrak{p} \neq x$ ein Primideal von R. Dann ist $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}R_f$ ein Primideal von R_f und es gilt $R_\mathfrak{p} = (R_f)_{\mathfrak{p}'}$, da $f \notin \mathfrak{p}$ ist. Nun ist $\varphi_f : R_f^{r+s} \to N_f$ nach der Wahl der Erzeuger $\frac{n_1}{1}, \dots, \frac{n_r}{1}$ surjektiv und folglich ist auch $\varphi_\mathfrak{p} = (\varphi_f)_{\mathfrak{p}'} : R_\mathfrak{p}^{r+s} \to N_\mathfrak{p}$ surjektiv. □

Proposition 3.3. *Sei R ein Dedekindring und $x = fR$ ein maximales Hauptideal von R. Dann ist der Funktor*

$$\begin{aligned} \{\textit{endlich erzeugte, projektive } R\textit{-Moduln}\} &\longrightarrow \mathcal{D}_{R,x} \\ N &\longmapsto (N_f, N_x, can) \\ h : N \to N' &\longmapsto (h_f, h_x) \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Funktor essenziell surjektiv ist. Dazu sei ein Objekt $(E, M, u) \in \mathcal{D}_{R,x}$ gegeben. Die kanonischen Inklusionen $E \to E_{(0)}$ und $M \to M_{(0)}$ sind injektiv, da E und M torsionsfrei sind. Daher können wir $N := E \cap u(M) \subseteq E_{(0)}$ setzen. Dann ist N als R-Untermodul des Quot(R)-Vektorraums $E_{(0)}$ torsionsfrei.

Wir betrachten die kanonische R_f-lineare Abbildung $N_f \to E$. Diese ist injektiv, denn ist $f^{-i}n = 0$, so folgt $n = 0$, da E torsionsfrei ist, und damit ist auch $\frac{n}{f^i} = 0$. Sei nun $e \in E$ gegeben. Dann existieren Elemente $m \in M$ und $g \in R \setminus \{0\}$ mit $e = u(\frac{m}{g})$. Für $n := \mathrm{ord}_x(g)$ ist dann $g = f^n y$ mit einem Element $y \in R \setminus x$. Wir erhalten so

$$f^n e = f^n u(\tfrac{m}{g}) = u(\tfrac{m}{y}) \in u(M)$$

und damit ist $f^n e \in N$. Also ist $e = \frac{f^n e}{f^n} \in N_f$ und folglich gilt $N_f = E$.

In ähnlicher Weise betrachten wir nun die kanonische Abbildung $N_x \to M$. Diese ist injektiv, denn ist $b^{-1}n = 0$ mit $b \in R \setminus x$, so folgt $n = 0$, da M torsionsfrei ist, und damit ist $\frac{n}{b} = 0$. Sei nun $m \in M$ gegeben. Dann existieren Elemente $e \in E$ und $g \in R \setminus \{0\}$ mit $u(m) = \frac{e}{g}$. Für $n := \mathrm{ord}_x(g)$ ist dann $g = f^n y$ mit einem Element $y \in R \setminus x$. Wir erhalten so $u(m)y = \frac{e}{f^n}$ und damit ist $u(ym) \in N$. Also ist $u(m) = u(\frac{ym}{y}) \in N_x$ und folglich ist $N_x = u(M) \cong M$.

Also ist N nach Lemma 3.2 endlich erzeugt über R. Da R ein Dedekindring ist, ist N ein flacher Modul (vgl. [Liu06, Kap. 1, Kor. 2.14]). Dass N dann projektiv ist, folgt aus der Tatsache, dass jeder endlich erzeugte, flache Modul über einem noetherschen Ring projektiv ist. Per Konstruktion ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(N_x)_{(0)} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "can"] & M_{(0)} \arrow[d, "u"] \\
(N_f)_{(0)} \arrow[r, "\cong"] & E_{(0)}
\end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei die obere Abbildung ein Element $\frac{u(m)}{g}$ auf $\frac{m}{g}$ abbildet. Damit ist gezeigt, dass $(N_f, N_x, can) \cong (E, M, u)$ gilt, und somit ist der Funktor essenziell surjektiv.

Als Nächstes zeigen wir, dass er auch treu ist. Dafür sei $h : N \to N'$ ein Morphismus von endlich erzeugten, projektiven R-Moduln mit $(h_f, h_x) = 0$ gegeben. Da N und N' torsionsfrei sind, folgt, dass die kanonischen Abbildungen $i : N \to N_f$ und $j : N' \to N'_f$ injektiv sind, und daher gilt

$$\ker(h) = \ker(j \circ h) = \ker(h_f \circ i) = N.$$

Also ist $h = 0$.

Sei nun ein Morphismus $(g_1, g_2) : (N_f, N_x, can) \to (N'_f, N'_x, can')$ gegeben, wobei N und N' endlich erzeugte, projektive R-Moduln sind. Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N_x \otimes_{R_x} \mathrm{Quot}(R) \arrow[r, "g_2\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "can"] & N'_x \otimes_{R_x} \mathrm{Quot}(R) \arrow[d, "can'"] \\
N_f \otimes_{R_f} \mathrm{Quot}(R) \arrow[r, "g_1\otimes\mathrm{id}"] & N'_f \otimes_{R_f} \mathrm{Quot}(R)
\end{tikzcd}$$

und folgern aus diesem, dass g_1 und g_2 auf N übereinstimmen, denn für $n \in N$ gilt

$$g_1(n) = g_1(can(n)) = can'(g_2(n)) = g_2(n).$$

Also ist $g_1(N) = g_2(N) \subseteq N'_f \cap N'_x = N'$ und wir setzen $g := (g_1)_{|N} : N \to N'$. Dann ist $g_f = g_1$, denn für $n \in N$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$g_f\left(\frac{n}{f^r}\right) = \frac{g(n)}{f^r} = \frac{g_1(n)}{f^r} = g_1\left(\frac{n}{f^r}\right).$$

Ebenso gilt $g_x = g_2$, denn für $n \in N$ und $b \in R \setminus x$ ist

$$g_x\left(\frac{n}{b}\right) = \frac{g(n)}{b} = \frac{g_2(n)}{b} = g_2\left(\frac{n}{b}\right).$$

Damit haben wir gezeigt, dass der betrachtete Funktor den Morphismus g auf das Paar (g_1, g_2) abbildet. Folglich ist der Funktor eine Äquivalenz von Kategorien. □

Für die andere Kategorie haben wir eine ähnliche Äquivalenz von Kategorien, die wir mit analogen Methoden noch einmal ausführlich behandeln.

Proposition 3.4. *Sei R ein Dedekindring und $x = fR$ ein maximales Hauptideal von R. Dann ist der Funktor*

$$\begin{aligned} \{\textit{endlich erzeugte, projektive } R\textit{-Moduln}\} &\longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{R,x} \\ N &\longmapsto (N_f, \widehat{N}_x, can) \\ h : N \to N' &\longmapsto (h_f, \widehat{h}_x) \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Sei $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R. Wir zeigen zunächst die essenzielle Surjektivität des Funktors. Dazu sei ein Objekt (E, M, u) aus $\widehat{\mathcal{D}}_{R,x}$ gegeben.

Die kanonischen Inklusionen $E \to E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x$ und $M \to M_{(0)}$ sind injektiv und wir setzen $N := E \cap u(M) \subseteq E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x$. Wir können daher N als R-Untermodul von E auffassen und, da E insbesondere torsionsfrei über R_f und damit auch über R ist, folgt, dass auch N torsionsfrei über R ist. Dann ist N als R-Untermodul des $\widehat{K}_x$-Vektorraums $E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x$ torsionsfrei.

Wir betrachten die kanonische, R_f-lineare Abbildung $N_f \to E$. Diese ist injektiv, denn ist $f^{-i}n = 0$, so folgt sofort $\frac{n}{f^i} = 0$. Um die Surjektivität zu zeigen, betrachten wir ein Element $e \in E$. Da u surjektiv ist, gibt es Elemente $0 \neq g \in \widehat{R}_x$ und $m \in M$ mit $e = u(\frac{m}{g})$. Der Ring $\widehat{R}_x$ ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\widehat{x} = f\widehat{R}_x$. Folglich existieren Elemente $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \widehat{R}_x \setminus \widehat{x}$ mit $g = f^n y$. Damit ist dann $f^n e = f^n u(\frac{m}{g}) = u(\frac{m}{y})$ und daher $f^n e \in N$. Also ist $\frac{f^n e}{f^n} = e \in N_f$ und daher ist $N_f \cong E$.

Wir zeigen nun $\widehat{N}_x = N \otimes_R \widehat{R}_x \cong M$. Dazu betrachten wir die $\widehat{R}_x$-lineare Abbildung $h : N \otimes_R \widehat{R}_x \to M$ mit $h(n \otimes r) = u^{-1}(n)r$. Wir zeigen zunächst, dass h injektiv ist. Der $\widehat{R}_x$-Modul ist $\widehat{N}_x$ torsionsfrei. Denn sei $g \in \widehat{R}_x \setminus \{0\}$, so ist $g = f^n y$ mit einer Einheit $y \in (\widehat{R}_x)^\times$ und $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnet μ_r die Multiplikation mit einem Element $r \in \widehat{R}_x$ auf $\widehat{N}_x$, so ist $\mu_g = \mu_y \circ \mu_{f^n}$. Die Abbildung μ_y ist bijektiv, da y eine Einheit ist, und wegen $f \in R$ ist $\mu_{f^n} = f^n \otimes \mathrm{id}$. Die Multiplikation mit f^n auf N ist injektiv, da N torsionsfrei über R ist. Damit ist auch die Abbildung $f^n \otimes \mathrm{id}$ injektiv, da $R \to \widehat{R}_x$ flach ist (vgl.

[BIV89, Satz 18.22]). Also ist μ_g injektiv und daher ist $\widehat{N}_x$ torsionsfrei über $\widehat{R}_x$. Folglich ist die kanonische Abbildung $\widehat{N}_x \to \widehat{N}_x \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x$ injektiv. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\widehat{N}_x \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"] & \widehat{N}_x \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x \arrow[r, "\cong"] & N \otimes_R \widehat{K}_x \arrow[d, "\cong"] \\
M \arrow[r, hook] & M \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x \arrow[r, "u"] & E \otimes_{R_f} \widehat{K}_x
\end{tikzcd}$$

wonach h injektiv sein muss. Wir behaupten, dass die durch die Inklusionsabbildung $N \to M$ induzierte Abbildung $N/fN \to M/fM$ injektiv ist. Dafür zeigen wir, dass die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

nach Anwendung des kovarianten, rechtsexakten Funktors $R/fR \otimes_R (\cdot)$ exakt bleibt. Dazu betrachten wir die projektive Auflösung

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot f} R \longrightarrow R/fR \longrightarrow 0$$

von R/fR. Da R ein flacher R-Modul ist, folgt $\mathrm{Tor}_1^R(R, M/N) = 0$ (vgl. [BIV89, Folg. 13.13]). Damit erhalten wir folgende lange, exakte Sequenz (vgl. [Bos13, Kap. 5.2, Prop. 2]):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(R/fR, M/N) \longrightarrow M/N \xrightarrow{\cdot f} M/N \longrightarrow R/fR \otimes_R M/N \longrightarrow 0$$

Der Quotientenmodul M/N über R hat aber keine f-Torsion, denn für $m \in M$ mit $fm \in N$ folgt $m = f^{-1}fm \in E$, da E ein R_f-Modul ist. Folglich ist $m \in N$. Damit ist

$$M/N \xrightarrow{\cdot f} M/N$$

injektiv und aus der Exaktheit der langen Sequenz folgt $\mathrm{Tor}_1^R(R/fR, M/N) = 0$. Mit Proposition 5 aus Kapitel 5.2 in [Bos13] erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(R/fR, M/N) \longrightarrow R/fR \otimes_R N \longrightarrow R/fR \otimes_R M \longrightarrow R/fR \otimes_R M/N \longrightarrow 0$$

und folglich ist $N/fN \to M/fM$ injektiv, wie behauptet.

Wegen $R/fR \cong R_x/fR_x \cong \widehat{R}_x/f\widehat{R}_x$ gilt $N/fN \cong \widehat{N}_x/f\widehat{N}_x$. Daher erhalten wir eine injektive Abbildung $\widehat{N}_x/f\widehat{N}_x \to M/fM$. Wegen $\widehat{N}_x \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x \cong M \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K}_x$ sind $\widehat{N}_x$ und M freie $\widehat{R}_x$-Moduln vom selben endlichen Rang. Also sind $\widehat{N}_x/f\widehat{N}_x$ und M/fM beides R/fR-Vektorräume derselben Dimension. Folglich ist $\widehat{N}_x/f\widehat{N}_x \to M/fM$ bijektiv und es gilt $M = fM + \widehat{N}_x$. Nach Nakayamas Lemma ist dann $\widehat{N}_x = M$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass N endlich erzeugt und projektiv über R ist. Da R_x ein noetherscher, lokaler Ring ist, ist die kanonische Abbildung $R_x \to \widehat{R}_x$ treuflach über R_x (vgl. [BIV89, Folg. 18.27]). Damit ist N endlich erzeugt über R_x, da $\widehat{N}_x \cong M$ endlich erzeugt über $\widehat{R}_x$ ist (vgl. [GW10, Prop. 14.46]). Folglich ist mit Lemma 3.2 N endlich erzeugt über R. Da R ein Dedekindring ist, folgt, dass N projektiv ist. Damit ist gezeigt, dass der Funktor essenziell surjektiv ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass er auch volltreu ist. Ist für eine R-lineare Abbildung $h : N \to N'$ von endlich erzeugten, projektiven Moduln N, N' der Morphismus $(h_f, \widehat{h}_x) = 0$, so folgt $\ker(h) = \ker((h_f)_{|N}) = N$ und daher $h = 0$, weil N und N' torsionsfrei sind.

Sei nun ein Morphismus $(g_1, g_2) : (N_f, \widehat{N}_x, can) \to (N'_f, \widehat{N'}_x, can')$ gegeben, wobei N und N' endlich erzeugte, projektive R-Moduln sind. Wir haben also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{N}_x \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K} & \xrightarrow{g_2 \otimes \mathrm{id}} & \widehat{N'}_x \otimes_{\widehat{R}_x} \widehat{K} \\ \big\downarrow{\scriptstyle can} & & \big\downarrow{\scriptstyle can'} \\ N_f \otimes_{R_f} \widehat{K} & \xrightarrow{g_1 \otimes \mathrm{id}} & N'_f \otimes_{R_f} \widehat{K} \end{array}$$

und wir folgern aus diesem, dass g_1 und g_2 auf N übereinstimmen, denn für $n \in N$ gilt

$$g_1(n) = g_1(can(n)) = can'(g_2(n)) = g_2(n).$$

Also ist $g_1(N) = g_2(N) \subseteq N'_f \cap \widehat{N'}_x = N'$ und wir setzen $g := (g_1)_{|N} : N \to N'$. Dann ist $g_f = g_1$, denn für $n \in N$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$g_f\left(\frac{n}{f^r}\right) = \frac{g(n)}{f^r} = \frac{g_1(n)}{f^r} = g_1\left(\frac{n}{f^r}\right).$$

Ebenso gilt $\widehat{g}_x = g_2$, denn für $r \geq 1$, $n_1, \dots, n_r \in N$ und $b_1, \dots, b_r \in \widehat{R}_x$ ist

$$\widehat{g}_x\left(\sum_{i=0}^{r} n_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=0}^{r} g_{2|N}(n_i) \otimes b_i = \sum_{i=0}^{r} g_2(n_i \otimes 1) b_i = g_2\left(\sum_{i=0}^{r} n_i \otimes b_i\right).$$

Damit haben wir gezeigt, dass der betrachtete Funktor den Morphismus g auf das Paar g_1, g_2 abbildet. Folglich ist der Funktor eine Äquivalenz von Kategorien. □

Nach Korollar 1.3 ist eine nichtleere, offene Menge einer Kurve das Komplement endlich vieler Punkte. Wir treffen daher folgende Definition:

Definition 3.5. Sei X eine Kurve mit generischem Punkt η, Funktionenkörper K und $U = X \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ eine nichtleere, offene Menge, wobei $x_1, \dots, x_r \in |X|$ mit $r \geq 1$ abgeschlossene Punkte sind. Wir definieren die Kategorie $\mathcal{C}_{X,U}$, welche als Objekte die Tripel

$$(\mathscr{E}, (M_i)_{1 \leq i \leq r}), (u_i)_{1 \leq i \leq r})$$

besitzt, wobei $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_U$ ein Vektorbündel auf U von endlichem Rang ist, M_i ein freier, endlich erzeugter $\mathcal{O}_{X,x_i}$-Modul sowie

$$u_i : M_i \otimes_{\mathcal{O}_{X,x_i}} K \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\eta$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen für $1 \leq i \leq r$. Ein Morphismus zwischen zwei solchen Tripeln $(\mathscr{E}, (M_i)_{1 \leq i \leq r}), (u_i)_{1 \leq i \leq r}) \to (\mathscr{F}, (N_i)_{1 \leq i \leq r}), (v_i)_{1 \leq i \leq r})$ ist ein Paar $(\psi, (g_i)_{1 \leq i \leq r})$, wobei $\psi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist und für $1 \leq i \leq r$ ist $g_i : M_i \to N_i$ eine $\mathcal{O}_{X,x_i}$-lineare Abbildung, sodass $\psi_\eta \circ u_i = v_i \circ (g_i \otimes \mathrm{id})$ gilt.

Auf eine ähnliche Weise definieren wir die Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}_{X,U}$. Ihre Objekte sind die Tripel

$$(\mathscr{E}, (M_i)_{1\le i\le r}, (u_i)_{1\le i\le r}),$$

wobei $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_U$ ein Vektorbündel auf U von endlichem Rang ist, M_i ein freier, endlich erzeugter $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$-Modul sowie

$$u_i : M_i \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\eta \otimes_K \widehat{K}_{x_i}$$

ein Isomorphismus von $\widehat{K}_{x_i}$-Vektorräumen für $1 \le i \le r$. Ein Morphismus zwischen zwei solchen Tripeln $(\mathscr{E}, (M_i)_{1\le i\le r}, (u_i)_{1\le i\le r}) \to (\mathscr{F}, (N_i)_{1\le i\le r}, (v_i)_{1\le i\le r})$ ist ein Paar $(f, (g_i)_{1\le i\le r})$, wobei $\psi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ ein Morphismus von Vektorbündeln ist und für $1 \le i \le r$ ist $g_i : M_i \to N_i$ eine $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$-lineare Abbildung, sodass $(\psi_\eta \otimes \mathrm{id}) \circ u_i = v_i \circ (g_i \otimes \mathrm{id})$ gilt.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist, dass die oben definierten Kategorien $\mathcal{C}$ und $\widehat{\mathcal{C}}$ jeweils äquivalent zu der Kategorie Fib_X sind. Genauer gilt:

Satz 3.6 (vgl. [FF18, Prop. 5.3.1]). *Sei X eine Kurve und $U = X \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ mit $x_i \in |X|$ für $i = 1, \dots, r$ und $r \ge 1$. Dann sind die Funktoren*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fib}_X &\longrightarrow \mathcal{C}_{X,U} \\ \mathscr{F} &\longmapsto (\mathscr{F}_{|U}, (\mathscr{F}_{x_i})_{1\le i\le r}, (can_i)_{1\le i\le r}) \\ \varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} &\longmapsto (\varphi_{|U}, (\varphi_{x_i})_{1\le i\le r}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Fib}_X &\longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_{X,U} \\ \mathscr{F} &\longmapsto (\mathscr{F}_{|U}, (\widehat{\mathscr{F}_{x_i}})_{1\le i\le r}, (can_i)_{1\le i\le r}) \\ \varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} &\longmapsto (\varphi_{|U}, (\widehat{\varphi}_{x_i})_{1\le i\le r}) \end{aligned}$$

Äquivalenzen von Kategorien.

Beweis. Wir schreiben $F_{X,U}$ bzw. $\widehat{F}_{X,U}$ für den ersten bzw. zweiten Funktor. Sei ein Objekt $(\mathscr{E}, (M_i)_{1\le i\le r}, (u_i)_{1\le i\le r})$ aus $\mathcal{C}_{X,U}$ gegeben. Um zu zeigen, dass der Funktor $F_{X,U}$ essenziell surjektiv ist, müssen wir ein Vektorbündel $\mathscr{F} \in \mathrm{Fib}_X$ finden, sodass $F_{X,U}(\mathscr{F})$ isomorph zu $(\mathscr{E}, (M_i)_{1\le i\le r}, (u_i)_{1\le i\le r})$ ist.

Dazu nutzen wir vollständige Induktion über $r \ge 1$. In dem Fall $r = 1$ schreiben wir $x := x_1$, $M := M_1$ und $u := u_1$. Mithilfe von Lemma 1.4 wählen wir eine offene, affine Umgebung $X' = \mathrm{Spec}(R)$ von x mit einem Dedekindring R, sodass $x = fR$ ein Hauptideal ist. Dann ist $U \cap X' = X' \setminus \{x\} = D(f)$ und $E := \mathscr{E}(U \cap X')$ ist ein endlich erzeugter, projektiver R_f-Modul. Nach Proposition 3.3 gibt es dann einen endlich erzeugten, projektiven R-Modul N, der isomorph zu (E, M, u) in $\mathcal{D}_{R,x}$ ist. Folglich erhalten wir ein Vektorbündel $\mathscr{F}' := \widetilde{N} \in \mathrm{Fib}_{X'}$, sodass $F_{X',D(f)}(\mathscr{F}')$ isomorph zu $(\mathscr{E}_{|U\cap X'}, M, u)$ ist. Also verkleben $\mathscr{E}$ auf U und $\mathscr{F}'$ auf X' zu einem Vektorbündel $\mathscr{F}$ auf $U \cup X' = X$. Dann ist $\mathscr{F}_{|U} \cong \mathscr{E}$ und $\mathscr{F}_x \cong \mathscr{F}'_x \cong M$, also ist $F_{X,U}(\mathscr{F}) \cong (\mathscr{E}, M, u)$. Das zeigt den Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt sei $r > 1$ und die Aussage für den Fall $r-1$ wahr. Dann ist $U' := U \cup \{x_r\} = X \setminus \{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ offen in X und somit eine Kurve. Wir wenden den Induktionsanfang auf $U = U' \setminus \{x_r\}$ an und erhalten so ein Vektorbündel $\mathscr{F}' \in \mathrm{Fib}_{U'}$ mit $F_{U',U}(\mathscr{F}') \cong (\mathscr{E}, M_r, u_r)$. Andererseits gibt es gemäß der Induktionsannahme ein Vektorbündel $\mathscr{F} \in \mathrm{Fib}_X$, sodass

$$F_{X,U'}(\mathscr{F}) \cong (\mathscr{F}', (M_i)_{1 \leq i \leq r-1}, (u_i)_{1 \leq i \leq r-1})$$

ist. Insgesamt folgt $\mathscr{F}_{|U} \cong \mathscr{F}'_{|U} \cong \mathscr{E}$, $\mathscr{F}_{x_r} \cong \mathscr{F}'_{x_r} \cong M_r$ und daher ist $F_{X,U}(\mathscr{F})$ isomorph zu $(\mathscr{E}, (M_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r})$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Also haben wir gezeigt, dass der erste Funktor essenziell surjektiv ist und müssen noch zeigen, dass er volltreu ist.

Seien $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathrm{Fib}_X$ Vektorbündel auf X und $(\psi, (g_i)_{1 \leq i \leq r}) : F_{X,U}(\mathscr{F}) \to F_{X,U}(\mathscr{G})$ ein Morphismus. Um zu zeigen, dass $F_{X,U}$ voll ist, nutzen wir wieder vollständige Induktion über $r \geq 1$. Für den Induktionsanfang $r = 1$ schreiben wir $x := x_1$ und $g := g_1$. Mithilfe von Lemma 1.4 wählen wir eine offene, affine Umgebung $X' = \mathrm{Spec}(R)$ von x mit einem Dedekindring R, sodass $x = fR$ ein Hauptideal ist. Dann ist $U \cap X' = X' \setminus \{x\} = D(f)$ und $\psi_{D(f)} : \mathscr{F}(D(f)) \to \mathscr{G}(D(f))$ ist ein Morphismus von endlich erzeugten, projektiven R_f-Moduln. Nach Proposition 3.3 gibt es einen Morphismus $h : \mathscr{F}(X') \to \mathscr{G}(X')$ von R-Moduln, sodass $(h_f, h_x) = (\psi_{D(f)}, g)$ ist. Folglich ist $\varphi' := \widetilde{h} : \mathscr{F}_{|X'} \to \mathscr{G}_{|X'}$ ein Morphismus von Vektorbündeln, sodass $F_{X',D(f)}(\varphi') = (\psi_{|U \cap X'}, g)$ ist. Also verkleben ψ auf U und φ' auf X' zu einem Morphismus φ auf $U \cup X' = X$. Dann ist $F_{X,U}(\varphi) = (\psi, g)$ und damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt sei $r > 1$ und die Behauptung für $r-1$ richtig. Dann ist $U' := U \cup \{x_r\} = X \setminus \{x_1, \ldots, x_{r-1}\}$ offen in X und somit eine Kurve. Wir wenden den Induktionsanfang auf $U = U' \setminus \{x_r\}$ an und erhalten folglich einen Morphismus $\varphi' : \mathscr{F}_{|U} \to \mathscr{G}_{|U}$, sodass $F_{U',U}(\varphi') = (\psi, g_r)$ ist. Andererseits gibt es gemäß der Induktionsannahme einen Morphismus $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, sodass $F_{X,U'}(\varphi) = (\varphi', (g_i)_{1 \leq i \leq r-1})$ ist. Insgesamt folgt $\varphi_{|U} = \varphi'_{|U} = \psi$ und $\varphi_{x_r} = \varphi'_{x_r} = g_r$. Daher ist $F_{X,U}(\varphi) = (\psi, (g_i)_{1 \leq i \leq r})$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Bis hierher funktioniert der Beweis genauso für den zweiten Funktor, indem wir $\mathcal{C}$, F und $\mathcal{D}$ durch $\widehat{\mathcal{C}}$, $\widehat{F}$ und $\widehat{\mathcal{D}}$ ersetzen und Proposition 3.4 anstelle von 3.3 anwenden. Also sind beide Funktoren essenziell surjektiv und voll.

Um zu zeigen, dass sie auch treu sind, sei $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus von Vektorbündeln. Ist $F_{X,U}(\varphi) = 0$, so bedeutet das für alle Punkte $x \in X = U \cup \{x_1, \ldots, x_r\}$, dass entweder $\varphi_x = (\varphi_{|U})_x = 0$ oder $\varphi_x = \varphi_{x_i} = 0$ gilt. Folglich ist $\varphi = 0$.

Ist $\widehat{F}_{X,U}(\varphi) = 0$, so bedeutet das für alle Punkte $x \in U$, dass $\varphi_x = (\varphi_{|U})_x = 0$ gilt. Für $x \in \{x_1, \ldots, x_r\}$ gilt dann $\widehat{\varphi}_x = \widehat{\varphi}_{x_i} = 0$. Da $\mathscr{F}_x \to \widehat{\mathscr{F}_x}$ injektiv ist, folgt $\varphi_x(\mathscr{F}_x) = \widehat{\varphi}_x(\mathscr{F}_x) = 0$ und damit ist $\varphi_x = 0$. Folglich ist $\varphi = 0$ und wir haben somit gezeigt, dass beide Funktoren treu sind. Also sind sie Äquivalenzen von Kategorien. □

In dem Spezialfall, dass U affin ist und $\mathrm{Pic}(U) = 0$ gilt, lassen sich die obigen Kategorienäquivalenzen wie folgt ausdrücken.

Korollar 3.7 (vgl. [FF18, Cor. 5.3.2]). *Sei X eine Kurve und $x_1, \dots, x_r \in |X|$ für $r \geq 1$, sodass $U := X \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ affin mit $\mathrm{Pic}(U) = 0$ ist. Weiter sei $B := \mathcal{O}_X(U)$. Dann ist die Kategorie der Vektorbündel auf X äquivalent zu der durch die Tripel gegebenen*

$$(M, (N_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r}),$$

wobei M ein freier, endlich erzeugter B-Modul, N_i ein freier, endlicher erzeugter $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$-Modul und

$$u_i : M \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} N_i \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i}$$

ein Isomorphismus von $\widehat{K}_{x_i}$-Vektorräumen ist. Das gilt auch, wenn wir $\widehat{K}_{x_i}$ durch K und $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$ durch $\mathcal{O}_{X,x_i}$ ersetzen. Insbesondere steht die Menge der Isomorphieklassen der Vektorbündel auf X vom Rang n in Bijektion mit der Menge

$$GL_n(B) \setminus \left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_{x_i}) / \mathrm{GL}_n(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}) \right)$$

Beweis. Nach Proposition 3.6 ist Fib_X äquivalent zu $\mathcal{C}$ bzw. $\widehat{\mathcal{C}}$. Da die Idealklassengruppe $\mathrm{Pic}(B) \cong \mathrm{Pic}(U) = 0$ des Dedekindrings B trivial ist, ist B ein Hauptidealring. Folglich ist Fib_U äquivalent zu der Kategorie der freien, endlich erzeugten B-Moduln. Daraus folgt die erste Behauptung.

Einer Familie von Matrizen $(A_1, \dots, A_r) \in \prod_{i=1}^n \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_{x_i})$ ordnen wir die Isomorphieklasse $[(B^n, ((\widehat{O}_{X,x_i})^n)_{1 \leq i \leq r}, (u_{A_i^{-1}})_{1 \leq i \leq r})]$ zu, wobei

$$u_{A_i^{-1}} : B^n \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \cong (\widehat{K}_{x_i})^n \xrightarrow{\sim} (\widehat{K}_{x_i})^n \cong (\widehat{O}_{X,x_i})^n \otimes_{\widehat{O}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i}$$

der $\widehat{K}_{x_i}$-linearen Abbildung entspricht, die durch A_i^{-1} induziert wird. Sind für zwei Familien $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$, $(A'_i)_{1 \leq i \leq r}$ die so zugeordneten Isomorphieklassen gleich, so gibt es Isomorphismen $f : B^n \to B^n$ und $g_i : (\widehat{O}_{X,x_i})^n \to (\widehat{O}_{X,x_i})^n$, sodass das folgende Diagramm für $i = 1, \dots, r$ kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
B^n \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "u_{A_i^{-1}}"] & B^n \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \arrow[d, "u_{(A'_i)^{-1}}"] \\
(\widehat{O}_{X,x_i})^n \otimes_{\widehat{O}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i} \arrow[r, "g_i \otimes \mathrm{id}"] & (\widehat{O}_{X,x_i})^n \otimes_{\widehat{O}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i}
\end{tikzcd}$$

Bezeichnen A_f und A_{g_i} die zu f und g_i gehörigen Matrizen, so ergibt sich aus dem obigen Diagramm

$$(A'_i)^{-1} A_f = A_{g_i} A_i^{-1}$$

und folglich

$$A_f A_i A_{g_i}^{-1} = A'_i.$$

Damit ist $\mathrm{GL}_n(B)(A_i \,\mathrm{GL}_n(\widehat{O}_{X,x_i}))_{1 \leq i \leq r} = \mathrm{GL}_n(B)(A'_i \,\mathrm{GL}_n(\widehat{O}_{X,x_i}))_{1 \leq i \leq r}$.

Sei nun ein Tripel $(M, (N_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r})$ gegeben. Da M und $N_1, \dots, N_r$ freie Moduln sind, gibt es Isomorphismen $f : B^n \to M$ und $g_i : (\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i})^n \to N_i$ für alle $i = 1, \dots, r$. Setzen wir $v_i := (g_i^{-1} \otimes \mathrm{id}) \circ u_i \circ (f \otimes \mathrm{id}) : B^n \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \to (\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i})^n \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i}$, so ist klar, dass

$[(M, (N_i)_{1 \leq i \leq r}, (u_i)_{1 \leq i \leq r})] = [(B^n, ((\widehat{O}_{X,x_i})^n)_{1 \leq i \leq r}, (v_i)_{1 \leq i \leq r}))]$ gilt. Für alle $i = 1, \ldots, r$ ist v_i eine $\widehat{K}_{x_i}$-lineare Abbildung und daher existiert eine Matrix $A_i \in \mathrm{GL}_n(\widehat{K}_{x_i})$ mit $u_{A_i^{-1}} = v_i$. □

4 Kurven der Form $\mathrm{Spec}(B) \cup \{\infty\}$ mit $\mathrm{Pic}(B) = 0$

Wir werden in diesem Kapitel Kurven $(X, \deg)$ der Form $X = U \cup \{\infty\}$ betrachten, wobei $U = \mathrm{Spec}(B)$ offen, B ein Hauptidealring und ∞ ein abgeschlossener Punkt auf X ist, der aber nicht in U liegt. Für diese Kurven werden wir mithilfe der Kategorienäquivalenzen des vorhergehenden Kapitels ihre Garbenkohomologie berechnen. Im zweiten Abschnitt nehmen wir zudem an, dass $\deg(\infty) = 1$ ist und werden für diesen Fall ein Kriterium zur Euklidizität von B erhalten.

4.1 Berechnung der Garbenkohomologie

Bevor wir die Kohomologiegruppen betrachten, benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 4.1. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Bezeichnet $\widehat{A}$ die Komplettierung von A bezüglich $\mathfrak{m}$ und ist $\widehat{K} := \mathrm{Quot}(\widehat{A})$, so gilt*

i) $K \cap \widehat{A} = A$

ii) Die kanonische Abbildung $K/A \longrightarrow \widehat{K}/\widehat{A}$ ist Isomorphismus von A-Moduln.

Beweis. Sei $x \in K \cap \widehat{A}$. Dann ist $\mathrm{ord}_A(x) = \mathrm{ord}_{\widehat{A}}(x) \geq 0$ und daher $x \in A$. Das zeigt den ersten Punkt. Für den zweiten Punkt sei $\varphi : K \to \widehat{K}/\widehat{A}$ gegeben durch $x \mapsto x + \widehat{A}$. Dies definiert einen surjektiven Homomorphismus von A-Moduln, denn für $x \in \widehat{K}$ gibt es eine Darstellung

$$x = \sum_{i \geq m} a_i \pi^i$$

mit $a_i \in A$, $a_m \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$ und einem Erzeuger π von $\mathfrak{m}$ (vgl. [Neu92, Kap. 2, Satz 4.4]). Dann ist $x' := \sum_{i=m}^{-1} a_i \pi^i \in K$ und es ist $x' + \widehat{A} = x + \widehat{A}$. Folglich ist φ surjektiv. Weiter ist $\ker(\varphi) = A$, denn für $x \in K$ mit $\varphi(x) = 0$ folgt $x \in \widehat{A}$ und somit $x \in A$. $\square$

Lemma 4.2. *Sei X eine Kurve. Weiter sei $\infty \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt, sodass $U := X \setminus \{\infty\}$ affin mit $\mathrm{Pic}(U) = 0$ ist. Dann ist der Funktor*

$$(M, N, u) \longmapsto (M, \widehat{N}, \widehat{u})$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Dabei ist M ein endlich erzeugter, freier $\mathcal{O}_X(U)$-Modul, N ein endlich erzeugter, freier $\mathcal{O}_{X,\infty}$-Modul und die Kategorien sind analog wie in Definition 3.1.

Beweis. Wir setzen $B := \mathcal{O}_X(U)$ und $A := \mathcal{O}_{X,\infty}$. Sei ein Tripel (M, N', u) in der Zielkategorie gegeben. Wegen $M \otimes_B \widehat{K} \cong N' \otimes_{\widehat{A}} \widehat{K}$ ist $\mathrm{rg}_B(M) = \mathrm{rg}_{\widehat{A}}(N') := n$. Dann ist $(B^n, \widehat{A}^n, \mathrm{id})$ isomorph zu (M, N', u) und folglich ist der Funktor essenziell surjektiv.

Er ist auch volltreu. Dafür reicht es Standardtripel $(B^n, \widehat{A}^n, \mathrm{id})$ zu betrachten. Sei also ein Morphismus $(C, D) : (B^n, \widehat{A}^n, \mathrm{id}) \to (B^m, \widehat{A}^m, \mathrm{id})$ gegeben, wobei C bzw. D eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen in B bzw. A ist. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B^n \otimes_B \widehat{K} \arrow[r, "C"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & B^m \otimes_B \widehat{K} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \widehat{A}^n \otimes_{\widehat{A}} \widehat{K} \arrow[r, "D"] & \widehat{A}^m \otimes_{\widehat{A}} \widehat{K} \end{tikzcd}$$

kommutativ und daher ist $C = D$ betrachtet als Matrizen mit Einträgen in $\widehat{K}$. Also hat D Einträge in $B \cap \widehat{A} \subseteq K \cap \widehat{A} = A$. Folglich ist $(C, D) : (B^n, A^n, \mathrm{id}) \to (B^m, A^m, \mathrm{id})$ ein Morphismus, der unter dem Funktor auf (C, D) abgebildet wird. □

Bemerkung. Das obige Lemma bedeutet also, dass der Funktor $\mathrm{Fib}_X \to \widehat{\mathcal{C}}_{X,U}$ aus Satz 3.6 eine Hintereinanderausführung des Funktors $\mathrm{Fib}_X \to \widehat{C}_{X,U}$ und dem obigen Funktor ist. Tatsächlich hätte man Proposition 3.4 auch aus Proposition 3.3 und den obigen Argumenten herleiten können.

Proposition 4.3. *Sei X eine Kurve mit Funktionenkörper K. Weiter sei $\infty \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt, sodass $U := X \setminus \{\infty\}$ affin mit $\mathrm{Pic}(U) = 0$ ist. Es sei $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_X$ ein Vektorbündel endlichen Rangs und (M, N, u) bzw. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$ die zu $\mathscr{E}$ gehörigen Daten gemäß Korollar 3.7, also*

$$M = \mathscr{E}(U), N = \mathscr{E}_\infty \text{ und } \widehat{N} = \widehat{\mathscr{E}_\infty}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{E}) &= u(M) \cap N = \widehat{u}(M) \cap \widehat{N} \\ H^1(X, \mathscr{E}) &= (N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/(u(M) + N) = (N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} \widehat{K}_\infty)/(\widehat{u}(M) + \widehat{N}) \\ H^k(X, \mathscr{E}) &= 0 \text{ für alle } k > 1 \end{aligned}$$

Genauer ist $R\Gamma(X, \mathscr{E})$ quasi-isomorph zu dem Komplex

$$\begin{aligned} C := (M \times N &\longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K) \\ (x, y) &\longmapsto u(x) - y \end{aligned}$$

bzw. zu dem Komplex $\widehat{C}$, den man erhält, wenn man N durch $\widehat{N}$, K durch $\widehat{K}_\infty$ und u durch $\widehat{u}$ ersetzt.

Beweis. Da X separiert ist, können wir die Garbenkohomologie über die Čech-Kohomologie berechnen (vgl. [Liu06, Kap. 5, Thm. 2.19]). Ist V eine offene Umgebung von ∞, so erhalten wir für die Überdeckung $X = U \cup V$ den folgenden Čech-Komplex $C(U, V, \mathscr{E})$:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(U) \times \mathscr{E}(V) &\longrightarrow \mathscr{E}(U \cap V) \\ (f, g) &\longmapsto g_{|U \cap V} - f_{|U \cap V} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sei V_0 eine offene, affine Umgebung von ∞. Wir betrachten das induktive System aller offenen Umgebungen $V \subseteq V_0$ von ∞. Dann ist

$$U \cap \bigcap_{\infty \in V \subseteq V_0} V \setminus \{\infty\} = \{\eta\}.$$

Andernfalls gäbe es ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R := \mathcal{O}_X(V_0)$, welches von 0 und ∞ verschieden ist. Da R als Dedekindring eindimensional ist, folgt $\mathfrak{p} \not\subseteq \infty$ und daher gibt es ein Element $g \in \mathfrak{p} \setminus \infty$. Dann ist $D(g)$ eine offene Umgebung von ∞ in V_0, die aber nicht $\mathfrak{p}$ enthält. Folglich kann $\mathfrak{p}$ nicht in dem obigen Durchschnitt liegen.

Wir wenden den Funktor $\varinjlim_{V \ni \infty}$ auf den Komplex 4.1 an und erhalten so den Komplex

$$\mathscr{E}(U) \times \mathscr{E}_\infty \longrightarrow \mathscr{E}_\eta,$$

welcher dem Komplex

$$C = (M \times N \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)$$

entspricht. Da der induktive Limes ein exakter Funktor ist (vgl. [Rot09, Prop. 5.33]), gilt für $i \geq 0$

$$H^i C = H^i(\varinjlim_{V \ni \infty} C(U, V, \mathscr{E})) \cong \varinjlim_{V \ni \infty} H^i(C(U, V, \mathscr{E})).$$

Für jede offene Umgebung $V \subseteq V_0$ von ∞ gibt es eine offene, affine Umgebung $V' \subseteq V$. Dann ist die Überdeckung (U, V') eine Verfeinerung von (U, V). Für $i \geq 0$ gilt dann $H^i(C(U, V, \mathscr{E})) \cong H^i(C(U, V', \mathscr{E}))$ (vgl. [MO15, Thm. 7.2.1]), das heißt, die Übergangsabbildungen im obigen induktiven Limes von Kohomologiegruppen sind stets Isomorphismen. Es folgt

$$H^i C \cong H^i(C(U, V, \mathscr{E})) \cong H^i(X, \mathscr{E})$$

und folglich sind

$$H^0(X, \mathscr{E}) \cong H^0 C \cong u(M) \cap N$$

und

$$H^1(X, \mathscr{E}) \cong H^1 C \cong (N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/(u(M) + N).$$

Aufgrund der Kategorienäquivalenz in Lemma 4.2 ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \otimes K \arrow[r, "u"] \arrow[d] & N \otimes K \arrow[d] \\ M \otimes \widehat{K}_\infty \arrow[r, "\widehat{u}"] & N \otimes \widehat{K}_\infty \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei die vertikalen Pfeile die kanonischen Abbildungen sind. Deshalb ist $u(M) = \widehat{u}(M)$ und wegen $N \subseteq \widehat{N}$ folgt daher $u(M) \cap N = \widehat{u}(M) \cap \widehat{N}$. Für den Fall von H^1 reicht es zu zeigen, dass die die kanonische Abbildung $(N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/N \to (N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}} \widehat{K})/\widehat{N}$ ein Isomorphismus ist. Denn dann gilt aufgrund des dritten Isomorphiesatzes für Moduln

$$\begin{aligned} (N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/(u(M) + N) &\cong ((N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/N)/(u(M) + N)/N \\ &\cong ((N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}} \widehat{K})/\widehat{N})/(\widehat{u}(M) + \widehat{N})/\widehat{N} \\ &\cong (N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}} \widehat{K})/(\widehat{u}(M) + \widehat{N}) \end{aligned}$$

Wir zeigen also, dass $(N \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} K)/N \to (N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}} \widehat{K})$ bijektiv ist. Da N ein freier, endlich erzeugter $\mathcal{O}_{X,\infty}$-Modul ist, dürfen wir $N = \mathcal{O}_{X,\infty}$ annehmen. Damit wird die Abbildung zu $K/\mathcal{O}_{X,\infty} \to \widehat{K}_\infty/\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$, von der wir schon in Lemma 4.1 gesehen haben, dass sie bijektiv ist. □

Die folgende Proposition dient zur Vorbereitung des nachfolgenden Abschnitts.

Proposition 4.4 (vgl. [FF18, Prop. 5.3.4])**.** *Sei X eine Kurve. Weiter sei $\infty \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt, sodass $U := X \setminus \{\infty\}$ affin ist. Sei t ein uniformisierendes Element des diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}_{X,\infty}$ und $\mathscr{E}$ ein Vektorbündel auf X mit zugehörigen Daten (M, N, u) bzw. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$. Dann korrespondiert das Vektorbündel $\mathscr{E}(k[\infty]) := \mathscr{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k[\infty])$ für $k \in \mathbb{Z}$ zu den Daten*

$$(M, t^{-k}N, u) \quad \textit{bzw.} \quad (M, t^{-k}\widehat{N}, \widehat{u}).$$

Beweis. Wegen $\infty \notin U$ gilt

$$\mathscr{E}(k[\infty])(U) = \mathscr{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(k[\infty])(U) = M \otimes_B B \cong M.$$

Für den Halm $\mathcal{O}_X(k[\infty])_\infty$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(k[\infty])_\infty &= \{f \in K(X)^\times \mid \mathrm{div}(f)_\infty - k[\infty] \geq 0\} \cup \{0\} \\ &= \{f \in K(X)^\times \mid \mathrm{ord}_\infty(f) \geq -k\} \cup \{0\} = t^{-k}\mathcal{O}_{X,\infty} \end{aligned}$$

und folglich ist

$$\mathscr{E}(k[\infty])_\infty = \mathscr{E}_\infty \otimes_{\mathcal{O}_{X,\infty}} \mathcal{O}_X(k[\infty])_\infty \cong t^{-k}N.$$

Dann ist auch

$$\widehat{\mathscr{E}(k[\infty])}_\infty \cong t^{-k}\widehat{N}.$$

□

4.2 Ein Kriterium zur Euklidizität von B

Wir betrachten nun vollständige Kurven $(X, \deg)$, welche einen abgeschlossenen Punkt $\infty \in |X|$ besitzen, sodass $\deg(\infty) = 1$ ist und $U := X \setminus \{\infty\}$ affin ist. Wir werden später wieder $\mathrm{Pic}(U) = 0$ annehmen und unser Ziel ist es dann, für diese Situation ein Kriterium zu finden, das angibt, wann $\mathcal{O}_X(U)$ (fast) euklidisch ist. Doch zunächst beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.5 (vgl. [FF18, Lemme 5.4.1])**.** *Sei $(X, \deg)$ eine vollständige Kurve. Weiter sei $\infty \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt, sodass $\deg(\infty) = 1$ und $X \setminus \{\infty\}$ affin ist. Dann ist $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ genau dann, wenn die von der Gradfunktion induzierte Abbildung $\deg : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Wir setzen $U := X \setminus \{\infty\}$ und nehmen zunächst $\mathrm{Pic}(U) = 0$ an. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $[\mathcal{O}_X(k[\infty])] \in \mathrm{Pic}(X)$ und

$$\deg([\mathcal{O}_X(k[\infty])]) = \deg(k[\infty]) = k \deg(\infty) = k,$$

was die Surjektivität zeigt. Sei $[\mathcal{O}_X(D)] \in \mathrm{Pic}(X)$ mit $\deg([\mathcal{O}_X(D)]) = 0$ für einen Divisor $D = \sum_{x \in |X|} m_x[x] \in \mathrm{Div}(X)$. Wegen $\mathrm{Pic}(U) = 0$ ist D_U ein Hauptdivisor, also gibt es ein Element $f \in K(X)^\times$ mit $D_U = \mathrm{div}(f)_U$. Dann ist $\mathrm{div}(f) = D_U + \mathrm{ord}_\infty(f)[\infty]$ und weil X vollständig ist, folgt daraus $\deg(D_U) = -\mathrm{ord}_\infty(f)$. Somit ist

$$0 = \deg([\mathcal{O}_X(D)]) = \deg(D) = \deg(D_U) + m_\infty \deg(\infty) = -\mathrm{ord}_\infty(f) + m_\infty.$$

Folglich ist $m_\infty = \mathrm{ord}_\infty(f)$ und damit $D = \mathrm{div}(f)$, woraus die Injektivität folgt.

Sei umgekehrt $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus und ein Divisor $D \in \mathrm{Div}(U)$ gegeben. Indem wir D als Divisor auf X auffassen, setzen wir $k := \deg(\mathcal{O}_X(D))$. Da auch $\deg([\mathcal{O}_X(k[\infty])]) = k$ ist, folgt aus der Injektivität der Gradfunktion $[\mathcal{O}_X(D)] = [\mathcal{O}_X(k[\infty])]$. Also sind beide Divisoren zueinander linear äquivalent, das heißt, es existiert ein Element $f \in K(X)^\times$ mit

$$D = k[\infty] + \mathrm{div}(f).$$

Wegen $\infty \notin U$ folgt daraus $D = \mathrm{div}(f)_U$ und somit ist D ein Hauptdivisor. Das zeigt die Aussage. □

Für eine Kurve $(X, \deg)$ wie in dem obigen Lemma mit $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ setzen wir für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_X(k) := \mathcal{O}_X(k[\infty]).$$

Lemma 4.6. *Sei $(X, \deg)$ eine vollständige Kurve und $\infty \in |X|$ ein abgeschlossener Punkt mit $\deg(\infty) = 1$, sodass $X \setminus \{\infty\}$ affin ist mit $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$. Dann ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ für $k < 0$ und für $k \in \mathbb{Z}$ gibt es Injektionen*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(k+1))$$

sowie Surjektionen

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(k+1)).$$

Gibt es insbesondere eine ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ mit $H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$, so ist für alle $k \geq d$ auch $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

Beweis. Wir setzen $B := \mathcal{O}_X(X \setminus \{\infty\})$. Weiter sei $E := \mathcal{O}_X(X)$ der Grundkörper von X. Wegen $E = B \cap \mathcal{O}_{X,\infty}$ ist

$$\deg := -\mathrm{ord}_\infty : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

eine euklidische Gradfunktion auf B (vgl. Lemma 2.5 und Proposition 2.8). Für ein Element $f \in K(X)^\times$ und eine ganze Zahl k ist der Divisor $\operatorname{div}(f)+k[\infty]$ genau dann effektiv, falls die Divisoren $\operatorname{div}(f)_{X\setminus\{\infty\}}$ und $(\operatorname{ord}_\infty(f)+k)[\infty]$ effektiv sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned}H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) &= \{f \in K(X)^\times \mid \operatorname{div}(f) + k[\infty] \geq 0\} \cup \{0\}\\ &= \{f \in B \mid \operatorname{ord}_\infty(f) \geq -k\}\\ &= \{f \in B \mid \deg(f) \leq k\} = \operatorname{Fil}_k(B).\end{aligned}$$

Folglich ist $H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ für $k < 0$ und wir haben die folgenden Injektionen

$$E = H^0(X, \mathcal{O}_X) \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \subseteq H^0(X, \mathcal{O}_X(2)) \subseteq \dots\ ,$$

welche der Filtrierung von B über den Grad entsprechen. Sei $A = \mathcal{O}_{X,\infty}$ uniformisiert durch t und $K := K(X)$ der Funktionenkörper von X. Dann ist nach Proposition 4.3 und 4.4

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) \cong K/(B + t^{-k}A)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Offenbar ist dann die kanonische Abbildung

$$K/(B + t^{-k}A) \longrightarrow K/(B + t^{-k-1}A)$$

surjektiv. □

Beispiel. Ist $X = \operatorname{Proj}(P)$ wie in Satz 2.13, $t \in P_1$, $V_+(t) = \{\infty\}$ und $D_+(t) = \operatorname{Spec}(B)$. Dann ist gemäß 2.13(v) $X \cong X(B, \mathcal{O}_{X,\infty})$. Zudem haben wir dort im Beweis gesehen, dass für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}P_k &\cong \operatorname{Fil}_k(B) = H^0(X, \mathcal{O}_X(k))\\ b &\mapsto \frac{b}{t^k}\end{aligned}$$

gilt. Somit ist

$$X \cong \operatorname{Proj}(\bigoplus_{d\in\mathbb{N}} H^0(X, \mathcal{O}_X(d)))$$

und die Inklusionen aus Lemma 4.6 sind durch das Produkt mit $t \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ gegeben

$$P_0 \xrightarrow{\cdot t} P_1 \xrightarrow{\cdot t} P_2 \xrightarrow{\cdot t} \dots$$

Wir kommen nun zu dem Kriterium für die Euklidizität von B.

Satz 4.7. *Sei (X, deg) eine vollständige Kurve, sodass die induzierte Gradfunktion* $\deg : \operatorname{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ *ein Isomorphismus ist, und sei ∞ ein Punkt auf X, sodass* $\deg(\infty) = 1$ *und* $X \setminus \{\infty\} = \operatorname{Spec}(B)$ *affin ist. Mit* $\deg := -\operatorname{ord}_\infty : K(X) \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *gilt dann:*

i) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $(B, \deg)$ *ist euklidisch*
- $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$

Wenn das der Fall ist, so ist für alle $k \geq -1$: $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- $(B, \deg)$ *ist fast euklidisch*
- $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$

Wenn das der Fall ist, so ist für alle $k \geq 0$: $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

Beweis. Wir folgen dem Beweis in [FF18, Prop. 5.4.2]. Nach Lemma 4.5 ist B ein Hauptidealring. Wir schreiben $A := \mathcal{O}_{X,\infty}$ mit einem uniformisierenden Element $t \in A$ und $K := K(X)$. Mit Proposition 4.3 und 4.4 gilt

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = K/(B + tA) \qquad \text{und} \qquad H^1(X, \mathcal{O}_X) = K/(B + A).$$

Also ist die Aussage $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$ äquivalent zu $K = B + tA$ und genauso ist $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ äquivalent zu $K = B + A$.

Sei $(B, \deg)$ euklidisch. Für ein Element $\frac{x}{y} \in K = \mathrm{Quot}(B)$ mit $x, y \in B$ und $y \neq 0$ gibt es dann Elemente $a, b \in B$ mit $x = ay + b$ und $\deg(b) < \deg(y)$. Daher ist $\mathrm{ord}_\infty(\frac{b}{y}) = -\deg(\frac{b}{y}) > 0$ und folglich $\frac{b}{y} \in tA$. Also folgt $\frac{x}{y} = a + \frac{b}{y} \in B + tA$ und damit ist $K = B + tA$. Ist umgekehrt $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$, so folgt $K = B + tA$. Sind $x, y \in B$ mit $y \neq 0$, so können wir $\frac{x}{y} = b + ta$ mit $a \in A$ und $b \in B$ schreiben. Dann ist $x = by + tay$ und folglich $tay \in B$. Wegen $ta \in tA$ ist $\deg(ta) < 0$ und daher $\deg(tay) < \deg(y)$. Also ist $(B, \deg)$ euklidisch.

Wir beweisen nun die zweite Aussage und nehmen an, dass $(B, \deg)$ fast euklidisch ist. Für ein Element $\frac{x}{y} \in K = \mathrm{Quot}(B)$ mit $x, y \in B$ und $y \neq 0$ unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle. Falls $\deg(y) = 0$ ist, so folgt $y \in B^\times$ und $\frac{x}{y} \in B \subseteq B + A$. Falls $\deg(y) \geq 1$ ist, so gibt es Elemente $a, b \in B$ mit $x = ay + b$ und $\deg(b) \leq \deg(y)$. Daher ist $\mathrm{ord}_\infty(\frac{b}{y}) = -\deg(\frac{b}{y}) \geq 0$ und folglich $\frac{b}{y} \in A$. Also folgt $\frac{x}{y} = a + \frac{b}{y} \in B + A$ und damit ist $K = B + A$. Ist umgekehrt $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$, so folgt $K = B + A$. Weil X vollständig ist, ist $A \cap B = \mathcal{O}_X(X)$ ein Körper und daher sind alle Elemente vom Grad 0 invertierbar in B. Sind $x, y \in B$ mit $y \neq 0$, so können wir $\frac{x}{y} = b + a$ mit $a \in A$ und $b \in B$ schreiben. Dann ist $x = by + ay$ und folglich $ay \in B$. Wegen $a \in A$ ist $\deg(a) \leq 0$ und daher $\deg(ay) \leq \deg(y)$. Also ist $(B, \deg)$ fast euklidisch.

Die zusätzliche Behauptung folgt dann direkt aus Lemma 4.6. □

Die Fargues-Fontaine-Kurve ist ein Beispiel für eine Kurve, welche die zweite Bedingung, aber nicht die erste, des vorhergehenden Satzes erfüllt (vgl. [FF18, Exemple 5.4.3]). Dahingegen ist für glatte, projektive, zusammenhängende Kurven über einem Körper, die die Voraussetzungen des Satzes und die zweite Bedingung erfüllen, automatisch auch die erste Bedingung erfüllt. Tatsächlich handelt es sich dann um die projektive Gerade:

Lemma 4.8. *Sei* $(X, \deg)$ *eine glatte, projektive, zusammenhängende Kurve über einem Körper* k *wie in Abschnitt 1.2, das heißt* $\deg(x) := [\kappa(x) : k]$ *für alle* $x \in |X|$. *Weiter sei* $\infty \in |X|$ *ein abgeschlossener Punkt mit* $\deg(\infty) = 1$. *Ist dann* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, *so gilt auch* $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$. *Tatsächlich gilt* $X \cong \mathbb{P}^1_k$.

Beweis. Wegen $\kappa(\infty) = k$ ist ∞ ein k-rationaler Punkt. Folglich ist X geometrisch zusammenhängend (vgl. [GW10, Exercise 5.23]). Da X ein normales k-Schema endlichen Typs ist, folgt daraus, dass X geometrisch irreduzibel ist (vgl. [GW10, Exercise 6.20]). Also hat die Kurve X das arithmetische Geschlecht

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$$

(vgl. [Liu06, Kap. 7, Def. 3.19]). Daher ist X isomorph zur projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ über k (vgl. [Liu06, Kap. 7, Prop. 4.1]). Für die projektive Gerade gilt $H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)) = 0$ (vgl. [Liu06, Kap. 5, Lemma 3.1]). Dort bezeichnet $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)$ allerdings die Twistinggarbe nach Serre, jedoch stimmt diese Notation für $\mathbb{P}^1_k = \mathrm{Proj}(k[x_0, x_1])$ mit unserer überein, denn mit dem Cartier-Divisor $D = [(D_+(x_i), (\frac{x_0}{x_i})^{-1})_{0 \le i \le 1}]$ ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(D)$$

und fassen wir D als Weil-Divisor auf, so erhalten wir

$$D = \sum_{x \in |D_+(x_0)|} \mathrm{ord}_x(1)[x] + \sum_{x \in |D_+(x_1)|} \mathrm{ord}_x(\tfrac{x_1}{x_0})[x] = \mathrm{ord}_\infty(\tfrac{x_1}{x_0})[\infty] = -[\infty],$$

wobei ∞ dem Primideal $(x_0) \in \mathrm{Spec}(k[x_0]) = D_+(x_1) \subseteq \mathbb{P}^1_k$ entspricht. Folglich ist

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-1)) = 0.$$

□

Unser Kriterium in Satz 4.7 liefert also innerhalb der klassischen algebraischen Geometrie keine Beispiele von fast euklidischen Hauptidealringen, die nicht euklidisch sind.

Literaturverzeichnis

[BIV89] R. Brüske, F. Ischebeck und F. Vogel. *Kommutative Algebra*. Mannheim [u.a.]: BI-Wissenschafts-Verlag, 1989.

[Bos13] S. Bosch. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. London: Springer London, 2013.

[FF18] L. Fargues und J.-M. Fontaine. *Courbes et fibrés vectoriels en theorie de Hodge p-adique*. Astérisque, 2018. URL: `https://webusers.imj-prg.fr/~laurent.fargues/Courbe_fichier_principal.pdf`.

[GW10] U. Görtz und T. Wedhorn. *Algebraic Geometry I : Schemes With Examples and Exercises*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden, 2010.

[Liu06] Q. Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford: Oxford University Press, 2006.

[Mat86] H. Matsumura. *Commutative ring theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

[MO15] D. Mumford und T. Oda. *Algebraic Geometry II*. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2015.

[Neu92] J. Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

[Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. 2. New York, NY: Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[Sch17] P. Schneider. *Galois representations and (Phi, Gamma)-modules*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und Zitate kenntlich gemacht habe.

Essen, 24. September 2020