UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Bachelorarbeit

Die Freiheit des universellen Heckemoduls auf regulären Bäumen

---

Vorgelegt der
Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

Von:
Jonas Keppel
Matr.-Nr. 2282057

Betreut von:
Prof. Dr. J. Kohlhaase

14. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Bachelorarbeit handelt davon, reguläre Bäume zu klassifizieren, die Freiheit des Heckemoduls darauf zu beweisen und diesen Freiheitssatz im Zusammenhang mit Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe eines lokalen Körpers anzuwenden.
Nach dem Zusammenstellen einiger Grundlagen der Graphentheorie werden wir zu Beginn einen Klassifikationssatz für reguläre Bäume formulieren, der besagt, dass für $k \in \mathbb{N}$ der k-reguläre Baum X_k bis auf Isomorphie eindeutig ist. Daraufhin treffen wir einige Vorbereitungen, um den Beweis dieses Satzes schließlich zu erbringen. Als Nächstes werden wir den Modul $C(X, R)$ der Abbildungen von der Knotenmenge eines Graphen X in einen Ring R sowie den Heckeoperator T betrachten, wobei wir Aussagen zur Freiheit und zu Eigenwerten darlegen können. Um neue Erkenntnisse zu gewinnen, befassen wir uns mit Abbildungen mit endlichem Träger, was uns zum $R[T]$-Modul $C_c(X, R)$ führt. Als Hauptsatz dieser Arbeit werden wir dann feststellen, dass $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ für $k \geq 2$ frei ist, was wir mithilfe von filtrierten sowie zugeordneten graduierten Ringen und Moduln letztlich beweisen. Um diesen Freiheitssatz auf Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe anzuwenden, werden wir für einen nicht-archimedischen, lokalen Körper K die Gitter von K^2 studieren. Durch die Operation von K^* auf der Menge aller Gitter via Multiplikation erhalten wir Äquivalenzklassen von Gittern, die wir als Knoten eines Graphen $\mathfrak{B}$ verstehen und für die wir einen Abstands- und somit Adjazenzbegriff erarbeiten können. Da sich herausstellt, dass $\mathfrak{B}$ der $(q+1)$-regulärer Baum X_{q+1} ist, wobei q für die Mächtigkeit des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}$ von K steht, können wir erneut $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ untersuchen. Neben der Isomorphie zur kompakten Induktion $\mathrm{c\text{-}ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ liefert uns dies Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(K)$. Zuletzt werden wir als Anwendung unseres Freiheitssatzes zeigen, dass für jedes echte Ideal $I \subsetneq R[T]$ die Darstellung $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ von $\mathrm{GL}_2(K)$ eine einfache Quotientendarstellung besitzt, was auch zu einem Ausblick auf supersinguläre Darstellungen führt.

2 Klassifikation regulärer Bäume

In diesem Kapitel werden wir mit einem Klassifikationssatz für reguläre Bäume den Grundstein für die weiteren Abschnitte der Arbeit legen. Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir einige vorbereitende Ergebnisse zu (regulären) Bäumen. Da insbesondere in der Graphentheorie die Notationen in der Literatur nicht einheitlich sind, werden wir vorab einige grundlegende Definitionen und Resultate darlegen, die als dem Leser bekannt vorausgesetzt werden. Daher werden wir die Aussagen in allen Abschnitten, die den Namen „Grundlagen“ tragen (wie im folgenden Abschnitt 2.1), nicht bzw. nur in Ausnahmefällen beweisen.
In der gesamten Arbeit gilt, dass die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Null enthalten und zudem werden wir die Elemente 0 und 1 häufig mit einem Index versehen, um zu notieren, woher sie stammen. Falls wir diesen aus verschiedenen Gründen (Redundanz, bessere Lesbarkeit etc.) weglassen, ist dennoch stets aus dem Zusammenhang ersichtlich, um welche Elemente es sich handelt.

2.1 Grundlagen der Graphentheorie

Definition 2.1. *Ein **Graph** X ist ein Tupel $X = \big(\mathrm{V}(X), \mathrm{E}(X)\big)$, wobei $\mathrm{V}(X)$ eine nicht-leere Menge, die sogenannte Knotenmenge (engl. vertices), und $\mathrm{E}(X)$ eine Menge, die sogenannte Kantenmenge (engl. edges), ist, mit der Eigenschaft*

$$\mathrm{E}(X) \subseteq \big\{M \;\big|\; M \subseteq \mathrm{V}(X) \textit{ mit } |M| = 2\big\}.$$

*Wir schreiben manchmal $u \sim v$ (sprich: u und v sind **adjazent** bzw. **benachbart**) für $u, v \in \mathrm{V}(X)$, falls $\{u, v\} \in \mathrm{E}(X)$.*
*Der Graph X heißt **endlich**, falls $\big|\mathrm{V}(X)\big| < \infty$.*

Bemerkung 2.2.

i) In der Literatur werden diese Graphen oftmals „**einfache**“ Graphen genannt und wir wollen durch Definition 2.1 die Begriffe „gerichtet“, „Mehrfachkante“ und „Schleife“ für diese Arbeit ausschließen.

ii) Ist ein Graph endlich, so ist die Kantenmenge als Teilmenge der Potenzmenge der endlichen Knotenmenge ebenfalls endlich.

Definition 2.3. *Sei X ein endlicher Graph, dann definieren wir die **Adjazenzmatrix** von X als die Matrix $\mathrm{A}(X) := \Big(\mathrm{A}_{u,v}\Big)_{u,v \in \mathrm{V}(X)} \in \{0,1\}^{|\mathrm{V}(X)| \times |\mathrm{V}(X)|}$ mit*

$$\mathrm{A}_{u,v} := \begin{cases} 1 & \textit{falls } \{u, v\} \in \mathrm{E}(X), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung 2.4.

i) Da $\{u,v\} = \{v,u\}$ für alle $u, v \in \mathrm{V}(X)$ erfüllt ist, gilt stets $\mathrm{A}(X) = \mathrm{A}(X)^T$, was bedeutet, dass die Adjazenzmatrix symmetrisch ist.

ii) Da $\{u\} \notin \mathrm{E}(X)$ für alle $u \in \mathrm{V}(X)$ gilt, ist $\mathrm{A}_{u,u} = 0$, weshalb alle Diagonaleinträge der Adjazenzmatrix 0 sind.

Im Folgenden seien X und Y stets Graphen und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Definition 2.5.

i) Eine Abbildung $\gamma : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{V}(Y)$ *heißt* ***Homomorphismus von Graphen****, falls sie die Eigenschaft*

$$\{u,v\} \in \mathrm{E}(X) \;\Rightarrow\; \big\{\gamma(u), \gamma(v)\big\} \in \mathrm{E}(Y)$$

erfüllt.

ii) Darüber hinaus nennen wir γ *einen* ***Isomorphismus von Graphen****, falls* γ *zudem bijektiv ist und*

$$\{u,v\} \in \mathrm{E}(X) \;\Leftrightarrow\; \big\{\gamma(u), \gamma(v)\big\} \in \mathrm{E}(Y)$$

gilt.

iii) X *und* Y *heißen* ***isomorph*** *(in Zeichen:* $X \cong Y$*), falls ein Isomorphismus zwischen* X *und* Y *existiert.*

Definition 2.6. *Sei* $x \in \mathrm{V}(X)$ *ein beliebiger Knoten, so definieren wir den* ***Grad des Knotens*** x *(auch* ***Knotengrad*** *oder* ***Valenz*** *genannt) durch*

$$\deg(x) := \Big|\big\{\{u,v\} \in \mathrm{E}(X) \;\big|\; x \in \{u,v\}\big\}\Big|.$$

Bemerkung 2.7. Der Knotengrad eines Knotens $x \in \mathrm{V}(X)$ ist somit die Anzahl der Kanten, die x mit anderen Knoten verbinden. Da wir ausschließlich einfache Graphen betrachten, ist dies also die Anzahl der Nachbarn von x, d.h. es gilt

$$\deg(x) = \Big|\big\{u \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; u \sim x\big\}\Big|.$$

Definition 2.8. *Sei* $k \in \mathbb{N}$.

i) X *heißt* ***lokal endlich****, falls jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn besitzt, d.h. falls* $\deg(x) < \infty$ *für alle* $x \in \mathrm{V}(X)$ *gilt.*

ii) X *heißt* ***(k-)regulär****, falls jeder Knoten gleich viele (genau* k*) Nachbarn besitzt, d.h. falls* $\deg(x) = k$ *konstant ist für alle* $x \in \mathrm{V}(X)$*.*

Definition 2.9.

i) *Ein* ***Weg*** *w in X ist eine endliche Folge von benachbarten Knoten, das heißt $w = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \mathrm{V}(X)$ für $i = 1, \dots, n$ und $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathrm{E}(X)$ für $i = 1, \dots, n-1$. Die* ***Länge des Weges*** *w ist die Anzahl der Kanten im Weg, also $n - 1$, und wir sagen w ist ein Weg von x_1 nach x_n.*

ii) *Ein* ***Kantenzug*** *(auch* ***Pfad****) in X ist ein Weg $w = (x_1, \dots, x_n)$, bei dem jeder Knoten nur einmal passiert wird, d.h. $x_i \neq x_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$.*

iii) *Ein Weg $w = (x_1, \dots, x_n)$ in X heißt* ***geschlossen****, falls $x_1 = x_n$ gilt.*

iv) *Ein geschlossener Weg $w = (x_1, \dots, x_n)$ in X heißt* ***Zyklus****, falls $n \geq 4$ gilt und $(x_1, \dots, x_{n-1})$ ein Kantenzug ist.*

v) *X heißt* ***kreisfrei****, falls X keinen Zyklus enthält.*

vi) *X heißt* ***zusammenhängend****, falls für jedes Paar $u, v \in \mathrm{V}(X)$ ein Weg von u nach v in X existiert.*

vii) *Sei $x \in \mathrm{V}(X)$ ein beliebiger Knoten, so definieren wir die* ***Zusammenhangskomponente*** *von x durch*

$$\mathrm{C}(x) := \big\{ u \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; \textit{es existiert ein Weg von } x \textit{ nach } u \big\}.$$

Definition 2.10. *Der* ***Abstand*** *zweier Knoten wird definiert durch die Funktion $\mathrm{d} : \mathrm{V}(X) \times \mathrm{V}(X) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit*

$$\mathrm{d}(u, v) := \begin{cases} l & \textit{falls } v \in \mathrm{C}(u), \\ \infty & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei l die Länge eines kürzesten Weges von u nach v ist.

Bemerkung 2.11. Mit unserer Definition eines Weges erhalten wir insbesondere $\mathrm{d}(u, u) = 0$ für alle $u \in \mathrm{V}(X)$. Zudem bemerken wir, dass ein kürzester Weg schon ein Kantenzug sein muss, da er andernfalls durch Auslassen des Teils zwischen dem sich wiederholenden Knoten verkürzbar wäre.

Definition 2.12.

i) *X heißt* ***Teilgraph*** *von Y, falls $\mathrm{V}(X) \subseteq \mathrm{V}(Y)$ und $\mathrm{E}(X) \subseteq \mathrm{E}(Y)$ gilt.*

ii) *X heißt* ***induzierter Teilgraph*** *von Y, falls X ein Teilgraph von Y ist mit*

$$\{u, v\} \in \mathrm{E}(Y) \;\Rightarrow\; \{u, v\} \in \mathrm{E}(X)$$

für alle $u, v \in \mathrm{V}(X)$.

Lemma 2.13.

i) Jede Zusammenhangskomponente ist (betrachtet als induzierter Teilgraph des ursprünglichen Graphen) ein maximaler zusammenhängender Teilgraph.

ii) X ist genau dann zusammenhängend, wenn X aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

Beweis: Auf $\mathrm{V}(X)$ können wir eine Äquivalenzrelation definieren, wobei zwei Knoten genau dann in Relation stehen, wenn zwischen ihnen ein Weg existiert. Die Äquivalenzklassen dieser Relation sind genau die Zusammenhangskomponenten. Daraus folgt die Aussage des Lemmas (vergleiche auch Theorem 2.2.1 aus Kapitel 2.2 von [Ore62, S. 23 f.]). □

Definition 2.14. *Ein **Baum** ist ein zusammenhängender kreisfreier Graph. Wir nennen Knoten mit Grad* 1 ***Blätter**, alle anderen Knoten heißen **innere Knoten**.*

Im Folgenden werden wir uns noch einige spezielle Graphen als Beispiele anschauen, von denen wir manche später benutzen bzw. diese wiedererkennen werden. Wir beachten dabei, dass die Einschränkungen an $n \in \mathbb{N}$ nachfolgend oftmals variieren.

Definition 2.15. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der **Pfad** $\mathbf{P}_n$ ist ein Graph mit n Knoten und $n-1$ Kanten definiert durch*

$$\mathrm{V}(\mathrm{P}_n) := \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{P}_n) := \big\{\{x_i, x_{i+1}\} \bigm| i = 1, \ldots, n-1\big\}.$$

Definition 2.16. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Der **Kreisgraph** $\mathbf{C}_n$ ist ein Graph mit n Knoten und n Kanten definiert durch*

$$\mathrm{V}(\mathrm{C}_n) := \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{C}_n) := \big\{\{x_i, x_{i+1}\} \bigm| i = 1, \ldots, n-1\big\} \cup \big\{\{x_n, x_1\}\big\}.$$

Definition 2.17.

*i) Ein **vollständiger Graph** ist ein Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.*

ii) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so definieren wir den Graphen $\mathbf{K}_n$ mit n Knoten und $\binom{n}{2}$ Kanten durch

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}_n) := \{x_1, \ldots, x_n\} \quad \textit{und}$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{K}_n) := \big\{\{x_i, x_j\} \bigm| 1 \leq i < j \leq n\big\}.$$

Lemma 2.18. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so ist jeder vollständige Graph X mit $\left|\mathrm{V}(X)\right| = n$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, genauer: isomorph zu K_n.*

Beweis: Jede Bijektion $\gamma : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{V}(\mathrm{K}_n)$ ist ein Isomorphismus von Graphen. $\square$

Definition 2.19. *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der **Sterngraph** $\mathbf{S}_n$ ist ein Graph mit $n+1$ Knoten und n Kanten definiert durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) &:= \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \quad \textit{und} \\ \mathrm{E}(\mathrm{S}_n) &:= \big\{\{x_0, x_i\} \bigm| i = 1, \ldots, n\big\}. \end{aligned}$$

Definition 2.20. *Ein Graph X heißt **bipartit**, falls es eine disjunkte Zerlegung $\mathrm{V}(X) = V_1 \,\dot\cup\, V_2$ der Knotenmenge gibt, sodass für alle Kanten $\{u, v\} \in \mathrm{E}(X)$ gilt:*

$$(u \in V_1 \wedge v \in V_2) \vee (u \in V_2 \wedge v \in V_1).$$

Definition 2.21. *Seien $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Der **vollständige bipartite Graph** $\mathbf{K}_{m,n}$ ist definiert durch*

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}(\mathrm{K}_{m,n}) := V_1 \,\dot\cup\, V_2, \textit{ wobei } V_1 \textit{ und } V_2 \textit{ bel. Mengen mit } |V_1| = m, |V_2| = n \textit{ und} \\ &\mathrm{E}(\mathrm{K}_{m,n}) := \big\{\{u, v\} \bigm| u \in V_1, v \in V_2\big\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.22.

i) Alle oben genannten speziellen Graphen sind, ähnlich wie in Lemma 2.18, jeweils bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

ii) Es gilt $\mathrm{S}_n \cong \mathrm{K}_{1,n}$ und $\mathrm{K}_{n,m} \cong \mathrm{K}_{m,n}$.

2.2 Klassifikationssatz

Da wir uns im Laufe der Arbeit mit dem universellen Heckemodul auf regulären Bäumen befassen wollen, müssen wir diese Graphen zuvor genauer verstehen. Dabei stellt sich heraus, dass die Forderungen an ein solches Objekt so stark sind, dass die Form eines regulären Baumes genau vorgegeben ist. Präziser formuliert bedeutet das:

Satz 2.23 (Klassifikationssatz)**.** *Für $k \in \mathbb{N}$ existiert bis auf Isomorphie genau ein k-regulärer Baum, den wir in dieser Arbeit stets mit X_k bezeichnen wollen.*
Ferner gilt:

(a) $\mathrm{X}_0 \cong \mathrm{K}_1$,

(b) $\mathrm{X}_1 \cong \mathrm{K}_2$,

(c) *Für $k \geq 2$ ist X_k nicht endlich.*

Beweis: $\underline{k = 0}$: Sei X ein 0-regulärer Baum. Da X ein Graph ist, gilt $\mathrm{V}(X) \neq \emptyset$, also existiert $x_1 \in \mathrm{V}(X)$. Aufgrund der 0-Regularität kann x_1 keinen Nachbarn haben und da X als Baum zusammenhängend ist, kann es auch keinen anderen Knoten in X geben. Somit erhalten wir $\mathrm{V}(X) = \{x_1\}$ und $\mathrm{E}(X) = \emptyset$. Per Definition von K_1 gilt also schon $X \cong \mathrm{K}_1$ und somit haben wir im Fall $k = 0$ die Existenz (K_1 ist natürlich auch kreisfrei), die Eindeutigkeit sowie Aussage (a) bereits bewiesen. Zur Visualisierung betrachten wir den Ausschnitt für $k = 0$ in Abbildung 1.

$\underline{k = 1}$: Sei X ein 1-regulärer Baum. Da X ein Graph ist, gilt $\mathrm{V}(X) \neq \emptyset$, also existiert $x_1 \in \mathrm{V}(X)$. Aufgrund der 1-Regularität hat x_1 genau einen Nachbarn x_2. Damit haben x_1 und x_2 bereits jeweils genau einen Nachbarn, weshalb es keinen weiteren Knoten in X geben kann, da X ansonsten nicht zusammenhängend wäre. Somit erhalten wir $\mathrm{V}(X) = \{x_1, x_2\}$ und $\mathrm{E}(X) = \big\{\{x_1, x_2\}\big\}$. Per Definition von K_2 gilt also schon $X \cong \mathrm{K}_2$ und somit haben wir im Fall $k = 1$ die Existenz (K_2 ist natürlich auch kreisfrei), die Eindeutigkeit sowie Aussage (b) bereits bewiesen. Hierbei betrachten wir zur Visualisierung den Ausschnitt für $k = 1$ in Abbildung 1.

$\underline{k \geq 2}$: Dieser Fall erfordert einen deutlich höheren Aufwand, da insbesondere die Eindeutigkeit formal anspruchsvoller ist. Der Beweis hiervon wird sich somit noch über den Rest von Abschnitt 2.2 erstrecken.
Die Existenz von X_k beweisen wir, indem wir einen k-regulären Baum durch sukzessives Hinzufügen von Knoten und Kanten konstruieren. Dazu starten wir mit einem Knoten $x_0 \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$, den wir als „Wurzel“ bezeichnen, auch wenn wir später feststellen werden, dass dieser anhand seiner Eigenschaften nicht von anderen Knoten unterscheidbar ist. Um die k-Regularität erreichen zu können, fügen wir nun k Nachbarn von x_0 hinzu, also $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ sowie $\{x_0, x_i\} \in \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)$ für $i = 1, \dots, k$. Bis zu diesem Punkt erhalten wir also den Sterngraph S_k, was wir auch in Bemerkung 2.24 wiedererkennen werden. Als Nächstes betrachten wir für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ den Knoten x_i, der derzeit ein Blatt ist, da er nur den Nachbarn x_0 besitzt, und fügen jeweils $k-1$ weitere Nachbarn hinzu, damit auch dieser Knoten den Grad k erhält. Da der Graph allerdings als Baum kreisfrei werden soll, dürfen wir keinen der vorherigen Knoten dafür verwenden. Somit fügen wir weitere Knoten x_i^j zu $\mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ hinzu mit $\{x_i, x_i^j\} \in \mathrm{E}(\mathrm{X}_k)$ für $j = 1, \dots, k-1$. Zur Visualisierung betrachten wir den Ausschnitt für $k = 2$ sowie $k = 3$ in Abbildung 1. Da auf diese Weise immer wieder Knoten mit Grad 1 entstehen, wird der Vorgang für jedes Blatt des bis zu einem beliebigen Zeitpunkt erhaltenen Graphen iteriert. Für die Existenz bleibt also nur zu prüfen, dass aus unserer Konstruktion tatsächlich ein k-regulärer Baum entsteht:

k-regulär: Zur Wurzel x_0 wurden im ersten Schritt k Nachbarn hinzugefügt und später auch keine weiteren, weshalb sicher $\deg(x_0) = k$ gilt. Jeder andere Knoten war in irgendeinem Konstruktionsschritt ein Blatt und erhielt daraufhin $k - 1$ zusätzliche Nachbarn, danach aber keine weiteren. Somit hat auch jeder andere Knoten den Grad k.

zusammenhängend: Seien $x, y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$. Per Konstruktion gibt es einen Weg von x_0 nach x sowie einen Weg von x_0 nach y. Durch Umkehren des ersten Weges und Anhängen des zweiten erkennen wir, dass auch ein Weg von x nach y existiert.

kreisfrei: Wir haben bei der Konstruktion schon bemerkt, dass wir stets neue Knoten hinzufügen, um die k-Regularität zu erfüllen, und dabei vermieden, dass ein Zyklus im Graph entsteht.

Nun ist uns auch schon Aussage (c) klar, da in der Konstruktion von X_k immer wieder $k-1$ neue Knoten hinzugefügt werden, wobei $k-1 \geq 1$ gilt. Diese sind dann selbst Blätter und verhindern somit, dass das Verfahren abbricht. Für den Beweis der Eindeutigkeit von X_k im Fall $k \geq 2$ benötigen wir einige Vorüberlegungen.

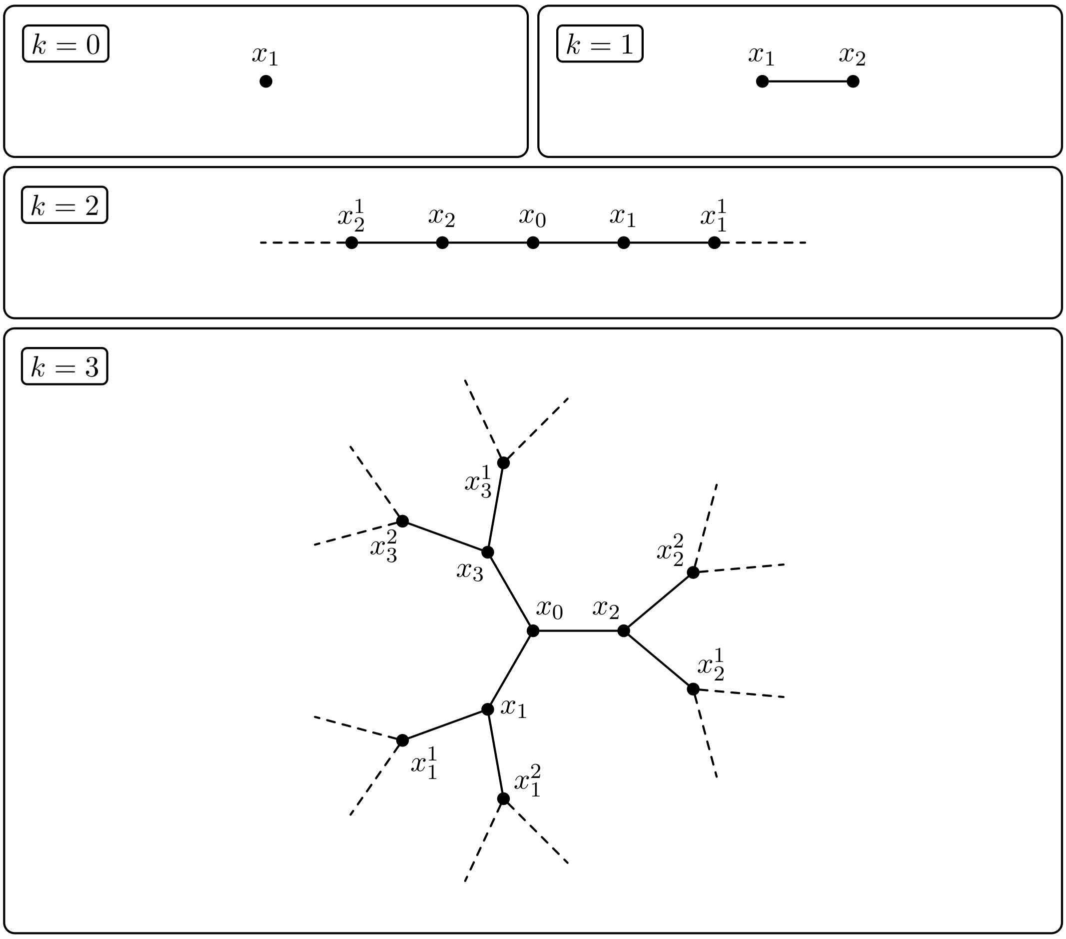

Abbildung 1: Konstruktion von X_k

Bemerkung 2.24. Für jeden Knoten $x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ ist der induzierte Teilgraph von X_k mit Knotenmenge $\{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\} \,\dot\cup\, \{x\}$ isomorph zum Sterngraph S_k.

Beweis: Da X_k ein k-regulärer Graph ist, erhalten wir für jedes $x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$

$$\left|\{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\} \,\dot\cup\, \{x\}\right| = \left|\{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\}\right| + \left|\{x\}\right| = k+1$$

und da X_k als Baum zudem kreisfrei ist, gilt für alle $y_1, y_2 \in \{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\}$ $y_1 \not\sim y_2$. Bilden wir nun x auf den Knoten $x_0 \in \mathrm{V}(\mathrm{S}_k)$ ab und die k Elemente aus $\{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\}$ auf bijektive Weise auf die Knoten $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{V}(\mathrm{S}_k)$, so können wir mit den zuvor festgehaltenen Eigenschaften nachrechnen, dass wir tatsächlich einen Isomorphismus von Graphen erhalten. $\square$

Lemma 2.25. *Sei X ein Baum und seien $x, y \in \mathrm{V}(X)$ mit $x \neq y$. Dann existiert in X genau ein Kantenzug von x nach y.*

Beweis: Existenz: Da X als Baum zusammenhängend ist, existiert ein Weg w von x nach y, d.h. $w = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $x_i \in \mathrm{V}(X)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathrm{E}(X)$ für $i = 1, \ldots, n-1$ sowie insbesondere $x_1 = x$ und $x_n = y$. Sind die Knoten nicht bereits paarweise verschieden, so existieren $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ und $x_i = x_j$. Wir können stets $i < j$ annehmen und betrachten dann im Fall $j \neq n$ wegen $\{x_i, x_{j+1}\} = \{x_j, x_{j+1}\} \in \mathrm{E}(X)$ den Weg $(x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, im Fall $j = n$ (und somit $i \neq 1$ da $x \neq y$) wegen $\{x_{i-1}, x_n\} = \{x_{i-1}, x_i\} \in \mathrm{E}(X)$ hingegen den Weg $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n)$. Dieses Verfahren iterieren wir solange, bis wir tatsächlich einen Kantenzug von x nach y erhalten.

Eindeutigkeit: Seien $w = (x_1, \ldots, x_n)$ und $w' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ Kantenzüge in X von x nach y. Angenommen $x_{n-1} \neq x'_{m-1}$, so definieren wir

$$l := \max\{\, i \in \{1, \ldots, n-1\} \mid \exists j \in \{1, \ldots, m-1\} \text{ mit } x_i = x'_j \,\}.$$

Da $x_1 = x = x'_1$, existiert das Maximum und wir erhalten zudem ein eindeutiges $l' \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $x_l = x'_{l'}$, da andernfalls w' kein Kantenzug wäre. Nun bildet $\widehat{w} := (x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}, y, x'_{m-1}, x'_{m-2}, \ldots, x'_{l'+1}, x'_{l'})$ einen geschlossenen Weg in X, sodass $(x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}, y, x'_{m-1}, x'_{m-2}, \ldots, x'_{l'+1})$ ein Kantenzug ist, wobei wir Letzteres wie folgt sehen: $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}, y$ sind als Teil von w und $y, x'_{m-1}, x'_{m-2}, \ldots, x'_{l'+1}$ hingegen als Teil von w' paarweise verschieden. Per Definition von l und l' kann aber (ausgenommen von y) auch kein Element aus der ersten Liste in der zweiten auftauchen. Des Weiteren enthält $\widehat{w}$ wegen $l \leq n-1$ sowie $l' \leq m-1$ und daher $x_l \neq y \neq x'_{l'}$ mindestens drei Knoten: Es kann nämlich nicht $l = n-1$ und $l' = m-1$ gelten, da dann $x_{n-1} = x_l = x'_{l'} = x'_{m-1}$ unserer Annahme widerspricht, weshalb wir mit x_{n-1} oder x'_{m-1} mindestens einen vierten

Knoten in $\widehat{w}$ finden. Wir erhalten also einen Zyklus in X und somit einen Widerspruch. Also gilt $x_{n-1} = x'_{m-1}$ und induktiv folgt, dass alle Einträge von w und w' und somit auch n und m übereinstimmen, also $w = w'$. $\square$

Definition 2.26. *Sei X ein Graph. Ist $x_0 \in \mathrm{V}(X)$ ein beliebiger Knoten und $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die **Sphäre** um x_0 in X mit Radius n durch*

$$\mathrm{S}_n(x_0, X) := \big\{x \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; \mathrm{d}(x, x_0) = n\big\}.$$

Bemerkung 2.27. Zwar haben wir $\mathrm{S}_n(x_0, X)$ nur als eine Knotenmenge definiert und nutzen diese in unserer Notation auch meist nur in der Form, meinen aber im Grunde mit Blick auf Definition 2.32 den induzierten Teilgraph von X mit dieser Knotenmenge. Zudem werden wir später oft zur besseren Lesbarkeit die Argumente x_0 und X weglassen, wenn diese aus dem Zusammenhang ersichtlich sind. Wir beachten dabei, dass wir die Kurzform S_n nicht mit dem Sterngraph verwechseln.

Beispiel 2.28.

i) Für $n = 0$ ergibt sich $\mathrm{S}_0(x_0, X) = \{x_0\}$.

ii) Für $n = 1$ ergibt sich $\mathrm{S}_1(x_0, X) = \big\{x \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; x \sim x_0\big\}$.

Lemma 2.29. *Sei X ein Baum. Für $n \geq 1$ existiert zu jedem $x \in \mathrm{S}_n(x_0, X)$ genau ein Nachbar in $\mathrm{S}_{n-1}(x_0, X)$, den wir mit $\widetilde{x}$ bezeichnen.*

Beweis: Für $x \in \mathrm{S}_n(x_0, X)$ existiert per Definition ein Weg von x_0 nach x der Länge n, der aufgrund von Bemerkung 2.11 ein Kantenzug ist. Dieser ist laut Lemma 2.25 eindeutig, weshalb auch der vorletzte Knoten dieses Kantenzuges eindeutig ist. Dieser ist der gesuchte Nachbar $\widetilde{x}$ von x, für den wir mit ebendiesem Weg ausgenommen der letzten Kante schon $\mathrm{d}(\widetilde{x}, x_0) = n - 1$ einsehen können. $\square$

Lemma 2.30. *Sei X ein k-regulärer Baum. Für $k \geq 2$ und $n \geq 1$ gilt*

$$\big|\mathrm{S}_n(x_0, X)\big| = k(k-1)^{n-1}.$$

Beweis: I.A.: $|\mathrm{S}_1| = \Big|\big\{x \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; x \sim x_0\big\}\Big| \overset{k\text{-regulär}}{=} k = k(k-1)^{1-1}$.

I.V.: Die Gleichung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \geq 1$.

I.S.: Wir müssen $|\mathrm{S}_{n+1}| = k(k-1)^n$ zeigen. Dazu zeigen wir zunächst mit der Notation aus Lemma 2.29 die folgende Gleichheit:

$$\mathrm{S}_{n+1} = \dot{\bigcup_{y \in \mathrm{S}_n}} \Big(\big\{x \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; x \sim y\big\} \setminus \{\widetilde{y}\}\Big). \tag{2.1}$$

$\subseteq$: Für $x \in \mathrm{S}_{n+1}$ ist $\widetilde{x} \in \mathrm{S}_n$ mit $x \sim \widetilde{x}$ und $x \neq \widetilde{\widetilde{x}}$, da wir andernfalls den Widerspruch $n+1 = \mathrm{d}(x, x_0) = \mathrm{d}(\widetilde{\widetilde{x}}, x_0) = n-1$ erhalten.

$\supseteq$: Sei $x \in \mathrm{V}(X)$ mit $x \sim y$ für ein $y \in \mathrm{S}_n$ und $x \neq \widetilde{y}$. Da aus Letzterem folgt, dass $x \notin \mathrm{S}_{n-1}$, da $\widetilde{y}$ laut Lemma 2.29 der einzige Nachbar von y in S_{n-1} ist, erhalten wir $\mathrm{d}(x_0, x) = \mathrm{d}(x_0, y) + 1 = n + 1$ aufgrund der Eindeutigkeit von Kantenzügen aus Lemma 2.25 und damit auch der Eindeutigkeit von kürzesten Wegen.

disjunkt: Angenommen $x \in \mathrm{V}(X)$ erfüllt $y_1 \sim x \sim y_2$ und $\widetilde{y_1} \neq x \neq \widetilde{y_2}$ für $y_1, y_2 \in \mathrm{S}_n$. Wie zuvor folgt $x \in \mathrm{S}_{n+1}$, weshalb wir durch Anhängen von x an den kürzesten Weg von x_0 nach y_1 sowie an den kürzesten Weg von x_0 nach y_2 zwei Kantenzüge von x_0 nach x erhalten, die nach Lemma 2.25 übereinstimmen. Somit folgt insbesondere $y_1 = y_2$.

Nun erhalten wir wegen Gleichung (2.1)

$$\begin{aligned} |\mathrm{S}_{n+1}| &= \sum_{y \in \mathrm{S}_n} \Big| \big\{ x \in \mathrm{V}(X) \bigm| x \sim y \big\} \setminus \{\widetilde{y}\} \Big| \overset{k\text{-regulär}}{=} \sum_{y \in \mathrm{S}_n} (k-1) \\ &= (k-1) \cdot |\mathrm{S}_n| \overset{\mathrm{IV}}{=} (k-1) \cdot k(k-1)^{n-1} = k(k-1)^n \end{aligned}$$ □

Aus den soeben betrachteten Argumenten geht zudem hervor:

Korollar 2.31. *Sei X ein k-regulärer Baum. Für $k \geq 2$, $n \geq 1$ und $y \in \mathrm{S}_n(x_0, X)$ gilt stets*

$$\big\{ x \in \mathrm{V}(X) \bigm| x \sim y \big\} = \big\{ x \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) \bigm| x \sim y \big\} \,\dot{\cup}\, \{\widetilde{y}\},$$

was für y bedeutet, dass abgesehen von dem eindeutigen Nachbarn $\widetilde{y} \in \mathrm{S}_{n-1}(x_0, X)$ die anderen $k-1$ Nachbarn in $\mathrm{S}_{n+1}(x_0, X)$ liegen. □

Definition 2.32. *Sei X ein Graph. Ist $x_0 \in \mathrm{V}(X)$ ein beliebiger Knoten und $n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir die* ***Kugel*** *um x_0 in X mit Radius n durch*

$$\mathrm{B}_n(x_0, X) := \big\{ x \in \mathrm{V}(X) \bigm| \mathrm{d}(x, x_0) \leq n \big\}.$$

Bemerkung 2.33.

i) Für $\mathrm{B}_n(x_0, X)$ gilt Bemerkung 2.27 analog. Für $x, y \in \mathrm{B}_n$ (genauer eigentlich $x, y \in \mathrm{V}(\mathrm{B}_n)$, doch dies wollen wir schließlich zu Gunsten der Lesbarkeit vernachlässigen) mit $\{x, y\} \in \mathrm{E}(X)$ gilt auch $\{x, y\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_n)$.

ii) Per Definition erhalten wir schon $\mathrm{B}_n = \dot{\bigcup}_{i=0}^{n} \mathrm{S}_i$.

iii) Aus Punkt ii), Lemma 2.30 sowie Punkt i) von Beispiel 2.28 ergibt sich für einen k-regulären Baum mit $k \geq 2$

$$|\mathrm{B}_n| = \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{S}_i| = 1 + \sum_{i=1}^{n} k(k-1)^{i-1} < \infty.$$

iv) $\mathrm{B}_0 \subseteq \mathrm{B}_1 \subseteq \ldots$ ist eine aufsteigende Kette von Mengen, was wir direkt an der Definition oder mit Punkt ii) wegen $\mathrm{B}_n = \dot{\bigcup}_{i=0}^{n} \mathrm{S}_i \subseteq \dot{\bigcup}_{i=0}^{n+1} \mathrm{S}_i = \mathrm{B}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sehen.

v) Für einen zusammenhängenden Graphen X gilt $\mathrm{V}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n$, da einerseits $\mathrm{B}_n \subseteq \mathrm{V}(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und andererseits für $x \in \mathrm{V}(X)$ stets $\mathrm{d}(x, x_0) < \infty$ gilt, weil X zusammenhängend ist.

Mit diesen Vorüberlegungen wenden wir uns wieder dem Beweis von Satz 2.23 zu, bei dem uns noch die Eindeutigkeit im Fall $k \geq 2$ fehlt:
Seien X und Y beliebige k-reguläre Bäume sowie $x_0 \in \mathrm{V}(X)$ und $y_0 \in \mathrm{V}(Y)$ beliebige Knoten. Wir müssen nun $X \cong Y$ zeigen, d.h. wir suchen eine bijektive Abbildung $\gamma : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{V}(Y)$, die

$$\{x, x'\} \in \mathrm{E}(X) \;\Leftrightarrow\; \big\{\gamma(x), \gamma(x')\big\} \in \mathrm{E}(Y) \tag{2.2}$$

erfüllt. Wir werden γ induktiv konstruieren und dabei mit $\gamma(x_0) := y_0$ starten. Anschaulich bedeutet dies, dass jeder Knoten die Rolle von x_0 in unserer Konstruktion von X_k einnehmen kann, also alle Knoten eines k-regulären Baumes die gleichen Eigenschaften besitzen.
Wir beginnen damit, eine Folge von Abbildungen $\gamma_n : \mathrm{B}_n(x_0, X) \to \mathrm{B}_n(y_0, Y)$ zu definieren, die die folgenden Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen:

(a) $\gamma_n\big|_{\mathrm{B}_{n-1}(x_0, X)} = \gamma_{n-1}$ (falls $n \neq 0$),

(b) γ_n ist bijektiv,

(c) $\{x, x'\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_n(x_0, X)\big) \;\Leftrightarrow\; \big\{\gamma_n(x), \gamma_n(x')\big\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_n(y_0, Y)\big)$.

<u>I.A.:</u> Wegen Punkt i) von Beispiel 2.28 ist durch $\gamma_0(x_0) := y_0$ die Abbildung

$$\gamma_0 : \mathrm{B}_0(x_0, X) = \mathrm{S}_0(x_0, X) = \{x_0\} \to \mathrm{B}_0(y_0, Y) = \mathrm{S}_0(y_0, Y) = \{y_0\}$$

bereits definiert und bijektiv. Die Eigenschaft (a) wird hingegen erst für $n \geq 1$ relevant und Eigenschaft (c) ist trivialerweise erfüllt, da für $n = 0$ keine Kanten in den beiden Teilgraphen existieren. Aufgrund von Punkt ii) aus Beispiel 2.28 erhalten wir $\mathrm{B}_1(x_0, X) = \mathrm{S}_0(x_0, X) \,\dot\cup\, \mathrm{S}_1(x_0, X) = \{x_0\} \,\dot\cup\, \big\{x \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; x \sim x_0\big\}$ und analog für y_0 und Y. Wegen Eigenschaft (a) setzen wir $\gamma_1(x_0) := y_0$ und erhalten Eigenschaft (b) und (c) durch eine beliebige Bijektion der übrigen Knoten. Dies haben wir bereits in Bemerkung 2.24 gesehen.

<u>I.V.:</u> Sei für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Abbildung γ_n bereits definiert und besitze die Eigenschaften (a),(b) und (c).

I.S.: Definiere $\gamma_{n+1} : \mathrm{B}_{n+1}(x_0, X) = \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{n+1}} \mathrm{S}_i(x_0, X) \to \mathrm{B}_{n+1}(y_0, Y) = \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{n+1}} \mathrm{S}_i(y_0, Y)$ wie folgt:

Für $x \in \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{n}} \mathrm{S}_i(x_0, X) = \mathrm{B}_n(x_0, X)$ setzen wir $\gamma_{n+1}(x) := \gamma_n(x)$, wodurch sofort $\gamma_{n+1}\big|_{\mathrm{B}_n(x_0,X)} = \gamma_n$, also Eigenschaft (a) gilt. Für $x \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X)$ existiert mit Lemma 2.29 genau ein Nachbar $\widetilde{x} \in \mathrm{S}_n(x_0, X)$. Da $n \geq 1$ gilt, liefert Korollar 2.31 sowie k-Regularität angewandt auf $\widetilde{x}$

$$\Big|\big\{x' \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) \bigm| x' \sim \widetilde{x}\big\}\Big| = \Big|\big\{x' \in \mathrm{V}(X) \bigm| x' \sim \widetilde{x}\big\} \setminus \big\{\widetilde{\widetilde{x}}\big\}\Big| = k - 1.$$

Betrachten wir $\gamma_n(\widetilde{x})$, so bemerken wir, dass dies in $\mathrm{S}_n(y_0, Y)$ liegen muss, da γ_n wegen Eigenschaft (a) und (b) in jedem Konstruktionsschritt $\mathrm{S}_n(x_0, X)$ bijektiv auf $\mathrm{S}_n(y_0, Y)$ abbilden muss. Somit wenden wir Korollar 2.31 auch auf $\gamma_n(\widetilde{x})$ an und erhalten analog $\Big|\big\{y' \in \mathrm{S}_{n+1}(y_0, Y) \bigm| y' \sim \gamma_n(\widetilde{x})\big\}\Big| = k - 1$. Da die Mengen also gleichmächtig sind, können wir eine beliebige Bijektion wählen:

$$\varphi_{\widetilde{x}} : \big\{x' \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) \bigm| x' \sim \widetilde{x}\big\} \to \big\{y' \in \mathrm{S}_{n+1}(y_0, Y) \bigm| y' \sim \gamma_n(\widetilde{x})\big\}.$$

Nun setzen wir $\gamma_{n+1}(x) := \varphi_{\widetilde{x}}(x)$ und zeigen, dass γ_{n+1} auch die Eigenschaften (b) und (c) erfüllt. Da $\gamma_{n+1}\big|_{\mathrm{B}_n(x_0,X)} = \gamma_n$ laut I.V. bijektiv ist und $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{B}_n \,\dot\cup\, \mathrm{S}_{n+1}$ gilt, bleibt nur die Bijektivität von $\gamma_{n+1}\big|_{\mathrm{S}_{n+1}(x_0,X)} : \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) \to \mathrm{S}_{n+1}(y_0, Y)$ zu zeigen. Doch diese wird uns klar, wenn wir Gleichung (2.1) sowie Korollar 2.31 betrachten, da demnach $\mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) = \dot{\bigcup\limits_{\widehat{x} \in \mathrm{S}_n(x_0,X)}} \big\{x' \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X) \bigm| x' \sim \widehat{x}\big\}$ und Analoges für (y_0, Y) gilt, und bemerken, dass auf ebendiesen disjunkten Teilmengen γ_{n+1} durch die Bijektionen $\varphi_{\widehat{x}}$ definiert ist. Für (c) benötigen wir Fallunterscheidungen:

$\Rightarrow$: Sei $\{x, x'\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_{n+1}(x_0, X)\big) \subseteq \mathrm{E}(X)$.

Fall 1: Gilt $x, x' \in \mathrm{B}_n(x_0, X)$, so sind x und x' auch im induzierten Teilgraphen $\mathrm{B}_n(x_0, X)$ benachbart und, weil dort (c) nach I.V. gilt, erhalten wir

$$\big\{\gamma_{n+1}(x), \gamma_{n+1}(x')\big\} \overset{\text{(a)}}{=} \big\{\gamma_n(x), \gamma_n(x')\big\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_n(y_0, Y)\big) \subseteq \mathrm{E}(Y)$$

und somit $\big\{\gamma_{n+1}(x), \gamma_{n+1}(x')\big\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_{n+1}(y_0, Y)\big)$.

Fall 2: Ist (eventuell nach Umbenennung) $x \in \mathrm{B}_n(x_0, X)$ und $x' \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X)$, dann erhalten wir mit Korollar 2.31 angewandt auf x' schon $\widetilde{x'} = x$ und somit $\gamma_{n+1}(x') = \varphi_x(x') \in \big\{y' \in \mathrm{S}_{n+1}(y_0, Y) \bigm| y' \sim \gamma_n(x)\big\}$. Daraus folgt dann

$$\big\{\gamma_{n+1}(x), \gamma_{n+1}(x')\big\} \overset{\text{(a)}}{=} \big\{\gamma_n(x), \varphi_x(x')\big\} \in \mathrm{E}\big(\mathrm{B}_{n+1}(y_0, Y)\big).$$

Fall 3: Für $x, x' \in \mathrm{S}_{n+1}(x_0, X)$ erhalten wir einen Widerspruch, da diese Knoten laut Korollar 2.31 nicht benachbart sein können, weshalb der Fall nicht eintritt.

$\Leftarrow$: Wenn wir in der obigen Konstruktion die Rollen von X und Y vertauschen und anstelle von beliebigen Bijektionen die passenden Umkehrabbildungen wählen, bemerken wir, dass γ_{n+1}^{-1} analog die soeben bewiesene Implikation erfüllt. Angewandt auf $\{\gamma_{n+1}(x), \gamma_{n+1}(x')\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_{n+1}(y_0, Y))$ erhalten wir wie gewünscht $\{x, x'\} = \left\{\gamma_{n+1}^{-1}(\gamma_{n+1}(x)), \gamma_{n+1}^{-1}(\gamma_{n+1}(x'))\right\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_{n+1}(x_0, X))$.

Nun definieren wir mithilfe der γ_n unsere gesuchte Abbildung $\gamma : \mathrm{V}(X) \to \mathrm{V}(Y)$, indem wir für $x \in \mathrm{V}(X)$ wegen Punkt v) von Bemerkung 2.33 ein $n \in \mathbb{N}$ finden mit $x \in \mathrm{B}_n(x_0, X)$ und dann $\gamma(x) := \gamma_n(x) \in \mathrm{B}_n(y_0, Y) \subseteq \mathrm{V}(Y)$ setzen. Wir rechnen nach:

wohldef.: Für $x \in \mathrm{V}(X)$ ist $\mathrm{d}(x, x_0)$ die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{d}(x,x_0)}$. Wegen Punkt iv) von Bemerkung 2.33 muss $\gamma_n(x) = \gamma_{\mathrm{d}(x,x_0)}(x)$ für alle $n \geq \mathrm{d}(x, x_0)$ gelten, damit γ wohldefiniert ist. Dies wird durch Eigenschaft (a) der γ_n sichergestellt, die wir gegebenenfalls induktiv anwenden.

injektiv: Seien $x, x' \in \mathrm{V}(X)$ mit $\gamma(x) = \gamma(x')$, so können wir o.B.d.A. $x \in \mathrm{B}_n$ und $x' \in \mathrm{B}_m$ mit $m \leq n$ annehmen. Nun gilt $\gamma_n(x) \overset{\text{Def}}{=} \gamma(x) = \gamma(x') \overset{\text{Def}}{=} \gamma_m(x') \overset{\text{(a)}}{=} \gamma_n(x')$ und somit $x = x'$, da γ_n nach Eigenschaft (b) injektiv ist.

surjektiv: Sei $y \in \mathrm{V}(Y)$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in \mathrm{B}_n(y_0, Y)$. Da γ_n laut Eigenschaft (b) surjektiv ist, existiert ein $x \in \mathrm{B}_n(x_0, X) \subseteq \mathrm{V}(X)$, für das bereits $y = \gamma_n(x) = \gamma(x)$ gilt.

(2.2): Sei $\{x, x'\} \in \mathrm{E}(X)$, so erhalten wir durch das Bilden des Maximums aufgrund von Punkt iv) aus Bemerkung 2.33 wieder ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x, x' \in \mathrm{B}_n$ und Punkt i) liefert uns $\{x, x'\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_n)$. Mit Eigenschaft (c) folgt

$$\{\gamma(x), \gamma(x')\} \overset{\text{Def}}{=} \{\gamma_n(x), \gamma_n(x')\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_n(y_0, Y)) \overset{\text{Teilgraph}}{\subseteq} \mathrm{E}(Y).$$

Seien umgekehrt $x, x' \in \mathrm{V}(X)$ mit $\{\gamma(x), \gamma(x')\} \in \mathrm{E}(Y)$, so erhalten wir wie zuvor ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x, x' \in \mathrm{B}_n$. Da nun $\gamma(x) = \gamma_n(x), \gamma(x') = \gamma_n(x') \in \mathrm{B}_n(y_0, Y)$ gilt, ergibt sich mit Punkt i) aus Bemerkung 2.33 angewandt auf Y, dass somit $\{\gamma_n(x), \gamma_n(x')\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_n(y_0, Y))$ und mit der Eigenschaft (c) dann letztendlich $\{x, x'\} \in \mathrm{E}(\mathrm{B}_n(x_0, X)) \subseteq \mathrm{E}(X)$ folgt. $\square$

3 $C_c(X, R)$, Heckeoperator und Freiheitssatz

In diesem Kapitel werden wir uns mit dem Modul der Abbildungen von der Knotenmenge eines Graphen in einen Ring beschäftigen. Unter weiteren Annahmen werden wir darauf den Heckeoperator definieren, um dann Aussagen über die Freiheit des Moduls und die Eigenwerte des Operators zu treffen. Schließlich werden wir den Hauptsatz dieser Arbeit (Satz 3.33) formulieren und nach einigen Vorbereitungen beweisen. Weil wir dabei erneut einige Grundlagen benötigen, werden wir diese hier zusammentragen, wobei die Anmerkungen von Beginn von Kapitel 2 wie angekündigt auch an dieser Stelle gelten, da die meisten Ergebnisse aus der linearen Algebra bekannt sind oder leicht auf Ringe und Moduln übertragen werden können.

3.1 Grundlagen zu Ringen und Moduln

In dieser Arbeit wollen wir mit den Worten „Ring“ und „Modul“ stets kommutative Ringe mit $1 \neq 0$ und unitäre Moduln bezeichnen, womit wir insbesondere den Nullring ausschließen. Im Folgenden sei R stets ein Ring und M ein R-Modul. Falls N ebenfalls ein R-Modul ist, nutzen wir die Notationen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_R(M, N) &:= \big\{\varphi : M \to N \;\big|\; \varphi \text{ ist ein } R\text{-Modulhomomorphismus}\big\}, \\ \operatorname{End}_R(M) &:= \operatorname{Hom}_R(M, M). \end{aligned}$$

Definition 3.1. *Sei I eine beliebige Indexmenge und sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln, dann nennen wir*

$$\prod_{i\in I} M_i := \big\{(m_i)_{i\in I} \;\big|\; m_i \in M_i \;\; \forall\, i \in I\big\}$$

*das **direkte Produkt** dieser Familie und*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; m_i = 0_{M_i} \text{ für fast alle } i \in I\right\}$$

*die **direkte Summe**. Beide Konstruktionen sind R-Moduln bezüglich der komponentenweise definierten Operationen.*

Bemerkung 3.2.

i) Wie üblich steht die Abkürzung „fast alle“ für „alle bis auf endlich viele“.

ii) Es gilt $\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq \prod_{i\in I} M_i$ und, wenn I endlich ist, gilt sogar Gleichheit.

iii) Wir schreiben manchmal kurz $R^n := \bigoplus_{i\in I} R$, falls $|I| = n \in \mathbb{N}$.

Die Begriffe „Freiheit“ und „Basis“ kann man auf verschiedene Arten definieren. Wir möchten hier zwei (fast) offensichtlich äquivalente Versionen festhalten:

Definition 3.3. *Sei I eine beliebige Indexmenge und $\mathcal{B} := \big(m_i\big)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen $m_i \in M$.*

Version 1:

Mithilfe der wohldefinierten Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i\in I} R &\to M \\ (r_i)_{i\in I} &\mapsto \sum_{i\in I} r_i m_i \end{aligned}$$

definieren wir die Familie $\mathcal{B}$ als

i) ***linear unabhängig*** $:\Leftrightarrow$ *φ ist injektiv,*

ii) ***Erzeugendensystem*** von M $:\Leftrightarrow$ *φ ist surjektiv,*

iii) ***Basis*** von M $:\Leftrightarrow$ *φ ist bijektiv.*

In jedem Fall schreiben wir $\langle m_i \mid i \in I\rangle_R := \mathrm{im}(\varphi)$ und kürzer $\langle m\rangle_R$, falls $|I| = 1$ und $\mathcal{B} = (m)$.

Version 2:

i) Wir definieren die Familie $\mathcal{B}$ genau dann als ***linear unabhängig****, wenn für alle endlichen Teilmengen $J \subseteq I$ und alle Koeffizienten $r_i \in R$ mit $i \in J$ aus $\sum\limits_{i\in J} r_i m_i = 0_M$ schon $r_i = 0_R$ für alle $i \in J$ folgt.*

ii) Wir nennen die Familie $\mathcal{B}$ genau dann ***Erzeugendensystem*** *von M, wenn jedes $m \in M$ als endliche Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}$ mit Koeffizienten aus R geschrieben werden kann.*

iii) Die Familie $\mathcal{B}$ ist genau dann eine ***Basis*** *von M, wenn sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von M ist.*

In beiden Versionen definieren wir M genau dann als ***frei****, wenn M eine Basis besitzt.*

Bemerkung 3.4. Ist M ein freier R-Modul, so besitzt M nach Definition 3.3 eine Basis mit zugehöriger Indexmenge I und die Abbildung φ ist in diesem Fall ein R-Modulisomorphismus, weshalb $M \cong \bigoplus\limits_{i\in I} R$ als R-Moduln gilt.

Definition 3.5. *Mit Blick auf Bemerkung 3.4 nennen wir die Kardinalität einer beliebigen Basis $|I| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ den* ***Rang*** *des freien Moduls M.*

Lemma 3.6. *Der Rang eines freien Moduls ist eindeutig bestimmt.*

Beweis: Da bei uns R stets ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ ist, betrachte beispielsweise Satz 4.3 aus Kapitel VII §4 von [JS14, S. 194 f.]. $\square$

Definition 3.7.

i) $M' \subseteq M$ *heißt genau dann* ***R-Untermodul*** *von* M*, wenn* $(M', +)$ *eine Untergruppe von* $(M, +)$ *ist und für alle* $r \in R$ *und* $m' \in M'$ *auch* $r \cdot m' \in M'$ *gilt.*

ii) Sei $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ *und* $M' \subseteq M$ *ein* R*-Untermodul, so heißt* M' *genau dann* ***φ-stabil****, wenn* $\varphi(M') \subseteq M'$ *gilt.*

Bemerkung 3.8.

i) Um nachzurechnen, ob es sich bei einer gegebenen Menge $M' \subseteq M$ um einen Untermodul handelt, reicht es aus, die folgenden beiden Implikationen für beliebige Elemente zu prüfen:

$$\text{(a)} \quad m'_1, m'_2 \in M' \;\Rightarrow\; m'_1 + m'_2 \in M',$$
$$\text{(b)} \quad r \in R, m' \in M' \;\Rightarrow\; r \cdot m' \in M'.$$

ii) Ist $M' \subseteq M$ ein Untermodul, so ist M' auf natürliche Weise selbst ein R-Modul.

Definition 3.9. *M heißt* ***monogen****, falls M von einem Element erzeugt wird. Das bedeutet, es existiert ein $m \in M$ mit $M = \langle m \rangle_R$.*

Lemma 3.10. *Für $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ wird M durch die Skalarmultiplikation*

$$\begin{aligned} \cdot : R[x] \times M &\to M \\ \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i\, x^i, m\right) &\mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i\, \varphi^i(m) \end{aligned}$$

zu einem $R[x]$-Modul, wobei $\varphi^i := \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ das i-fache Anwenden von φ bezeichnet mit der Konvention $\varphi^0 := \mathrm{id}_M$.

Lemma 3.11. *Ist neben R auch S ein Ring, zudem $\pi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $s \in S$ beliebig, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\psi_s : R[x] \to S$, gegeben durch $\psi_s\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i\, x^i\Big) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \pi(r_i)\, s^i$, der $\psi_s(x) = s$ sowie $\psi_s \circ \iota = \pi$ erfüllt, wobei $\iota : R \to R[x]$ die übliche Einbettung ist.*

Satz 3.12 (Strukturtransport)**.** *Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ bijektiv, d.h. $M \cong N$ als R-Moduln, und M sogar ein $R[x]$-Modul, so wird N durch*

$$\begin{aligned} \cdot : R[x] \times N &\to N \\ \Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i\, x^i, n\Big) &\mapsto \varphi\Big(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i\, x^i \cdot \varphi^{-1}(n)\Big) \end{aligned}$$

ebenfalls zu einem $R[x]$-Modul und φ zu einem $R[x]$-Modulisomorphismus.

Beweis: Dass N auf diese Weise zum $R[x]$-Modul wird, könnten wir nachrechnen, wobei wir im Wesentlichen nur die Eigenschaften von M als $R[x]$-Modul sowie von φ und φ^{-1} als R-Modulisomorphismen benutzen würden. Die $R[x]$-Linearität von φ ergibt sich zudem direkt aus der Definition der Skalarmultiplikation auf N. $\square$

Definition 3.13.

i) Sei $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$. Ein Ringelement $\lambda \in R$ heißt ein ***Eigenwert von φ****, wenn ein $m \in M \setminus \{0\}$ existiert mit $\varphi(m) = \lambda \cdot m$.*

ii) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in R^{n\times n}$ eine Matrix. Ein Ringelement $\lambda \in R$ heißt ein ***Eigenwert von A****, wenn λ ein Eigenwert von dem R-Modulhomomorphismus $\varphi_A := (m \mapsto A \cdot m) : R^n \to R^n$ ist.*

Definition 3.14. *Seien M sowie N freie R-Moduln mit endlichem Rang r bzw. s und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Ferner sei $\mathcal{B} = \big(m_1, \ldots, m_r\big)$ eine beliebige Basis von M und $\mathcal{C} = \big(n_1, \ldots, n_s\big)$ eine beliebige Basis von N. Für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ existieren eindeutig bestimmte Skalare $r_{i,j} \in R$ für $i \in \{1, \ldots, s\}$ mit $\varphi(m_j) = \sum\limits_{i=1}^{s} r_{i,j} n_i$. Die* ***darstellende Matrix*** *von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ definieren wir nun durch*

$$_{\mathcal{C}}\mathrm{M}(\varphi)_{\mathcal{B}} := \Big(r_{i,j}\Big)_{\substack{i\in\{1,\ldots,s\}\\ j\in\{1,\ldots,r\}}} \in R^{s\times r}.$$

Satz 3.15. *Mit den Voraussetzungen aus Definition 3.14 erhalten wir einen R-Modulisomorphismus*

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{Hom}_R(M, N) &\to R^{s\times r}\\ \varphi &\mapsto {_{\mathcal{C}}\mathrm{M}(\varphi)_{\mathcal{B}}}.\end{aligned}$$

Lemma 3.16. *Sei $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$, M ein freier R-Modul mit endlichem Rang r und $\mathcal{B} = \big(m_1, \ldots, m_r\big)$ eine beliebige Basis von M, so sind die Eigenwerte von φ in R genau die Eigenwerte der darstellenden Matrix $_{\mathcal{B}}\mathrm{M}(\varphi)_{\mathcal{B}}$. Somit sind letztere insbesondere unabhängig von der Wahl der Basis.*

Definition 3.17. *Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so ist die* ***allgemeine lineare Gruppe*** *definiert durch*

$$\mathrm{GL}_n(R) := \big\{A \in R^{n\times n} \;\big|\; A \textit{ ist invertierbar}\big\}.$$

Lemma 3.18. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(R) &= \big\{A \in R^{n\times n} \;\big|\; \det(A) \in R^*\big\}\\ &\cong \big\{\varphi : R^n \to R^n \;\big|\; \varphi \textit{ ist ein R-Modulisomorphismus}\big\}\end{aligned}$$

als Isomorphie von Gruppen.

Definition 3.19.

i) *Ein Ring R heißt **graduiert**, falls $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$, wobei R_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine additive Untergruppe ist mit der Eigenschaft, dass $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Elemente aus R_n nennen wir **homogene Elemente** vom Grad n.*

ii) *Ein R-Modul M über einem graduierten Ring R heißt selbst **graduiert**, falls $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$, wobei M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine additive Untergruppe ist mit der Eigenschaft, dass $R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt. Die Elemente aus M_n nennen wir **homogene Elemente** vom Grad n.*

Satz 3.20 (Elementarteilersatz)**.** *Ist R ein Hauptidealring, M ein endlich erzeugter, freier R-Modul und $M' \subseteq M$ ein R-Untermodul, dann existieren eine R-Basis $(e_1, \dots, e_r)$ von M sowie Elemente $a_1, \dots, a_s \in R$ mit $s \leq r$, sodass $a_i \mid a_{i+1}$ in R für $1 \leq i < s$ gilt und sodass $(a_1e_1, \dots, a_se_s)$ eine R-Basis von M' ist. Insbesondere ist M' selbst frei von einem Rang $s \leq r$. Die Ideale $(a_s) \subseteq \ldots \subseteq (a_1)$ sind zudem durch M und M' eindeutig bestimmt.*

Beweis: Vergleiche Satz 8.4 aus Kapitel VII §8 von [JS14, S. 203 ff.]. □

3.2 $C_c(X, R)$ und der Heckeoperator in verschiedenen Situationen

Wir werden in diesem Kapitel den Modul $C_c(X, R)$ sowie den darauf definierten Heckeoperator betrachten, wobei X später der k-reguläre Baum X_k aus Satz 2.23 sein wird. Doch um die Besonderheiten in diesem Fall besser begreifen zu können, starten wir etwas allgemeiner und nehmen im Laufe von Abschnitt 3.2 Veränderungen an unseren Voraussetzungen vor. Sei zunächst X ein beliebiger Graph.

Definition 3.21. *Wir definieren*

$$\boldsymbol{C(X,R)} := \mathrm{Abb}\big(\mathrm{V}(X), R\big) = \big\{f \mid f : \mathrm{V}(X) \to R \text{ ist eine Abbildung}\big\} \quad \text{und}$$
$$\boldsymbol{C_c(X,R)} := \big\{f \in C(X,R) \bigm| \mathrm{supp}(f) \text{ ist endlich}\big\},$$

wobei $\mathrm{supp}(f) := \big\{x \in \mathrm{V}(X) \bigm| f(x) \neq 0_R\big\}$ *der **Träger** (engl. support) von f genannt wird.*

Bemerkung 3.22.

i) Für $f \in C_c(X, R)$ ist $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathrm{V}(X)$, nämlich per Definition für alle außer den endlich vielen Elementen von $\mathrm{supp}(f)$.

ii) Ist X endlich, so gilt $C(X, R) = C_c(X, R)$.

Definition 3.23. *Für einen beliebigen Knoten $x \in \mathrm{V}(X)$ definieren wir die* ***charakteristische Funktion*** $\mathbb{1}_x : \mathrm{V}(X) \to R$ *durch*

$$\mathbb{1}_x(y) := \begin{cases} 1_R & \textit{falls } y = x, \\ 0_R & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bezüglich der punktweise definierten Verknüpfungen ist $C(X, R)$ ein R-Modul und $C_c(X, R) \subseteq C(X, R)$ ein R-Untermodul. Außerdem gelten für $f, g \in C_c(X, R)$ und $r \in R$ offenbar die Gleichungen

$$\mathrm{supp}(f + g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g) \quad \text{und} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{supp}(r \cdot f) \subseteq \mathrm{supp}(f). \tag{3.2}$$

Lemma 3.24. *$C_c(X, R)$ ist ein freier R-Modul mit Basis $\left(\mathbb{1}_x\right)_{x \in \mathrm{V}(X)}$.*

Beweis: <u>l.u.:</u> Sei $(r_x)_{x \in \mathrm{V}(X)} \in \bigoplus_{x \in \mathrm{V}(X)} R$ mit $\sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \mathbb{1}_x = 0 \in C_c(X, R)$. Für $y \in \mathrm{V}(X)$ gilt

$$r_y = \sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \underbrace{\mathbb{1}_x(y)}_{=\begin{cases} 1_R & x=y, \\ 0_R & x \neq y \end{cases}} \overset{\text{Def}}{=} \left(\sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \mathbb{1}_x \right)(y) = 0(y) = 0_R,$$

wobei wir für den ersten Schritt beachten, dass in jedem Ring neben $r \cdot 1_R = r$ auch $r \cdot 0_R = 0_R$ für alle $r \in R$ gilt, was sofort aus den Ringaxiomen folgt.

<u>EZS:</u> Sei $f \in C_c(X, R)$, so definieren wir $(r_x)_{x \in \mathrm{V}(X)} \in \bigoplus_{x \in \mathrm{V}(X)} R$ durch $r_x := f(x)$, wobei $r_x = 0$ für fast alle $x \in \mathrm{V}(X)$ erfüllt ist, weil $\mathrm{supp}(f)$ endlich ist. Nun gilt analog

$$\left(\sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \mathbb{1}_x \right)(y) = \sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \mathbb{1}_x(y) = r_y = f(y)$$

für alle $y \in \mathrm{V}(X)$ und daher $\sum_{x \in \mathrm{V}(X)} r_x \cdot \mathbb{1}_x = f$. □

Bemerkung 3.25. Aus Lemma 3.24 folgt mit Bemerkung 3.4 $C_c(X, R) \cong \bigoplus_{x \in \mathrm{V}(X)} R$ als R-Moduln. Wir schreiben manchmal auch $C_c(X, R) = \bigoplus_{x \in \mathrm{V}(X)} R \cdot \mathbb{1}_x$.

Definition 3.26. *Sei X ein lokal endlicher Graph. Wir definieren den* ***Heckeoperator T*** *durch die folgende Vorschrift:*

$$
\begin{aligned}
T : C(X,R) &\to C(X,R) \\
f &\mapsto Tf
\end{aligned}
$$

mit $\big(Tf\big)(x) := \sum\limits_{\substack{y \in \mathrm{V}(X) \\ y \sim x}} f(y)$ *für alle* $x \in \mathrm{V}(X)$.

Lemma 3.27. *T ist ein R-Modulendomorphismus.*

Beweis: Um zu sehen, dass T wohldefiniert ist, müssen wir lediglich zeigen, dass $\sum\limits_{\substack{y \in \mathrm{V}(X) \\ y \sim x}} f(y) \in R$ für alle $f \in C(X,R)$ und alle $x \in \mathrm{V}(X)$ gilt. Dies ist erfüllt, da X lokal endlich ist und wir somit eine endliche Summe in R erhalten. Die Eigenschaften $T(f+g) = Tf + Tg$ sowie $T(r \cdot f) = r \cdot Tf$ könnten wir für alle $f, g \in C(X,R)$ und $r \in R$ auf den Argumenten nachrechnen, indem wir die Definition von T anwenden und die Ringaxiome für die entstehenden endlichen Summen benutzen. $\square$

Bemerkung 3.28. Die Adjazenzmatrix $\mathrm{A} := \mathrm{A}(X)$ eines endlichen Graphen X hat laut Definition 2.3 Einträge in $\{0,1\}$ und kann daher als eine Matrix mit Einträgen in R aufgefasst werden ($0_R, 1_R \in R$).

Lemma 3.29. *Ist X endlich, so sind die Eigenwerte von T in R genau die Eigenwerte von* A *in R.*

Beweis: Da $C(X,R) = C_c(X,R)$ nach Lemma 3.24 ein freier R-Modul ist mit der Basis $\mathcal{B} := \big(\mathbb{1}_x\big)_{x \in \mathrm{V}(X)}$ und zudem X endlich ist, besitzt $C(X,R)$ einen endlichen Rang. Falls wir $\mathrm{A} = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}(T)_{\mathcal{B}}$ zeigen können (wir beachten auch Lemma 3.27), liefert Lemma 3.16 die Behauptung. Für $v \in \mathrm{V}(X)$ schreiben wir $T\mathbb{1}_v$ mithilfe der Basis $\mathcal{B}$. Aus dem Beweis von Lemma 3.24 geht hervor, dass $T\mathbb{1}_v = \sum\limits_{u \in \mathrm{V}(X)} r_{u,v} \cdot \mathbb{1}_u$ gilt, wobei

$$
r_{u,v} := \big(T\mathbb{1}_v\big)(u) = \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(X) \\ y \sim u}} \mathbb{1}_v(y) = \begin{cases} 1_R & \text{falls } v \sim u, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases} \underset{\text{Def}}{=} \mathrm{A}_{u,v}
$$

für alle $u \in \mathrm{V}(X)$ und somit ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}(T)_{\mathcal{B}} = \Big(r_{u,v}\Big)_{u,v \in \mathrm{V}(X)} = \Big(\mathrm{A}_{u,v}\Big)_{u,v \in \mathrm{V}(X)} = \mathrm{A}$. $\square$

Beispiel 3.30. In Satz 2.23 haben wir gesehen, dass X_k für $k \in \{0,1\}$ endlich ist, weshalb wir Lemma 3.29 anwenden können, um die Eigenwerte von T zu erhalten.

i) Für $k = 0$ sind dies die Eigenwerte von $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$. Falls R beispielsweise nullteilerfrei ist, wäre also der einzige Eigenwert 0.

ii) Für $k = 1$ sind dies die Eigenwerte von $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Falls R beispielsweise nullteilerfrei ist, wären das also -1 und 1.

Für $k \geq 2$ ist X_k laut Satz 2.23 nicht endlich, aber als k-regulärer Baum noch immer lokal endlich. Das Eigenwertverhalten von T auf $C(\mathrm{X}_k, R)$ ist allerdings recht speziell, denn es gilt:

Satz 3.31. *Für $k \geq 2$ ist jedes $r \in R$ ein Eigenwert von T auf $C(\mathrm{X}_k, R)$.*

Beweis: Sei $r \in R$ beliebig, so konstruieren wir induktiv ein $f \in C(\mathrm{X}_k, R) \setminus \{0\}$ mit $Tf = rf$. Sei dazu $x_0 \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ beliebig. Indem wir mit $f(x_0) := 1$ beginnen, stellen wir bereits sicher, dass $f \neq 0$ gilt. Wir beachten zur Visualisierung Abbildung 2, bemerken jedoch, dass wir die Benennung der Knoten im Vergleich zu Abbildung 1 ändern ($k = 2$) bzw. weglassen ($k = 3$) sowie den Ausschnitt B_3 statt B_2 darstellen. Die Knoten sind zudem mit den jeweiligen Bildern unter f beschriftet.

$\underline{k = 2}$: Da X_2 2-regulär ist, hat x_0 genau zwei Nachbarn $x_1, x_{-1} \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_2)$. Wir setzen $f(x_1) := r$ und $f(x_{-1}) := 0$ und erhalten somit

$$\big(Tf\big)(x_0) = f(x_1) + f(x_{-1}) = r + 0 = r = r \cdot f(x_0).$$

Da $k - 1 = 1$ gilt, hat laut Korollar 2.31 jeder Knoten $x \in \mathrm{S}_n$ für $n \geq 1$ genau zwei Nachbarn, wobei einer der eindeutige Nachbar in S_{n-1} ist und der andere in S_{n+1} liegt. Eine mögliche Benennung der Knoten wäre also

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathrm{X}_2) &= \big\{x_i \;\big|\; i \in \mathbb{Z}\big\} \quad \text{mit} \\ \mathrm{E}(\mathrm{X}_2) &= \big\{\{x_i, x_{i+1}\} \;\big|\; i \in \mathbb{Z}\big\}. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft $Tf = rf$ bedeutet dann, dass für alle $i \in \mathbb{Z}$

$$r \cdot f(x_i) = \big(Tf\big)(x_i) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ x_j \sim x_i}} f(x_j) = f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})$$

gelten soll. Wenn wir annehmen, dass wir für ein $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Werte $f(x_i) \in R$ für alle $i \in \{-l, -l+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, l-1, l\}$ schon definiert haben (Induktionsanfang mit $l = 1$ siehe oben), erhalten wir durch Umstellen der Gleichung, dass

$$\begin{aligned} f(x_{l+1}) &= r \cdot f(x_l) - f(x_{l-1}) \in R \quad \text{und} \\ f(x_{-l-1}) &= r \cdot f(x_{-l}) - f(x_{-l+1}) \in R \end{aligned}$$

gelten muss. Da die rechte Seite uns jeweils bekannt ist, können wir f somit sukzessiv über diese Gleichungen definieren und es gilt $Tf = r \cdot f$ per Konstruktion.

$\underline{k \geq 3}$: Wir wählen ein $x \in \mathrm{S}_1$ aus und setzen $f(x) := r$. Die anderen $k-1$ Nachbarn von x_0 erhalten den Wert 0. Somit gilt immerhin schon

$$\big(Tf\big)(x_0) = f(x) + \sum_{x' \in \mathrm{S}_1 \setminus \{x\}} f(x') = r + 0 = r = r \cdot f(x_0).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x \in \mathrm{S}_n$ wählen wir zwei verschiedene Nachbarn $x_1(x)$ und $x_2(x) \in \mathrm{S}_{n+1}$ aus, was möglich ist, da laut Korollar 2.31 und k-Regularität

$$\Big|\big\{x' \in \mathrm{S}_{n+1} \mid x' \sim x\big\}\Big| = \Big|\big\{x' \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid x' \sim x\big\} \setminus \big\{\widetilde{x}\big\}\Big| = k - 1 \geq 2$$

gilt. Wir stellen zunächst fest, dass $\big\{x_1(x), x_2(x)\big\} \cap \big\{x_1(x'), x_2(x')\big\} = \emptyset$ für $x \neq x'$ in S_n gilt, weil $\widetilde{x_1(x)} = \widetilde{x_2(x)} = x \neq x' = \widetilde{x_1(x')} = \widetilde{x_2(x')}$ erfüllt ist. Induktiv definieren wir dann $f\big|_{\mathrm{S}_{n+1}} : \mathrm{S}_{n+1} \to R$ durch

$$f\big|_{\mathrm{S}_{n+1}}(y) := \begin{cases} -f(\widetilde{x}) & \text{falls } y = x_1(x) \text{ für ein } x \in \mathrm{S}_n, \\ r \cdot f(x) & \text{falls } y = x_2(x) \text{ für ein } x \in \mathrm{S}_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bemerken dabei, dass der letzte Fall genau dann eintritt, wenn $y \neq x_1(x)$ und $y \neq x_2(x)$ für alle $x \in \mathrm{S}_n$ gilt. Zudem ist für $x \in \mathrm{S}_n$ wegen $n \geq 1$ das Element $\widetilde{x}$ der eindeutige Nachbar in S_{n-1} und somit sind sowohl $-f(\widetilde{x}) \in R$ als auch $r \cdot f(x) \in R$ bereits definiert. Wegen Bemerkung 2.33 Punkt ii) und Punkt v) ist

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_k) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \dot{\bigcup_{i=0}^{n}} \mathrm{S}_i = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} \mathrm{S}_n, \tag{3.3}$$

weshalb wir mit Blick auf Beispiel 2.28 nun f auf $\mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ definiert haben. Wir rechnen zuletzt für $x \in \mathrm{S}_n$ mit $n \geq 1$ unter Verwendung von Korollar 2.31 nach:

$$\begin{aligned} \big(Tf\big)(x) &= \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim x}} f(y) = f(\widetilde{x}) + \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \\ y \sim x}} f(y) \\ &= f(\widetilde{x}) + f\big(x_1(x)\big) + f\big(x_2(x)\big) + \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \text{ mit } y \sim x, \\ x_1(x) \neq y \neq x_2(x)}} f(y) \\ &= f(\widetilde{x}) - f(\widetilde{x}) + r \cdot f(x) + 0 \\ &= r \cdot f(x), \end{aligned}$$

wobei wir beachten, dass für $y \in \mathrm{S}_{n+1}$ mit $y \sim x$, aber $x_1(x) \neq y \neq x_2(x)$ auch $x_1(x') \neq y \neq x_2(x')$ für alle anderen $x' \in \mathrm{S}_n$ folgt, da wir andernfalls einen Widerspruch durch $x = \widetilde{y} = \widetilde{x_1(x')} = x'$, bzw. analog mit $x_2(x')$, erhalten würden. $\square$

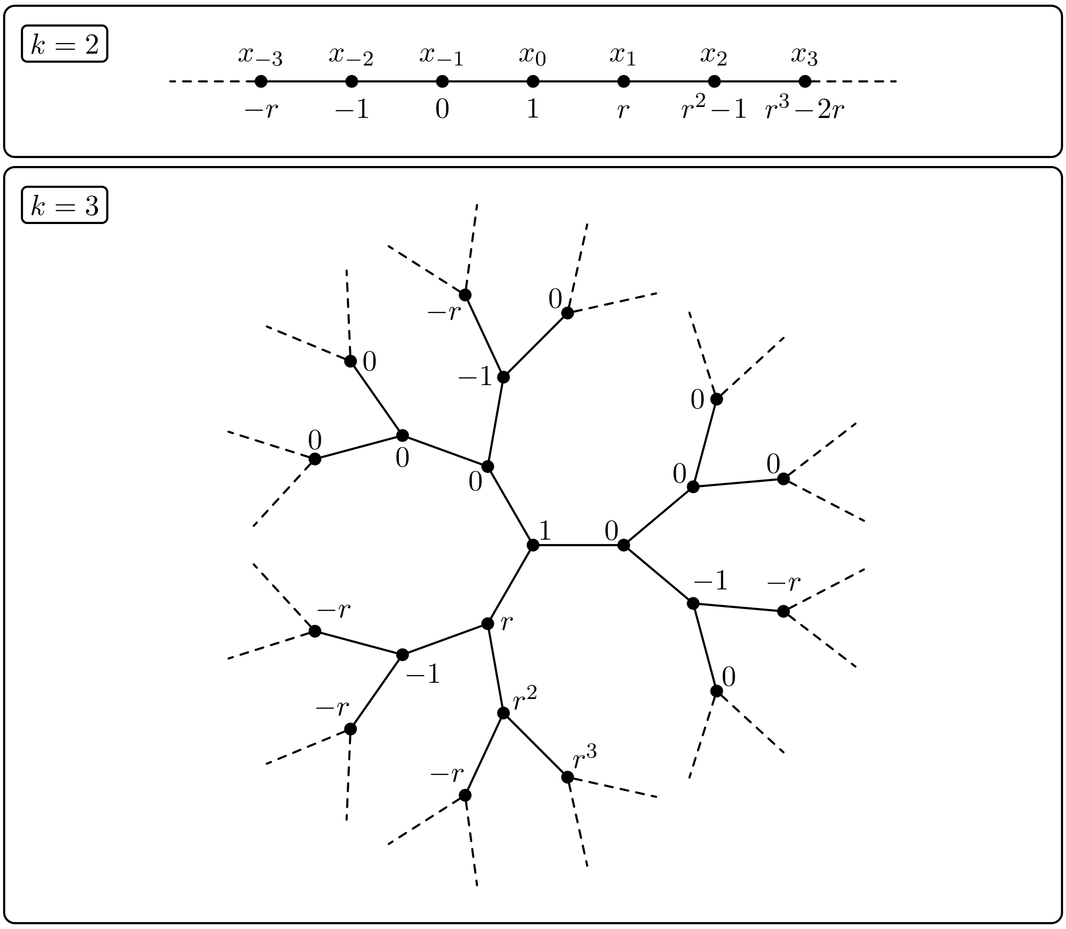

Abbildung 2: Konstruktion eines Eigenvektors f von T zum Eigenwert r

Lemma 3.32. *Sei X ein lokal endlicher Graph. Dann ist $C_c(X,R)$ ein T-stabiler R-Untermodul von $C(X,R)$.*

Beweis: Da X lokal endlich und somit $T \in \mathrm{End}_R\big(C(X,R)\big)$ ist, müssen wir für den Untermodul die Eigenschaft $T\big(C_c(X,R)\big) \subseteq C_c(X,R)$ nachrechnen. Das bedeutet, wir müssen für $f \in C(X,R)$ zeigen:

$$\mathrm{supp}(f) \text{ ist endlich } \Rightarrow \mathrm{supp}(Tf) \text{ ist endlich.}$$

Dazu definieren wir

$$H := \bigcup_{x \in \mathrm{supp}(f)} \big\{ y \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; y \sim x \big\}$$

und prüfen $\mathrm{supp}(Tf) \subseteq H$. Wenn wir zudem sehen, dass H endlich ist, folgt die Behauptung.

Teilmenge: Für $z \in \mathrm{V}(X)$ prüfen wir die Kontraposition $z \notin H \Rightarrow \big(Tf\big)(z) = 0$. Aus $z \notin H$ folgt per Definition $z \notin \big\{ y \in \mathrm{V}(X) \;\big|\; y \sim x \big\}$ für alle $x \in \mathrm{supp}(f)$ und somit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathrm{V}(X)$ mit $x \sim z$. Wir erhalten also

$$\big(Tf\big)(z) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{V}(X) \\ x \sim z}} f(x) = 0.$$

<u>H endlich:</u> Da sowohl $\operatorname{supp}(f)$ als auch $\{y \in \mathrm{V}(X) \mid y \sim x\}$ für einen lokal endlichen Graphen für alle $x \in \operatorname{supp}(f) \subseteq \mathrm{V}(X)$ endlich ist, ist H als endliche Vereinigungen von endlichen Mengen wiederum endlich. □

Wegen Lemma 3.32 ist $T : C_c(X, R) \to C_c(X, R)$ ein wohldefinierter R-Modulendomorphismus. Das Eigenwertverhalten hat sich aber im Vergleich zu Satz 3.31 für $X = \mathrm{X}_k$ mit $k \geq 2$ drastisch geändert, denn wir werden in Korollar 3.35 sehen, dass T auf $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ keinen Eigenwert besitzt. Dazu wenden wir zunächst Lemma 3.10 an, wodurch $C_c(X, R)$ zu einem $R[x]$-Modul wird. Statt der formalen Variablen x nutzen wir jedoch als überlagerte und somit etwas missbräuchliche Notation direkt T, wodurch wir $\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i T^i\right) \cdot f := \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i T^i f$ im $R[T]$-Modul $C_c(X, R)$ erhalten. Damit können wir nun unser wichtigstes Resultat formulieren:

Satz 3.33 (Freiheitssatz)**.** *Für $k \geq 2$ ist der $R[T]$-Modul $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ frei.*

Bemerkung 3.34. Für $k \in \{0, 1\}$ gilt dieser Freiheitssatz nicht, da Satz 2.23 uns dann $\mathrm{X}_k \cong \mathrm{K}_{k+1}$ und somit $\left|\mathrm{V}(\mathrm{X}_k)\right| = k + 1 < \infty$ liefert. Aus Punkt ii) von Bemerkung 3.22 folgt $C_c(\mathrm{X}_k, R) = C(\mathrm{X}_k, R)$ und wegen Lemma 3.24 ist dies ein freier R-Modul mit Rang $k+1$. Da $R[T] \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R$ als R-Moduln gilt, würde aus dem Freiheitssatz hingegen folgen, dass $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ ein freier R-Modul mit Rang 0 oder ∞ wäre. Diese Aussagen stehen jedoch nach Lemma 3.6 im Widerspruch zueinander.

Um diesen Hauptsatz der Arbeit beweisen zu können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen und Hilfsmittel wie etwa filtrierte sowie zugeordnete graduierte Ringe und Moduln, die wir in Abschnitt 3.3 betrachten werden. Nehmen wir an, wir hätten die Freiheit bereits bewiesen, so erhalten wir als Folgerung:

Korollar 3.35. *Für $k \geq 2$ besitzt T keine Eigenvektoren in $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ und somit auch keine Eigenwerte in R.*

Beweis: Aus Satz 3.33 folgt, dass bis auf Isomorphie von $R[T]$-Moduln für eine geeignete Indexmenge I bereits $C_c(\mathrm{X}_k, R) \cong \bigoplus_{i \in I} R[T]$ gilt. Für alle $r \in R$ ist aber die Multiplikation mit $T - r$ auf $R[T]$ und somit auch auf $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ injektiv. □

Die Eigenwerte von T auf $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ im Fall $k \in \{0, 1\}$ ergeben sich aus Lemma 3.29 und Beispiel 3.30.

3.3 Filtrierte sowie zugeordnete graduierte Ringe und Moduln

Wir werden im Folgenden die benötigten Hilfsmittel zum Beweis von Satz 3.33 erarbeiten. Daher sei stets $k \geq 2$ vorausgesetzt.

Definition 3.36. *Ein **filtrierter Ring** ist ein Ring S mit additiven Untergruppen $1_S \in S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$, sodass $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ und $S_i \cdot S_j \subseteq S_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beispiel 3.37. $S := R[T]$ mit $S_n := \big\{p(T) \in R[T] \;\big|\; \deg(p) \leq n\big\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ein filtrierter Ring.

Definition 3.38. *Ein **filtrierter Modul** über einem filtrierten Ring S ist ein S-Modul M mit additiven Untergruppen $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$, sodass $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ und $S_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beispiel 3.39. Für den filtrierten Ring $S = R[T]$ aus Beispiel 3.37 ist der Modul $M := C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit $M_n := \big\{f \in C_c(\mathrm{X}_k, R) \;\big|\; \mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n\big\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein filtrierter Modul, denn:

- $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ ist ein $R[T]$-Modul, was wir bereits für beliebige lokal endliche Graphen gesehen haben.

- $M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da für $f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n$ wegen Punkt iv) von Bemerkung 2.33 auch $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_{n+1}$ gilt.

- M_n ist eine additive Untergruppe von M für alle $n \in \mathbb{N}$, da $0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)} \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit $\mathrm{supp}\big(0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)}\big) = \emptyset \subseteq \mathrm{B}_n$ erfüllt ist. Zudem gilt für $f, g \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n$ und $\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{B}_n$ bereits

$$\mathrm{supp}(f+g) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{B}_n \cup \mathrm{B}_n = \mathrm{B}_n \quad \text{und}$$
$$\mathrm{supp}(-f) = \mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n.$$

- $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, da zum einen $M_n \subseteq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Definition erfüllt ist und wir zum anderen für $f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ stets

$$n := \max\Big\{\underbrace{\mathrm{d}(x, x_0)}_{\in\mathbb{N}} \;\Big|\; x \in \underbrace{\mathrm{supp}(f)}_{\text{endlich}}\Big\} \in \mathbb{N}$$

definieren können, wodurch per Definition des Maximums $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n$ gilt.

- $S_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$, da wir für $p(T) \in R[T]$ mit $\deg(p) \leq i$ und $f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_j$ stets $p(T) \cdot f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ erhalten mit $\mathrm{supp}\big(p(T) \cdot f\big) \subseteq \mathrm{B}_{i+j}$. Dafür zeigen wir zunächst, dass für alle $g \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ mit

$\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{B}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ stets $\mathrm{supp}(Tg) \subseteq \mathrm{B}_{n+1}$ gilt, indem wir die Menge H aus dem Stabilitätsbeweis von Lemma 3.32 nutzen, um

$$\mathrm{supp}(Tg) \subseteq H \overset{\mathrm{Def}}{=} \bigcup_{x \in \mathrm{supp}(g)} \{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\} \subseteq \bigcup_{x \in \mathrm{B}_n} \{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \mid y \sim x\} \subseteq \mathrm{B}_{n+1}$$

zu erhalten, wobei wir die letzte Inklusionsbeziehung mit Korollar 2.31 einsehen. Induktiv folgt daraus mit $g := T^{l-1}f$ für $l = 1, \ldots, i$ schon $\mathrm{supp}\big(T^l f\big) \subseteq \mathrm{B}_{l+j}$. Schreiben wir nun $p(T) = \sum\limits_{l=0}^{i} r_l\, T^l$ mit $r_0, \ldots, r_i \in R$, so erhalten wir damit sowie mit Punkt iv) aus Bemerkung 2.33

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\big(p(T) \cdot f\big) = \mathrm{supp}\left(\sum_{l=0}^{i} r_l\, T^l f\right) &\overset{(3.1)}{\subseteq} \bigcup_{l=0}^{i} \mathrm{supp}\big(r_l\, T^l f\big) \overset{(3.2)}{\subseteq} \bigcup_{l=0}^{i} \mathrm{supp}\big(T^l f\big) \\ &\subseteq \bigcup_{l=0}^{i} \mathrm{B}_{l+j} \subseteq \bigcup_{l=0}^{i} \mathrm{B}_{i+j} = \mathrm{B}_{i+j}.\end{aligned}$$

Definition 3.40. *Für einen filtrierten Ring S setzen wir $S_{-1} := 0$ und definieren den* ***zugeordneten graduierten Ring*** *durch*

$$\mathrm{gr}(S) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n / S_{n-1}$$

im Sinne additiver Gruppen mit der durch $(s_i + S_{i-1}) \cdot (s_j + S_{j-1}) := s_i s_j + S_{i+j-1}$ bestimmten Multiplikation.

Bemerkung 3.41. Die Elemente aus $\mathrm{gr}(S)$ haben die Form $\big(s_n + S_{n-1}\big)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch die Einbettungen $\iota_n := \big(s_n + S_{n-1} \mapsto (0, \ldots, 0, s_n + S_{n-1}, 0, \ldots)\big) : S_n/S_{n-1} \to \mathrm{gr}(S)$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Element $s_n + S_{n-1}$ an die n-te Stelle des Tupels setzen, wobei unsere Zählungen bei 0 beginnen, und die man häufig in der Notation auslässt, erhalten wir die formale Summenschreibweise

$$\big(s_n + S_{n-1}\big)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (s_n + S_{n-1}) \in \mathrm{gr}(S).$$

Beispiel 3.42. Wegen Beispiel 3.37 können wir den zugeordneten graduierten Ring $\mathrm{gr}\big(R[T]\big)$ betrachten, der, wie wir sofort sehen werden, selbst wieder ein Polynomring ist. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir kurz R_n an Stelle von $S_n = R[T]_n$ und erhalten $R_0 = R$. Mit der Einbettung ι_0 folgt

$$R = R_0 = R_0/0 = R_0/R_{-1} \subseteq \mathrm{gr}\big(R[T]\big)$$

als Untergruppe. Da für das Monom $T \in R[T]$ natürlich $\deg(T) = 1$ gilt, definieren wir $T' := T + R_0 \in R_1/R_0 \subseteq \operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ mittels der Einbettung ι_1. Wir wenden nun Lemma 3.11 auf den Ring R, den Ring $\operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$, den Ringhomomorphismus $\iota_0 : R \to \operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ und das Element $T' \in \operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ an. Dass ι_0 nicht nur R als additive Untergruppe einbettet, sondern tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist, ergibt sich aus der Form von $1_{\operatorname{gr}(R[T])} = \bigl(1_R + R_{-1}, 0_R + R_0, 0_R + R_1, \ldots\bigr)$ sowie der Multiplikation aus Definition 3.40 für $i = j = 0$. Wir erhalten somit einen Ringhomomorphismus $\psi : R[T'] \to \operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$, der $\psi(T') = T'$ sowie $\psi \circ \iota = \iota_0$ für die Einbettung $\iota : R \to R[T']$ erfüllt. Dabei beachten wir erneut die überlagerte Notation von T'. Per Induktion sehen wir, dass in $\operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ (hier auch einmal ausgeschrieben ohne ι_n)

$$\bigl(T + R_0\bigr)^n = \bigl(0, \underbrace{T + R_0}_{\text{1-te Stelle}}, 0, \ldots\bigr)^n = \bigl(0, \ldots, 0, \underbrace{T^n + R_{n-1}}_{n\text{-te Stelle}}, 0, \ldots\bigr) = T^n + R_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, weshalb ψ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\psi\Bigl(\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n\, T'^n\Bigr) &:= \sum_{n\in\mathbb{N}} \iota_0(r_n)\, T'^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bigl(r_n + R_{-1}\bigr) \cdot \bigl(T + R_0\bigr)^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \bigl(r_n + R_{-1}\bigr) \cdot \bigl(T^n + R_{n-1}\bigr) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bigl(r_n\, T^n + R_{n-1}\bigr) \\
&= \bigl(r_n\, T^n + R_{n-1}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun noch zeigen, dass ψ bijektiv ist, erhalten wir $\operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr) \cong R[T']$ als Ringe, was bedeutet, dass $\operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ selbst ein Polynomring über R in T' ist.

surjektiv: Sei $\bigl(\widetilde{r}_n + R_{n-1}\bigr)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$, also $\widetilde{r}_n \in R[T]$ mit $\deg(\widetilde{r}_n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da Terme von Grad $< n$ in R_{n-1} liegen, folgt $\widetilde{r}_n + R_{n-1} = r_n\, T^n + R_{n-1}$ für ein $r_n \in R$. Per Definition von $\operatorname{gr}\bigl(R[T]\bigr)$ sind fast alle $\widetilde{r}_n \in R_{n-1}$ und daher auch fast alle $r_n = 0_R$. Somit ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n\, T'^n \in R[T']$ tatsächlich ein Polynom, das nach obiger Rechnung $\psi\Bigl(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n\, T'^n\Bigr) = \bigl(r_n\, T^n + R_{n-1}\bigr)_{n\in\mathbb{N}} = \bigl(\widetilde{r}_n + R_{n-1}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt.

injektiv: Da ψ ein Ringhomomorphismus ist, zeigen wir hierzu $\operatorname{Ker}(\psi) = \bigl\{0_{R[T']}\bigr\}$. Sei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n\, T'^n \in R[T']$ mit $0_{\operatorname{gr}(R[T])} = \psi\Bigl(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n\, T'^n\Bigr) = \bigl(r_n\, T^n + R_{n-1}\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt $r_n\, T^n \in R_{n-1}$ und daher mit $\deg(r_n\, T^n) \leq n - 1$ schon $r_n = 0_R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.43. *Für einen filtrierten Modul M über einem filtrierten Ring S setzen wir $M_{-1} := 0$ und definieren den* ***zugeordneten graduierten*** $\mathbf{gr(S)}$***-Modul*** *durch*

$$\operatorname{gr}(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n/M_{n-1}$$

im Sinne additiver Gruppen mit der durch $(s_i + S_{i-1}) \cdot (m_j + M_{j-1}) := s_i m_j + M_{i+j-1}$ bestimmten Skalarmultiplikation.

Bemerkung 3.44. Bemerkung 3.41 gilt analog für $\operatorname{gr}(M)$.

Beispiel 3.45. Wegen Beispiel 3.39 können wir den zugeordneten graduierten Modul $\operatorname{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ über dem zugeordneten graduierten Ring $\operatorname{gr}\big(R[T]\big)$ betrachten. Da wir in Beispiel 3.42 $R \subseteq \operatorname{gr}\big(R[T]\big)$ gesehen haben, können wir $\operatorname{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ auch als R-Modul betrachten und werden im Folgenden

$$\operatorname{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C_c(\mathrm{B}_n, R)/C_c(\mathrm{B}_{n-1}, R) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C_c(\mathrm{S}_n, R) \cong C_c(\mathrm{X}_k, R) \tag{3.4}$$

als R-Moduln sehen, wobei wir B_n und S_n mit Blick auf Bemerkung 2.27 sowie Bemerkung 2.33 Punkt i) als induzierte Teilgraphen von X_k auffassen. Das Gleichheitszeichen zu Beginn von Gleichung (3.4) sehen wir, indem wir die Definition von $\operatorname{gr}(M)$ mit $M_n = \big\{f \in C_c(\mathrm{X}_k, R) \;\big|\; \operatorname{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_n\big\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten. Durch das „Vergessen“ der Knoten außerhalb von B_n, die ohnehin nicht im Träger liegen, erhalten wir $M_n = C_c(\mathrm{B}_n, R)$, was formal bedeutet, dass wir $f\big|_{\mathrm{B}_n}$ bilden. Da B_{-1} im Grunde nicht definiert ist, setzen wir direkt $C_c(\mathrm{B}_{-1}, R) := 0 = M_{-1}$. Um die Isomorphie in der Mitte von (3.4) zu sehen, genügt es, $C_c(\mathrm{B}_n, R)/C_c(\mathrm{B}_{n-1}, R) \cong C_c(\mathrm{S}_n, R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, da sich der gesuchte Isomorphismus dann komponentenweise ergibt. Wir definieren dazu $\phi : C_c(\mathrm{B}_n, R) \to C_c(\mathrm{S}_n, R)$ durch $\phi(f) := f\big|_{\mathrm{S}_n}$, wobei es sich wegen $\mathrm{S}_n \subseteq \mathrm{B}_n$ um einen wohldefinierten, surjektiven R-Modulhomomorphismus handelt. Da wir mit Bemerkung 2.33 Punkt ii) $\mathrm{B}_n = \mathrm{S}_n \,\dot\cup\, \mathrm{B}_{n-1}$ erhalten, folgt $\operatorname{Ker}(\phi) = \big\{f \in C_c(\mathrm{B}_n, R) \;\big|\; f\big|_{\mathrm{S}_n} = 0\big\} = C_c(\mathrm{B}_{n-1}, R)$ und mit dem Homomorphiesatz die Behauptung. Jetzt bleibt uns nur noch die letzte Isomorphie aus (3.4) zu zeigen. Wie in Gleichung (3.3) bereits gesehen, gilt $\mathrm{V}(\mathrm{X}_k) = \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} \mathrm{S}_n$, weshalb wir $\varphi : \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} C_c(\mathrm{S}_n, R) \to C_c(\mathrm{X}_k, R)$ und $\psi : C_c(\mathrm{X}_k, R) \to \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} C_c(\mathrm{S}_n, R)$ durch die Zuordnungen

$$\begin{aligned}
\varphi\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) &:= \big(x \mapsto f_n(x) \text{ für das eindeutige } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in \mathrm{S}_n\big),\\
\psi(f) &:= \big(f\big|_{\mathrm{S}_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

definieren. Für die Wohldefiniertheit von φ fehlt uns nur, dass $\operatorname{supp}\Big(\varphi\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big)$ endlich ist. Per Definition der direkten Summe ist $f_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_i = 0$ für alle $i > m$. Für $x \notin \mathrm{B}_m$ gilt dann $x \in \mathrm{S}_i$ für ein $i > m$ und somit $0_R = f_i(x) = \varphi\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)(x)$, also per Kontraposition $\operatorname{supp}\Big(\varphi\big((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big) \subseteq \mathrm{B}_m$, was mit Bemerkung 2.33 Punkt iii) insbesondere bedeutet, dass der Träger endlich ist. Für die Wohldefiniertheit von ψ müssen wir hingegen zeigen, dass die Einträge von $\psi(f)$ fast alle 0 sind. In Beispiel 3.39 haben wir unter anderem gesehen, dass für $f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$ stets $\operatorname{supp}(f) \subseteq \mathrm{B}_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, womit $f\big|_{\mathrm{S}_i} = 0$ für alle $i > m$ folgt. Wir haben also bewiesen, dass $f\big|_{\mathrm{S}_n} = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dass es sich bei φ und ψ um R-Modulhomomorphismen handelt, könnten wir auf den Argumenten nachrechnen, wobei wir im Wesentlichen nur die komponentenweise Addition in der direkten Summe und die übliche Definition der Addition sowie Skalarmultiplikation von Abbildungen verwenden würden. Zuletzt sehen wir direkt anhand der Definition, dass φ und ψ invers zueinander sind, wodurch Gleichung (3.4) abschließend bewiesen ist.

Da homogene Elemente in einem Zwischenschritt (Lemma 3.47) auf dem Weg zum Beweis unseres Freiheitssatzes eine wichtige Rolle spielen, werden wir uns nun anschauen, wie sich Definition 3.19 in speziellen Fällen verhält. Ist M ein filtrierter Modul über einem filtrierten Ring S, so können wir uns die homogenen Elemente von $\mathrm{gr}(S)$ und $\mathrm{gr}(M)$ anschauen. $\overline{s} \in \mathrm{gr}(S)$ $\big($bzw. $\overline{m} \in \mathrm{gr}(M)\big)$ ist genau dann homogen vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn ein $s \in S_n$ $\big($bzw. $m \in M_n\big)$ existiert mit $\overline{s} = s + S_{n-1}$ $\big($bzw. $\overline{m} = m + M_{n-1}\big)$, wobei wir erneut die Einbettungen ι_n in der Notation weglassen. Im Fall $S = R[T]$ und $M = C_c(\mathrm{X}_k, R)$ können wir die homogenen Elemente damit charakterisieren, wollen aber zuvor noch den Strukturtransport aus Satz 3.12 anwenden. Wenn wir Beispiel 3.45 noch einmal durchgehen, sehen wir, dass der R-Modulisomorphismus in Gleichung (3.4), den wir mit κ bezeichnen, insgesamt gegeben ist durch

$$\kappa\big((f_n + M_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}\big) = \big(x \mapsto f_m\big|_{\mathrm{S}_m}(x) \text{ für das eindeutige } m \in \mathbb{N} \text{ mit } x \in \mathrm{S}_m\big).$$

Nun ist also $\kappa \in \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big), C_c(\mathrm{X}_k, R)\Big)$ bijektiv und wegen der Isomorphie $\mathrm{gr}\big(R[T]\big) \cong R[T']$ als Ringe laut Beispiel 3.42 ist $\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ sogar ein $R[T']$-Modul. Mittels Strukturtransport erhalten wir auf $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ eine $R[T']$-Modulstruktur mit $T' \cdot f = \kappa\big(T' \cdot \kappa^{-1}(f)\big)$ und κ wird sogar zum $R[T']$-Modulisomorphismus. T' wird manchmal auch als **graduierter Heckeoperator** bezeichnet und in Anlehnung an $\mathrm{gr}\big(R[T]\big)$ und $\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ mit $\mathrm{gr}(T)$ notiert.

Lemma 3.46. $\overline{f} \in \mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ *ist genau dann homogen vom Grad* $n \in \mathbb{N}$, *wenn* $\mathrm{supp}\big(\kappa(\overline{f})\big) \subseteq \mathrm{S}_n$ *gilt. Das bedeutet, dass homogene Elemente per Strukturtransport genau die Funktionen sind, deren Träger in einer Sphäre liegen.*

Beweis: Laut unseren Vorüberlegungen ist $\overline{f} \in \mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ genau dann homogen vom Grad $n \in \mathbb{N}$, wenn $f \in M_n = \big\{g \in C_c(\mathrm{X}_k, R) \bigm| \mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{B}_n\big\}$ existiert mit $\overline{f} = f + M_{n-1}$. Da κ bijektiv ist, tritt dies genau dann ein, wenn $\kappa(\overline{f}) = \kappa(f + M_{n-1})$ erfüllt ist. Weil in allen außer der n-ten Komponente von $f + M_{n-1} \in \mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ eine Null steht, gilt per Definition von κ

$$\kappa(f + M_{n-1}) = \left(x \mapsto \begin{cases} f\big|_{\mathrm{S}_n}(x) & \text{falls } x \in \mathrm{S}_n, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases}\right) \in C_c(\mathrm{X}_k, R).$$

Für diese Abbildung sehen wir sofort, dass der Träger in S_n enthalten ist. Umgekehrt bleibt nur zu zeigen, dass wir für $\overline{f} \in \mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ mit $\mathrm{supp}\big(\kappa(\overline{f})\big) \subseteq \mathrm{S}_n$ ein $f \in M_n$ finden mit

$$\kappa(\overline{f}) = \left(x \mapsto \begin{cases} f\big|_{\mathrm{S}_n}(x) & \text{falls } x \in \mathrm{S}_n, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases} \right).$$

Mit der Wahl $f := \kappa(\overline{f})$ und wegen $\mathrm{supp}\big(\kappa(\overline{f})\big) \subseteq \mathrm{S}_n \subseteq \mathrm{B}_n$ ist dies jedoch klar. $\square$

An dieser Stelle wollen wir uns fragen, welchen Vorteil der Übergang von $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ als $R[T]$-Modul zu $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ als $R[T']$-Modul (via Graduierung und Strukturtransport) sowie die Betrachtung von homogenen Elementen bringt: In $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ als $R[T]$-Modul gilt für alle $x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$

$$T \cdot \mathbb{1}_x = \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y, \tag{3.5}$$

denn für alle $z \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$ rechnen wir

$$\big(T \cdot \mathbb{1}_x\big)(z) \overset{\mathrm{Def}}{=} \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim z}} \mathbb{1}_x(y) = \begin{cases} 1_R & \text{falls } x \sim z, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases} = \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y(z)$$

nach. Weil Korollar 2.31 für $x \neq x_0$, also $x \in \mathrm{S}_n$ mit $n \geq 1$, aussagt, dass $k-1$ Nachbarn von x in S_{n+1} und genau einer in S_{n-1} liegt, bedeutet die Gleichung anschaulich, dass T den Wert 1 vom Knoten x nach außen auf die Nachbarn von x in S_{n+1}, aber auch nach innen Richtung x_0 zum Nachbarn $\widetilde{x} \in \mathrm{S}_{n-1}$ schiebt. Der graduierte Heckeoperator T' verhält sich auf $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ hingegen etwas einfacher, da der Term für $\widetilde{x}$ wegfällt und die 1 vom Knoten x somit nur nach außen geschoben wird. Formal bedeutet das, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathrm{S}_n$

$$T' \cdot \mathbb{1}_x = \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y \tag{3.6}$$

gilt, denn wir rechnen wegen $\mathbb{1}_x \in M_n$ nach:

$$\begin{aligned} T' \cdot \mathbb{1}_x &= \kappa\big(T' \cdot \kappa^{-1}(\mathbb{1}_x)\big) = \kappa\big(T' \cdot (\mathbb{1}_x + M_{n-1})\big) = \kappa\big((T + R_0) \cdot (\mathbb{1}_x + M_{n-1})\big) \\ &= \kappa\big(T \cdot \mathbb{1}_x + M_n\big) \overset{(3.5)}{=} \kappa\Bigg(\sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y + M_n \Bigg) = \sum_{\substack{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \\ y \sim x}} \kappa\big(\mathbb{1}_y + M_n\big) \\ &= \kappa\big(\mathbb{1}_{\widetilde{x}} + M_n\big) + \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \\ y \sim x}} \kappa\big(\mathbb{1}_y + M_n\big) \quad \text{(mittels Korollar 2.31)} \end{aligned}$$

$$= \kappa(0) + \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \\ y \sim x}} \kappa\big(\mathbb{1}_y + M_n\big) \qquad \big(\text{da } \mathbb{1}_{\widetilde{x}} \in M_{n-1} \subseteq M_n, \text{ weil } \widetilde{x} \in \mathrm{S}_{n-1}\big)$$

$$= \sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{n+1} \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y \qquad \big(\text{da } \mathbb{1}_y \in M_{n+1}, \text{ weil } y \in \mathrm{S}_{n+1}\big),$$

wobei im Fall $n = 0$ und somit $x = x_0$ die Gleichung analog gilt, wenn man den Summanden $\kappa\big(\mathbb{1}_{\widetilde{x}} + M_n\big) = \kappa(0)$ weglässt, da dann die Nachbarn von x alle in S_1 liegen.

3.4 Beweis des Freiheitssatzes

Für den Beweis des Freiheitssatzes fehlt uns nur noch ein letzter Zwischenschritt. Zwar könnten wir die Aussage des folgenden Lemmas auch innerhalb des Beweises mit expliziten Elementen nachrechnen, doch da das Ergebnis allgemein gilt, zeigen wir vorab:

Lemma 3.47. *Sei M ein filtrierter Modul über einem filtrierten Ring S. Ist $\mathrm{gr}(M)$ ein freier $\mathrm{gr}(S)$-Modul, der eine Basis aus homogenen Elementen besitzt, so ist M ein freier S-Modul.*

Beweis: Um dies zu beweisen, müssen wir aus einer homogenen $\mathrm{gr}(S)$-Basis von $\mathrm{gr}(M)$ eine S-Basis von M konstruieren. Sei also I eine Indexmenge und die Familie $\big(\overline{m_i}\big)_{i \in I}$ in $\mathrm{gr}(M)$ eine homogene $\mathrm{gr}(S)$-Basis. Das bedeutet, dass für jedes $i \in I$ ein $j(i) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\overline{m_i} = m_{j(i)} + M_{j(i)-1}$ mit $m_{j(i)} \in M_{j(i)} \subseteq M$ gilt, da M ein filtrierter Modul ist. Daher liegt die Familie $\big(m_{j(i)}\big)_{i \in I}$ in M. Wir wollen zeigen, dass diese Familie eine S-Basis von M ist.

<u>l.u.:</u> Sei $J \subseteq I$ endlich und seien $s_i \in S$ für alle $i \in J$ mit $\sum_{i \in J} s_i m_{j(i)} = 0_M$. Wir müssen zeigen, dass $s_i = 0_S$ für alle $i \in J$ gilt. Da S ein filtrierter Ring ist, existiert für jedes $i \in J$ ein $k(i) \in \mathbb{N}$ mit $s_i \in S_{k(i)}$. Durch $k(i) := \min\big\{n \in \mathbb{N} \bigm| s_i \in S_n\big\}$ können wir annehmen, dass $k(i)$ stets minimal ist, da das Minimum einer nichtleeren Teilmenge der natürlichen Zahlen stets existiert. Falls $J = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Für $J \neq \emptyset$ definieren wir $K := \max\big\{k(i) + j(i) \bigm| i \in J\big\} \in \mathbb{N}$, da J endlich ist. Da M ein filtrierter Modul über dem filtrierten Ring S ist, gilt

$$\sum_{\substack{i \in J \\ k(i)+j(i)=l}} s_i m_{j(i)} \in M_l \subseteq M_{K-1} \tag{3.7}$$

für alle $l \in \{0, \ldots, K-1\}$ und somit

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i\in J\\ k(i)+j(i)=K}} &\big(s_i + S_{k(i)-1}\big)\cdot\big(m_{j(i)} + M_{j(i)-1}\big)\\
&= \sum_{\substack{i\in J\\ k(i)+j(i)=K}} \big(\underbrace{s_i m_{j(i)}}_{\in M_K} + M_{\underbrace{k(i)+j(i)-1}_{=K-1}}\big)\\
&\overset{(3.7)}{=} \left(\sum_{\substack{i\in J\\ k(i)+j(i)=K}} s_i m_{j(i)} + \sum_{l=0}^{K-1}\sum_{\substack{i\in J\\ k(i)+j(i)=l}} s_i m_{j(i)}\right) + M_{K-1}\\
&= \sum_{\substack{i\in J\\ k(i)+j(i)\leq K}} s_i m_{j(i)} + M_{K-1}\\
&= \sum_{i\in J} s_i m_{j(i)} + M_{K-1} \quad \text{(per Definition von } K\text{)}\\
&= 0_M + M_{K-1} \quad \text{(nach Voraussetzung)}\\
&= 0_{\mathrm{gr}(M)}.
\end{aligned}$$

Da $\{i \in J \mid k(i) + j(i) = K\} \subseteq J \subseteq I$ endlich ist und für jedes $i \in J$ mit $k(i)+j(i) = K$ stets $s_i + S_{k(i)-1} \in S_{k(i)}/S_{k(i)-1} \subseteq \mathrm{gr}(S)$ sowie $m_{j(i)} + M_{j(i)-1} = \overline{m_i}$ gilt, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Familie $\big(\overline{m_i}\big)_{i\in I}$ in $\mathrm{gr}(M)$ über $\mathrm{gr}(S)$, dass $s_i + S_{k(i)-1} = 0_{\mathrm{gr}(S)}$ für alle $i \in J$ mit $k(i)+j(i) = K$. Das bedeutet allerdings, dass s_i in $S_{k(i)-1}$ liegt, was im Fall $k(i) > 0$ einen Widerspruch zur Minimalität von $k(i)$ darstellt. Also ist $k(i) = 0$ und somit $s_i \in S_{-1} = 0$ für alle $i \in J$ mit $k(i) + j(i) = K$. Per Definition von K existiert ein $i_K \in J$ mit $k(i_K) + j(i_K) = K$ und damit $s_{i_K} = 0_S$. Diesen Vorgang können wir erneut auf die Menge $J \setminus \{i_K\}$ anwenden und induktiv erhalten wir schließlich $s_i = 0_S$ für alle $i \in J$, da J endlich ist.

<u>EZS:</u> Sei $m \in M$. Da M ein filtrierter Modul ist, gilt $m \in M_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Um sich überflüssige Schritte zu sparen, würde man für ein explizit gegebenes m wie zuvor n minimal wählen. Das (homogene) Element $m + M_{n-1}$ liegt in $\mathrm{gr}(M)$, weshalb es nach der Voraussetzung, dass $\big(\overline{m_i}\big)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(S)$-Modul ist, eine endliche Indexmenge $I_n \subseteq I$ sowie Koeffizienten $\big(s_l^{(i)} + S_{l-1}\big)_{l\in\mathbb{N}} \in \mathrm{gr}(S)$ für alle $i \in I_n$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}
m + M_{n-1} &= \sum_{i\in I_n} \big(s_l^{(i)} + S_{l-1}\big)_{l\in\mathbb{N}} \cdot \overline{m_i}\\
&= \sum_{i\in I_n}\sum_{l\in\mathbb{N}} \big(s_l^{(i)} + S_{l-1}\big)\cdot\big(m_{j(i)} + M_{j(i)-1}\big)\\
&= \sum_{i\in I_n}\sum_{l\in\mathbb{N}} \big(s_l^{(i)} m_{j(i)} + M_{l+j(i)-1}\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{r\in\mathbb{N}} \Bigg(\sum_{\substack{i\in I_n,\, l\in\mathbb{N}\\ l+j(i)=r}} \big(\underbrace{s_l^{(i)} m_{j(i)}}_{\in M_r} + M_{\underbrace{l+j(i)-1}_{=r-1}}\big)\Bigg)\\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}} \Bigg(\Bigg(\sum_{\substack{i\in I_n,\, l\in\mathbb{N}\\ l+j(i)=r}} s_l^{(i)} m_{j(i)} \Bigg) + M_{r-1} \Bigg)\\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}} \Bigg(\Bigg(\sum_{\substack{i\in I_n\\ j(i)\le r}} s_{r-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} \Bigg) + M_{r-1} \Bigg)\\
&= \Bigg(\Bigg(\sum_{\substack{i\in I_n\\ j(i)\le r}} s_{r-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} \Bigg) + M_{r-1} \Bigg)_{r\in\mathbb{N}}
\end{aligned}
$$

gilt. Insbesondere bedeutet dies für den n-ten Eintrag (bzw. Summanden), dass

$$m + M_{n-1} = \sum_{\substack{i\in I_n\\ j(i)\le n}} s_{n-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} + M_{n-1}$$

und somit für ein ${}^{(1)}m \in M_{n-1}$

$$m = \sum_{\substack{i\in I_n\\ j(i)\le n}} s_{n-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} + {}^{(1)}m$$

erfüllt ist. Das obige Verfahren lässt sich erneut auf den Rest ${}^{(1)}m$ anwenden und induktiv auf die jeweils entstehenden Reste ${}^{(2)}m \in M_{n-2}, \ldots, {}^{(n)}m \in M_{n-n} = M_0$, bis es für ${}^{(n+1)}m \in M_{-1} = 0$ abbricht. (In der Praxis kann man durch Minimumbildung eventuell wieder Schritte überspringen.) Wir erhalten endliche Indexmengen $I_{n-1}, \ldots, I_0$ sowie Elemente $\big({}^{(1)}s_l^{(i)} + S_{l-1}\big)_{l\in\mathbb{N}} \in \mathrm{gr}(S)$ für alle $i \in I_{n-1}$, ..., $\big({}^{(n)}s_l^{(i)} + S_{l-1}\big)_{l\in\mathbb{N}} \in \mathrm{gr}(S)$ für alle $i \in I_0$, sodass insgesamt

$$m = \sum_{\substack{i\in I_n\\ j(i)\le n}} s_{n-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} + \sum_{\substack{i\in I_{n-1}\\ j(i)\le n-1}} {}^{(1)}s_{n-1-j(i)}^{(i)} m_{j(i)} + \ldots + \sum_{\substack{i\in I_0\\ j(i)\le 0}} {}^{(n)}s_{0-j(i)}^{(i)} m_{j(i)}$$

gilt. Da die Indexmengen alle endlich sind, ist dies insbesondere eine endliche Linearkombination der $m_{j(i)}$ mit Koeffizienten in S. $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir Satz 3.33 schließlich beweisen:
Wegen Beispiel 3.37 und Beispiel 3.39 ist $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ ein filtrierter Modul über dem filtrierten Ring $R[T]$. Um zu zeigen, dass $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ frei über $R[T]$ ist, genügt es laut Lemma 3.47 zu zeigen, dass $\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ eine $\mathrm{gr}\big(R[T]\big)$-Basis aus homogenen Elementen besitzt. Des Weiteren haben wir am Ende von Abschnitt 3.3 unter Verwendung von Beispiel 3.42 und Beispiel 3.45 gesehen, dass $\mathrm{gr}\big(R[T]\big) \cong R[T']$

als Ringe und $\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big) \cong C_c(\mathrm{X}_k, R)$ als R-Moduln gilt und wie sich homogene Elemente unter letzterem Isomorphismus verhalten, wenn man $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ über Strukturtransport als $R[T']$-Modul auffasst. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in \mathrm{S}_n$ fixieren wir einen Nachbarn $\widehat{x} \in \mathrm{S}_{n+1}$. Dieser existiert, da die Wurzel x_0 natürlich $k \geq 2$ Nachbarn in S_1 hat und laut Korollar 2.31 jeder andere Knoten $k-1 \geq 1$ Nachbarn in S_{n+1} besitzt. Wir setzen nun

$$\mathcal{B} := \big(\mathbb{1}_y\big)_{y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k) \setminus \{\, \widehat{x} \,|\, x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)\}}$$

und rechnen nach, dass diese Familie eine $R[T']$-Basis von $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ darstellt, die zudem unter κ^{-1} auf homogene Elemente in $\mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ abgebildet wird. Wir bemerken dabei, dass die Wahl von $\mathcal{B}$ analog zum Beweis von Theorem 10 aus Abschnitt 2.3 von [BL95, S. 9 f.] verläuft, wobei wir erst in Lemma 4.54 sehen werden, wie wir die dort verwendete Notation mit unserer in Beziehung setzen können.

homogen: Es gilt sogar für jedes $y \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$, dass $\mathbb{1}_y \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$, wie bereits am Ende von Abschnitt 3.3 nachgerechnet, $\kappa^{-1}(\mathbb{1}_y) = \mathbb{1}_y + M_{n-1} \in \mathrm{gr}\big(C_c(\mathrm{X}_k, R)\big)$ sowie die Eigenschaft $\mathrm{supp}\Big(\kappa\big(\kappa^{-1}(\mathbb{1}_y)\big)\Big) = \mathrm{supp}(\mathbb{1}_y) = \{y\} \subseteq \mathrm{S}_n$ aus Lemma 3.46 erfüllt mit $n = \mathrm{d}(x_0, y) \in \mathbb{N}$.

EZS: Sei $f \in C_c(\mathrm{X}_k, R)$. Da laut Gleichung (3.3) stets $\mathrm{V}(\mathrm{X}_k) = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ gilt, schreiben wir $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f\big|_{\mathrm{S}_n}$ und aus der Wohldefiniertheit von ψ in Beispiel 3.45 geht hervor, dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f = \sum_{n=0}^{m} f\big|_{\mathrm{S}_n}$ sogar eine endliche Summe ist. Wenn wir nun für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen können, dass $C_c(\mathrm{S}_n, R) \subseteq R[T'] \cdot \mathcal{B}$ erfüllt ist, wäre jeder Summand $f\big|_{\mathrm{S}_n}$ der endlichen Summe selbst eine endliche Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{B}$ mit Koeffizienten aus $R[T']$, was auch f zu einer solchen Linearkombination machen würde. Die fehlende Behauptung beweisen wir per Induktion, wobei wir nutzen, dass wegen Bemerkung 3.25 angewandt auf S_n noch immer $C_c(\mathrm{S}_n, R) = \bigoplus_{y \in \mathrm{S}_n} R \cdot \mathbb{1}_y$ als R-Modul gilt.

I.A.: Für $n = 0$ ist $\mathrm{S}_0 = \{x_0\}$ und somit $C_c(\mathrm{S}_0, R) = R \cdot \mathbb{1}_{x_0} \subseteq R[T'] \cdot \mathcal{B}$, da $R \subseteq R[T']$ und $\mathbb{1}_{x_0} \in \mathcal{B}$ gilt. Letzteres ist erfüllt, weil $x_0 \neq \widehat{x}$ für alle $x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$, da per Konstruktion $\mathrm{d}(x_0, \widehat{x}) = n + 1 \geq 1$ gilt.

I.V.: Es gelte $C_c(\mathrm{S}_n, R) \subseteq R[T'] \cdot \mathcal{B}$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

I.S.: Wie zuvor ist $C_c(\mathrm{S}_{n+1}, R) = \bigoplus_{y \in \mathrm{S}_{n+1}} R \cdot \mathbb{1}_y$. Wenn wir also zeigen können, dass $\mathbb{1}_y \in R[T'] \cdot \mathcal{B}$ für alle $y \in \mathrm{S}_{n+1}$ gilt, so wäre der Induktionsschritt wegen $R \subseteq R[T']$ sowie der aus der direkten Summe stammenden Endlichkeit bewiesen. Falls $y \in V_{\mathcal{B}} := \mathrm{V}\big(\mathrm{X}_k\big) \setminus \big\{\widehat{x} \;\big|\; x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)\big\}$, dann gilt sogar $\mathbb{1}_y \in \mathcal{B}$ per Definition.

Falls jedoch $y = \widehat{x}$ für ein $x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)$, d.h. $x \in \mathrm{S}_n$ mit $x \sim y$, so betrachten wir

$$T' \cdot \mathbb{1}_x \overset{(3.6)}{=} \sum_{\substack{z \in \mathrm{S}_{n+1} \\ z \sim x}} \mathbb{1}_z = \mathbb{1}_y + \sum_{\substack{z \in \mathrm{S}_{n+1} \setminus \{y\} \\ z \sim x}} \mathbb{1}_z,$$

wobei wir bemerken, dass $\mathbb{1}_z \in \mathcal{B}$ für alle $z \in \mathrm{S}_{n+1} \setminus \{y\}$ mit $z \sim x$, weil nur der Nachbar $\widehat{x} = y$ von x in S_{n+1} bei der Definition von $\mathcal{B}$ ausgeschlossen wurde, die übrigen $k-2$ Nachbarn jedoch in $V_{\mathcal{B}}$ enthalten sind. Da zudem $x \in \mathrm{S}_n$ und $-1 \in R[T']$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_y &= T' \cdot \mathbb{1}_x - \sum_{\substack{z \in \mathrm{S}_{n+1} \setminus \{y\} \\ z \sim x}} \mathbb{1}_z \\ &\in R[T'] \cdot C_c(\mathrm{S}_n, R) + R[T'] \cdot \mathcal{B} \\ &\overset{\text{I.V.}}{\subseteq} R[T'] \cdot \big(R[T'] \cdot \mathcal{B}\big) + R[T'] \cdot \mathcal{B} \\ &= R[T'] \cdot \mathcal{B}. \end{aligned}$$

<u>l.u.:</u> Sei $W \subseteq V_{\mathcal{B}}$ endlich und seien für alle $y \in W$ Polynome $p_y(T') \in R[T']$ gegeben mit $\sum_{y \in W} p_y(T') \cdot \mathbb{1}_y = 0_{C_c(\mathrm{X}_k, R)}$. Wir müssen $p_y(T') = 0_{R[T']}$ für alle $y \in W$ zeigen, d.h. wenn $p_y(T') = \sum_{i=0}^{\deg(p_y)} r_{i,y} {T'}^i$ mit Koeffizienten in R, müssen wir $r_{i,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y := \{0, \ldots, \deg(p_y)\}$ und alle $y \in W$ beweisen. Im $R[T']$-Modul $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ erhalten wir durch Umsortieren

$$0_{C_c(\mathrm{X}_k, R)} = \sum_{y \in W} p_y(T') \cdot \mathbb{1}_y = \sum_{y \in W} \sum_{i \in I_y} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Bigg(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0, y) + i = n}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y \Bigg).$$

Wenn wir für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$

$$\operatorname{supp}\Bigg(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0, y) + i = m}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y \Bigg) \cap \operatorname{supp}\Bigg(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0, y) + i = n}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y \Bigg) = \emptyset \tag{3.8}$$

zeigen können, erhalten wir daraus durch Einschränken der vorigen Gleichung auf einen solchen Träger zumindest schon

$$\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0, y) + i = n}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y = 0_{C_c(\mathrm{X}_k, R)} \tag{3.9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir danach per Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen können, dass somit $r_{i,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y$ und alle $y \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y) + i = n$ gilt, wäre der Beweis abgeschlossen, da $\mathrm{d}(x_0, y) + i$ für solche i und y stets eine natürliche Zahl ist.

<u>(3.8)</u>: Aus Gleichung (3.6) können wir folgern, dass für jedes $x \in \mathrm{S}_l$ mit $l \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{supp}\Big(T' \cdot \mathbb{1}_x\Big) = \operatorname{supp}\left(\sum_{\substack{y \in \mathrm{S}_{l+1} \\ y \sim x}} \mathbb{1}_y\right) = \Big\{y \in \mathrm{S}_{l+1} \;\Big|\; y \sim x\Big\} \subseteq \mathrm{S}_{l+1}$$

gilt. Induktiv folgt daraus $\operatorname{supp}\big({T'}^i \mathbb{1}_x\big) \subseteq \mathrm{S}_{l+i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wenn wir dies auf die $y \in W$ anwenden, d.h. mit $y \in \mathrm{S}_{\mathrm{d}(x_0,y)}$, geht für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}\left(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y\right) &\overset{(3.1)}{\subseteq} \bigcup_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} \operatorname{supp}\big(r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y\big) \\
&\overset{(3.2)}{\subseteq} \bigcup_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} \operatorname{supp}\big({T'}^i \mathbb{1}_y\big) \\
&\subseteq \bigcup_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} \mathrm{S}_{\mathrm{d}(x_0,y)+i} = \mathrm{S}_n
\end{aligned}$$

daraus hervor. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ folgern wir somit

$$\operatorname{supp}\left(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=m}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y\right) \cap \operatorname{supp}\left(\sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y\right) \subseteq \mathrm{S}_m \cap \mathrm{S}_n = \emptyset.$$

Jetzt fehlt nur noch die angekündigte Induktion, die Gleichung (3.9) verwendet:

<u>I.A.:</u> Für $n = 0$ folgt aus $\mathrm{d}(x_0, y) + i = 0$ sofort $i = 0$ sowie $\mathrm{d}(x_0, y) = 0$ und daher $y = x_0$. Die Auswertung an der Stelle x_0 liefert

$$0_R = 0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)}(x_0) \overset{(3.9)}{=} \sum_{\substack{y \in W,\, i \in I_y \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=0}} r_{i,y} {T'}^i \mathbb{1}_y(x_0) = r_{0,x_0} {T'}^0 \mathbb{1}_{x_0}(x_0) = r_{0,x_0}$$

und somit $r_{i,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y$ und $y \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y) + i = 0$.

<u>I.V.:</u> Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ folge aus Gleichung (3.9) stets $r_{i,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y$ und $y \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y) + i = n$. Wir beachten dabei, dass wir die Voraussetzung unabhängig von den $\deg(p_y)$, d.h. von den I_y sowie unabhängig von den Koeffizienten in R treffen.

I.S.: Aus Gleichung (3.9) erhalten wir nun

$$
\begin{aligned}
0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)} &= \sum_{\substack{y\in W,\, i\in I_y\\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n+1}} r_{i,y}{T'}^i \mathbb{1}_y \\
&= \sum_{\substack{y\in W\\ \mathrm{d}(x_0,y)+0=n+1}} r_{0,y}{T'}^0 \mathbb{1}_y + \sum_{\substack{y\in W,\, i\in I_y\setminus\{0\}\\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n+1}} r_{i,y}{T'}^i \mathbb{1}_y \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{y\in W\\ \mathrm{d}(x_0,y)=n+1}} r_{0,y} \mathbb{1}_y}_{=:g_1} \; + \; T' \cdot \underbrace{\sum_{\substack{y\in W,\, i\in I_y\setminus\{0\}\\ \mathrm{d}(x_0,y)+i-1=n}} r_{i,y}{T'}^{i-1} \mathbb{1}_y}_{=:g_2}
\end{aligned}
$$

und mittels Indexverschiebung analog zu vorher

$$
\mathrm{supp}(g_2) = \mathrm{supp}\left(\sum_{\substack{y\in W,\, i\in I_y\setminus\{\deg(p_y)\}\\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} r_{i+1,y}{T'}^i \mathbb{1}_y \right) \subseteq \mathrm{S}_n.
$$

Nun betrachten wir für jedes $x \in \mathrm{S}_n$ den fest gewählten Nachbarn $\widehat{x} \in \mathrm{S}_{n+1}$, der

$$
g_1(\widehat{x}) = \sum_{\substack{y\in W\\ \mathrm{d}(x_0,y)=n+1}} r_{0,y} \underbrace{\mathbb{1}_y(\widehat{x})}_{=0_R} = 0_R
$$

erfüllt, da andernfalls $\widehat{x} \in W \subseteq V_{\mathcal{B}}$ einen Widerspruch liefern würde. Weil $\mathrm{supp}(g_2) \subseteq \mathrm{S}_n$ gilt, erhalten wir mit Lemma 3.32 bzw. (da S_n endlich ist) sogar mit Lemma 3.24 Koeffizienten $t_z \in R$ für $z \in \mathrm{S}_n$, sodass $g_2 = \sum\limits_{z\in \mathrm{S}_n} t_z \mathbb{1}_z$ erfüllt ist. Wir folgern daraus

$$
\begin{aligned}
\big(T' \cdot g_2\big)(\widehat{x}) &= \left(T' \cdot \sum_{z\in\mathrm{S}_n} t_z \mathbb{1}_z\right)(\widehat{x}) = \left(\sum_{z\in\mathrm{S}_n} t_z \big(T' \cdot \mathbb{1}_z\big)\right)(\widehat{x}) \\
&\overset{(3.6)}{=} \left(\sum_{z\in\mathrm{S}_n} t_z \left(\sum_{\substack{y\in\mathrm{S}_{n+1}\\ y\sim z}} \mathbb{1}_y\right)\right)(\widehat{x}) = \sum_{z\in\mathrm{S}_n} \left(t_z \cdot \sum_{\substack{y\in\mathrm{S}_{n+1}\\ y\sim z}} \mathbb{1}_y(\widehat{x})\right) \\
&= t_x = \sum_{z\in\mathrm{S}_n} t_z \mathbb{1}_z(x) = g_2(x),
\end{aligned}
$$

denn $\widehat{x} \in \mathrm{S}_{n+1}$ hat laut Lemma 2.29 genau einen Nachbarn in S_n und dieser ist x. Wegen

$$
0_R = 0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)}(\widehat{x}) = g_1(\widehat{x}) + \big(T' \cdot g_2\big)(\widehat{x}) = 0_R + g_2(x)
$$

für alle $x \in \mathrm{S}_n$ und $\mathrm{supp}(g_2) \subseteq \mathrm{S}_n$ folgt mit der Indexverschiebung wie zuvor

$$0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)} = g_2 = \sum_{\substack{y \in W,\ i \in I_y \setminus \{\deg(p_y)\} \\ \mathrm{d}(x_0,y)+i=n}} r_{i+1,y} T'^i \mathbb{1}_y.$$

Mit der I.V. schließen wir daraus $r_{i+1,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y \setminus \{\deg(p_y)\}$ und alle $y \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y) + i = n$, also durch Umkehren der Verschiebung $r_{i,y} = 0_R$ für alle $i \in I_y \setminus \{0\}$ und alle $y \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y) + i = n + 1$. Die letzten noch fehlenden Koeffizienten im Fall $i = 0$ behandeln wir, indem wir für $y' \in W$ mit $\mathrm{d}(x_0, y') = n + 1$ an der Stelle y' auswerten, d.h.

$$\begin{aligned} 0_R = 0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)}(y') &= g_1(y') + \big(T' \cdot g_2\big)(y') = g_1(y') + \big(T' \cdot 0_{C_c(\mathrm{X}_k,R)}\big)(y') \\ &= g_1(y') = \sum_{\substack{y \in W \\ \mathrm{d}(x_0,y)=n+1}} r_{0,y} \mathbb{1}_y(y') = r_{0,y'}. \end{aligned}$$

Somit ist auch dieser Induktionsschritt gelungen. □

Aus unserem Freiheitssatz erhalten wir noch eine Folgerung, die für uns später in Abschnitt 4.4 nützlich sein wird:

Korollar 3.48. *Für $k \geq 2$ gilt*

$$C_c(\mathrm{X}_k, R) \cong \bigoplus_{y \in V_\mathcal{B}} R[T]$$

als $R[T]$-Moduln mit $V_\mathcal{B} = \mathrm{V}\big(\mathrm{X}_k\big) \setminus \big\{\widehat{x} \bigm| x \in \mathrm{V}(\mathrm{X}_k)\big\}$ wie zuvor. Insbesondere hat der $R[T]$-Modul $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ für $k = 2$ den Rang 2, für $k \geq 3$ ist der Rang unendlich.

Beweis: Der soeben bewiesene Satz 3.33 besagt, dass $C_c(\mathrm{X}_k, R)$ ein freier $R[T]$-Modul ist, weshalb wir die Aussage mittels Bemerkung 3.4 im Wesentlichen erhalten. Wir müssen uns also nur Gedanken über die Indexmenge machen. Wenn wir die Beweise von Satz 3.33 sowie Lemma 3.47 genau betrachten, merken wir, dass die in ersterem definierte Basis $\mathcal{B}$ durch letzteren ohne Veränderung der Indexmenge $V_\mathcal{B}$ verwendet wird. Daraus folgt die Aussage des Korollars und wir müssen mit Blick auf Definition 3.5 und Lemma 3.6 für den Zusatz nur noch $\big|V_\mathcal{B}\big| = 2$ für $k = 2$ und $\big|V_\mathcal{B}\big| = \infty$ für $k \geq 3$ zeigen.

<u>$k = 2$:</u> In diesem Fall hat die Wurzel x_0 genau zwei Nachbarn x_1 und x_{-1}. Einer davon wird ausgeschlossen, also o.B.d.A $\widehat{x_0} = x_1$, der andere liegt in $V_\mathcal{B}$. Für $n \geq 1$ hat jedes $x \in \mathrm{S}_n$ genau $k - 1 = 1$ Nachbarn in S_{n+1}, d.h. dieser ist $\widehat{x}$ und wird nicht in die Indexmenge aufgenommen. Wir erhalten somit $\big|V_\mathcal{B}\big| = \big|\{x_0, x_{-1}\}\big| = 2$. Zur Visualisierung betrachten wir Abbildung 3 für $k = 2$.

$\underline{k \geq 3}$: Wir zeigen die Behauptung, indem wir beweisen, dass es einen unendlich langen Weg in $V_{\mathcal{B}}$ gibt. Zu Beginn betrachten wir die Wurzel x_0, die neben $\widehat{x_0}$ noch $k-1 \geq 2$ weitere Nachbarn besitzt. Letztere liegen alle in $V_{\mathcal{B}}$ und wir wählen einen davon als x_1. Für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ seien nun $x_1, \ldots, x_i \in V_{\mathcal{B}}$ gefunden. Den nächsten Knoten x_{i+1} finden wir nun, indem wir einen beliebigen Nachbarn von x_i in S_{i+1} wählen außer $\widehat{x_i}$. Dies ist möglich, da x_i laut Korollar 2.31 in S_{i+1} stets $k-1$ Nachbarn besitzt, also nach dem Ausschließen von $\widehat{x_i}$ stets $k-2 \geq 1$ Knoten übrig bleiben. Somit gilt auch $x_{i+1} \in V_{\mathcal{B}}$, weshalb wir durch diese Induktion $\left|V_{\mathcal{B}}\right| \geq \left|\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right| = \left|\mathbb{N}\right| = \infty$ erhalten. Für $k = 3$ veranschaulicht Abbildung 3 diesen Sachverhalt, wenn wir uns vorstellen, einem unendlichen Weg von ausgefüllten Knoten zu folgen. $\square$

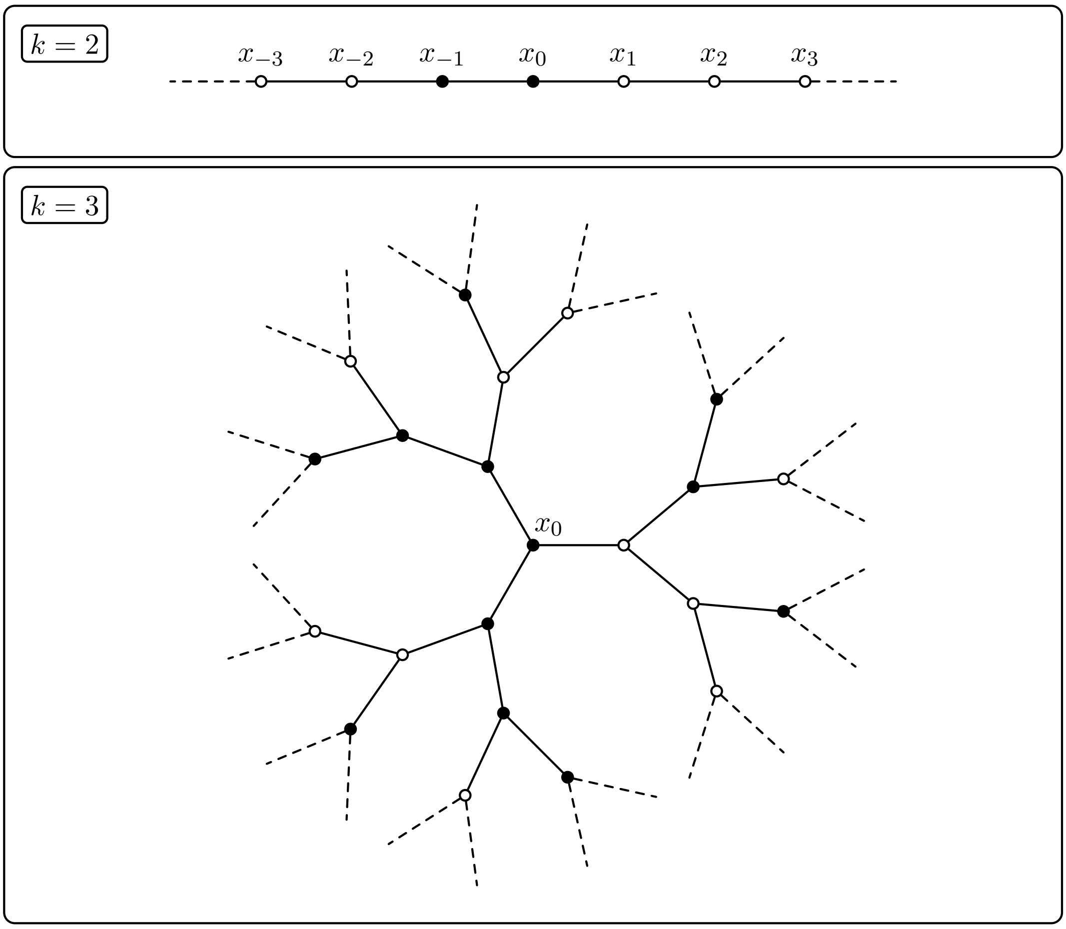

Abbildung 3: Konstruktion der Knotenmenge $V_{\mathcal{B}}$ (ausgefüllte Knoten $\bullet$)

4 Anwendung des Freiheitssatzes

In diesem Kapitel werden wir uns anschauen, wie der bewiesene Freiheitssatz auf Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe angewandt werden kann. Dafür bedarf es erneut diverser Vorbereitungen, die ihrerseits auf einige Grundlagen zurückgreifen. Daher werden wir zunächst Grundlagen zu lokalen Körpern und Gittern, zu Gruppenoperationen sowie zum Lemma von Zorn formulieren, wobei wir abermals wie zu Beginn von Kapitel 2 angekündigt verfahren werden. Den ersten Teil finden wir in Standardwerken zur Algebraischen Zahlentheorie wie beispielsweise in Kapitel II §3 von [Neu07, S. 121 ff.] und die Grundlagen zu Gruppenoperationen zum Beispiel in Kapitel I §6 von [JS14, S. 27 ff.].

4.1 Grundlagen

4.1.1 Lokale Körper und Gitter

Im Folgenden sei K stets ein Körper.

Definition 4.1. *Eine* ***diskrete Bewertung*** v *auf* K *ist eine surjektive Abbildung* $v : K \to \mathbb{Z} \,\dot\cup\, \{\infty\}$ *mit*

(a) $v(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; x = 0_K$,

(b) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ *und*

(c) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

für alle $x, y \in K$ *sowie der Konvention* $\infty + z = \infty$ *für alle* $z \in \mathbb{Z}$. *In diesem Fall nennen wir* (K, v) *einen* ***diskret bewerteten Körper***.

Bemerkung 4.2. Mit dieser Definition und wegen $2 \neq 0$ in $\mathbb{Z}$ erhalten wir für alle $x \in K$ die folgenden Eigenschaften:

(a) $v(1_K) = 0_{\mathbb{Z}}$,

(b) $v\big(x^{-1}\big) = -v(x)$ für $x \neq 0$,

(c) $v(-1_K) = 0_{\mathbb{Z}}$,

(d) $v(-x) = v(x)$.

Definition 4.3. *Ein* ***nicht-archimedischer Absolutbetrag*** *auf* K *ist eine Abbildung* $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *sodass für alle* $x, y \in K$ *gilt:*

(a) $|x| = 0_{\mathbb{R}} \;\Leftrightarrow\; x = 0_K$,

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,

(c) $|x + y| \leq \max\Big\{|x|, |y|\Big\}$.

Beispiel 4.4. Ist $q \in \mathbb{R}_{>1}$ und υ eine diskrete Bewertung auf K, so erhalten wir durch die Definition $|x| := q^{-\upsilon(x)}$ für $x \in K$ einen nicht-archimedischen Absolutbetrag auf K.

Bemerkung 4.5.

i) Die Eigenschaft (c) aus Definition 4.3 wird auch „starke Dreiecksungleichung“ genannt. In dem Fall, dass $|x| \neq |y|$ gilt, erhalten wir dort sogar Gleichheit.

ii) Ähnlich wie in Bemerkung 4.2 ergeben sich die folgenden Gleichungen:

   (a) $|1_K| = 1_{\mathbb{R}}$,

   (b) $|-1_K| = 1_{\mathbb{R}}$,

   (c) $|-x| = |x|$.

iii) Für alle $x, y \in K$ gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

iv) Ein nicht-archimedischer Absolutbetrag $|\cdot|$ definiert auf K eine Topologie:

$$U \subseteq K \text{ ist offen } :\Leftrightarrow \forall\, x \in U\ \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : \big\{y \in K \,\big|\, |x - y| < \varepsilon\big\} \subseteq U.$$

v) Bezüglich $|\cdot|$ können wir Folgen- und Reihenkonvergenz, Limes, Cauchy-Folgen sowie Vollständigkeit wie üblich definieren.

vi) Die Begriffe aus Punkt v) sind in Beispiel 4.4 unabhängig von der Wahl von q.

Von nun an sei (K, υ) stets ein diskret bewerteter Körper.

Definition 4.6. *Wir definieren den* ***diskreten Bewertungsring*** *von* (K, υ) *durch*

$$\mathfrak{o}_K := \big\{x \in K \,\big|\, \upsilon(x) \geq 0\big\}.$$

Bemerkung 4.7. Wenn offensichtlich ist, welcher Körper zu Grunde liegt, wird der Index K bei $\mathfrak{o}_K$ oft weggelassen. Dies gilt analog für $\mathfrak{p}_K$ aus Lemma 4.8, für π_K aus Bemerkung 4.9 sowie für $\mathfrak{K}_K$ aus Definition 4.10.

Lemma 4.8. $\mathfrak{o}_K$ *ist ein Unterring von* K *und zudem ein lokaler Hauptidealring mit maximalem Ideal* $\mathfrak{p}_K := \big\{x \in K \,\big|\, \upsilon(x) > 0\big\}$.

Beweis: Auch diesen Beweis setzen wir als bekannt voraus, wollen jedoch nützliche Zwischenergebnisse daraus festhalten:

   (a) $\mathfrak{o}^* = \big\{x \in K \,\big|\, \upsilon(x) = 0\big\}$,

   (b) $\mathfrak{p} = \mathfrak{o} \setminus \mathfrak{o}^*$,

   (c) ein Ideal $0 \neq I \subseteq \mathfrak{o}$ wird erzeugt von einem beliebigen Element $x \in I$ mit der Eigenschaft $\upsilon(x) = \min\big\{\upsilon(y) \,\big|\, y \in I\big\} < \infty$. $\square$

Bemerkung 4.9. Da v surjektiv ist, existiert $\pi_K \in K$ mit $v(\pi_K) = 1$. Somit gilt genauer sogar $\pi_K \in K^*$. Aus Ergebnis (c) des Beweises zu Lemma 4.8 erhalten wir zudem $\mathfrak{p}_K = \big(\pi_K\big)$. Wir nennen π_K ein **uniformisierendes Element**.

Definition 4.10. *Wir definieren den* ***Restklassenkörper*** *von* (K, v) *durch*

$$\mathfrak{K}_K := \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K = \mathfrak{o}_K/\pi_K\mathfrak{o}_K.$$

Bemerkung 4.11. Wenn der Restklassenkörper endlich ist mit $q := |\mathfrak{K}| \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so setzen wir $|x| := q^{-v(x)}$ für $x \in K$ wie in Beispiel 4.4.

Definition 4.12. (K, v) *wird* ***lokaler Körper*** *genannt, falls* $\mathfrak{K}_K$ *endlich ist und* K *vollständig bezüglich des obigen nicht-archimedischen Absolutbetrags.*

Lemma 4.13. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathfrak{o}^* \times \mathbb{Z} &\to K^* \\ (u, n) &\mapsto u \cdot \pi^n \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis: Dieser Beweis wird ebenfalls als bekannt vorausgesetzt, doch da an einigen Stellen die genaue Konstruktion für die Surjektivität nützlich sein kann, möchten wir diese kurz festhalten:
Für $x \in K^*$ gilt $v\big(x\pi^{-v(x)}\big) = 0$, weshalb $u := x\pi^{-v(x)} \in \mathfrak{o}^*$ und somit durch Setzen von $n := v(x) \in \mathbb{Z}$ sofort $\vartheta(u, n) = u \cdot \pi^n = x$ erfüllt ist. □

Definition 4.14. *Sei* V *ein* K*-Vektorraum. Eine Menge* $L \subseteq V$ *heißt* ***Gitter*** *(engl. lattice) von* V*, falls* L *ein endlich erzeugter* $\mathfrak{o}$*-Untermodul von* V *ist, der* V *als* K*-Vektorraum erzeugt.*

Bemerkung 4.15. In der Literatur werden die von uns betrachteten Gitter oft als „**vollständig**“ oder „**mit vollem Rang**“ bezeichnet.

Wir können die allgemeine lineare Gruppe, die wir später in diesem Kapitel für $n = 2$ betrachten werden, natürlich genau wie in Kapitel 3 für einen Körper definieren, allerdings vereinfacht sich dann die Situation im Vergleich zu Definition 3.17:

Definition 4.16. *Sei* $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

i) Die ***allgemeine lineare Gruppe*** *ist definiert durch*

$$\mathrm{GL}_n(K) := \big\{A \in K^{n\times n} \;\big|\; A \textit{ ist invertierbar}\big\}.$$

ii) Die ***spezielle lineare Gruppe*** *ist definiert durch*

$$\mathrm{SL}_n(K) := \big\{A \in \mathrm{GL}_n(K) \;\big|\; \det(A) = 1\big\}.$$

Lemma 4.17. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(K) &= \left\{A \in K^{n\times n} \;\middle|\; \det(A) \neq 0\right\}\\ &\cong \left\{\varphi : K^n \to K^n \;\middle|\; \varphi \text{ ist ein } K\text{-linearer Isomorphismus}\right\}\end{aligned}$$

als Isomorphie von Gruppen sowie

$$\mathrm{SL}_n(K) \trianglelefteq \mathrm{GL}_n(K) \qquad \textit{mit} \qquad \mathrm{GL}_n(K)/\,\mathrm{SL}_n(K) \cong K^*.$$

Im Laufe dieses Kapitels werden wir uns insbesondere auf $\mathrm{GL}_2(K)$-Operationen konzentrieren, jedoch formulieren wir die Grundlagen zu Gruppenoperationen wie üblich ganz allgemein:

4.1.2 Gruppenoperationen

Im Folgenden sei stets G eine Gruppe und X eine Menge.

Definition 4.18. *Eine **Operation** (oft auch **Aktion** oder **Wirkung**) von G auf X ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} * : G \times X &\to X\\ (g,x) &\mapsto g * x,\end{aligned}$$

sodass für alle $x \in X, g, h \in G$ gilt:

(a) $\quad 1_G * x = x,$

(b) $\quad (g \cdot h) * x = g * (h * x).$

*In diesem Fall nennen wir für $x \in X$ die Menge $G * x := \left\{g * x \;\middle|\; g \in G\right\} \subseteq X$ den **G-Orbit** (auch **G-Bahn**) von x unter G und $G_x := \left\{g \in G \;\middle|\; g*x = x\right\}$ den **Stabilisator** von x in G. Für $x, y \in X$ setzen wir zudem $x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G : y = g * x$.*

Von nun an sei „$*$“ eine Operation von G auf X.

Lemma 4.19. *Seien $x, y \in X$ und $g \in G$.*

i) Es gilt $G_x \leq G$ und $y = g * x \;\Rightarrow\; G_y = g\,G_x\,g^{-1}$.

ii) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X mit $x \sim y \;\Leftrightarrow\; G * x = G * y$ und den Äquivalenzklassen $[x] = G*x$. Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $X/\!\sim$, dann gilt also $X = \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} G * x_i$.

iii) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : G/G_x &\to G * x\\ g\,G_x &\mapsto g * x\end{aligned}$$

ist wohldefiniert sowie bijektiv und, falls G endlich ist, gilt $|G * x| = (G : G_x)$.

Definition 4.20. *Die Operation „$*$" heißt **transitiv**, falls für alle $x, y \in X$ stets ein $g \in G$ existiert mit $g * x = y$.*

Bemerkung 4.21. Im Fall einer transitiven Operation existiert nur eine G-Bahn (laut Punkt ii) von Lemma 4.19 also nur eine Äquivalenzklasse), die ganz X ist, denn: Für ein beliebiges $x \in X$ ist $G * x \subseteq X$ eine Bahn und für ein beliebiges $y \in X$ existiert nun nach Voraussetzung ein $g \in G$ mit $g * x = y$, also gilt $y = g * x \in G * x$ und somit $G * x = X$.

Definition 4.22. *Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt **stabil** unter G (manchmal auch **G-invariant** oder **G-stabil**), falls $G * Y := \{g * y \mid g \in G, y \in Y\} \subseteq Y$.*

Bemerkung 4.23. Es gilt in diesem Fall sofort $G * Y = Y$, denn für ein beliebiges $y \in Y$ schreiben wir $y = 1_G * y \in G * Y$.

Definition 4.24. *Sei Y eine beliebige Menge und „$\bullet$" eine Operation von G auf Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **G-äquivariant**, falls für alle $g \in G$ und $x \in X$ stets $f(g * x) = g \bullet f(x)$ gilt.*

Definition 4.25. *Sei R ein Ring und X ein R-Modul. Die Operation heißt **R-linear**, falls für alle $g \in G, x, y \in X, r, s \in R$ stets $g * (r \cdot x + s \cdot y) = r \cdot (g * x) + s \cdot (g * y)$ gilt.*

4.1.3 Lemma von Zorn

Da wir im Beweis von Satz 4.65 auf das Lemma von Zorn zurückgreifen werden, wollen wir es an dieser Stelle samt Voraussetzungen zitieren:

Definition 4.26. *Sei S eine Menge und $Q \subseteq S$ eine Teilmenge.*

*i) S heißt **teilgeordnete Menge**, falls eine Relation „$\leq$" auf S existiert, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.*

*ii) Q heißt **totalgeordnete Teilmenge** oder auch **Kette**, falls je zwei Elemente vergleichbar sind, das bedeutet, für alle $q, q' \in Q$ gilt stets $q \leq q'$ oder $q' \leq q$.*

*iii) $s \in S$ heißt **obere Schranke** von Q, falls für alle $q \in Q$ stets $q \leq s$ gilt.*

*iv) $m \in S$ heißt **maximales Element**, falls $\{s \in S \mid m \leq s\} = \{m\}$ gilt.*

*v) S heißt **induktiv geordnet**, falls jede totalgeordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S besitzt.*

Satz 4.27 (Lemma von Zorn)**.** *Ist S eine induktiv geordnete Menge, so existiert ein maximales Element in S.*

Bemerkung 4.28.

i) Auf $S = \emptyset$ lässt sich Satz 4.27 nicht anwenden, da $\emptyset \subseteq \emptyset$ keine obere Schranke besitzt. Somit erzeugt das Lemma von Zorn an dieser Stelle, anders als es zunächst eventuell scheint, keinen Widerspruch.

ii) Für $S \neq \emptyset$ können wir jedes $s \in S$ als obere Schranke für $\emptyset \subseteq S$ wählen.

4.2 Klassen von Gittern über einem lokalen Körper

Um den Zusammenhang mit Kapitel 2 und Kapitel 3 herzustellen, werden wir in Abschnitt 4.3 einen regulären Baum aus Klassen von Gittern konstruieren. Für die notwendigen Vorbereitungen, die wir im Folgenden treffen werden, orientieren wir uns im Wesentlichen an Kapitel II §1 von [Ser80, S. 69 f.].
Sei von nun an (K, v) stets ein diskret bewerteter, lokaler Körper. Wir setzen $q := |\mathfrak{K}| \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und betrachten den 2-dimensionalen K-Vektorraum $V := K^2$.

Lemma 4.29. *Sei L ein Gitter von V, so existieren $l_1, l_2 \in L$, die eine Basis von V als K-Vektorraum bilden und $L = \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ erfüllen. Insbesondere ist L somit ein freier $\mathfrak{o}$-Modul mit Rang 2.*

Beweis: Vorab sehen wir, dass der Zusatz sofort folgen würde, da mit $L = \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ die Familie $\big(l_1, l_2\big)$ ein Erzeugendensystem von L über $\mathfrak{o}$ bildet. Da diese zudem als K-Basis von V linear unabhängig über K ist und $\mathfrak{o} \subseteq K$ gilt, ist die Familie auch linear unabhängig über $\mathfrak{o}$. Wegen $\big|\{l_1, l_2\}\big| = 2$ ist der Zusatz somit bewiesen.
Sei also L ein Gitter von V. Dann existieren $l_1, \ldots, l_n \in L$ mit $L = \langle l_1, \ldots, l_n \rangle_{\mathfrak{o}}$ und $V = \langle l_1, \ldots, l_n \rangle_K$. Da $\dim_K V = 2$, muss somit auch $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gelten. Wir können bekanntermaßen mittels Basisauswahlsatz so lange sukzessiv Elemente des Erzeugendensystems entfernen, die sich mit den restlichen darstellen lassen, bis wir eine Basis von V als K-Vektorraum erhalten. Nach eventueller Umbenennung sind dies $l_1, l_2 \in L$, erneut da $\dim_K V = 2$. Daher bleibt nur zu klären, warum wir diese Schritte so ausführen können, dass der erzeugte $\mathfrak{o}$-Modul unverändert bleibt. Sind $l_1, \ldots, l_m$ linear abhängig über K mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so existieren $x_1, \ldots, x_m \in K$, nicht alle gleich 0_K, sodass $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i l_i = 0_V$. Wir definieren $d := \min\big\{v(x_i) \;\big|\; i \in \{1, \ldots, m\}\big\}$, so ist $\infty > d \in \mathbb{Z}$, da nicht alle $x_i = 0_K$, und zudem existiert ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $v(x_j) = d$. Insbesondere ist $x_j \neq 0_K$ und j eignet sich somit für den Schritt im Basisauswahlsatz aus der linearen Algebra. Wir müssen also nur zeigen, dass auch $\langle l_1, \ldots, l_m \rangle_{\mathfrak{o}} = \langle l_1, \ldots, l_{j-1}, l_{j+1}, \ldots, l_m \rangle_{\mathfrak{o}}$ gilt, wofür $l_j \in \langle l_1, \ldots, l_{j-1}, l_{j+1}, \ldots, l_m \rangle_{\mathfrak{o}}$ ausreichen würde. Wir betrachten

$$0_V = \underbrace{\pi^{-d}}_{\in K^*} \cdot 0_V = \pi^{-d} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i l_i = \sum_{i=1}^{m} \big(\pi^{-d} x_i\big) \cdot l_i,$$

wobei $v\big(\pi^{-d}x_i\big) = v(x_i) - d \geq 0$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ mit Gleichheit falls $i = j$ per Definition von d. Wir folgern, dass $\pi^{-d}x_i \in \mathfrak{o}$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ und für $i = j$ sogar $\pi^{-d}x_j \in \mathfrak{o}^*$. Damit ergibt sich

$$l_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \underbrace{\big(-\pi^{-d}x_i\big)}_{\in \mathfrak{o}} \cdot \underbrace{\big(\pi^{-d}x_j\big)^{-1}}_{\in \mathfrak{o}^*} \cdot l_i \in \langle l_1, \dots, l_{j-1}, l_{j+1}, \dots, l_m \rangle_{\mathfrak{o}}. \qquad \square$$

Definition 4.30. *Wir definieren die Operation „$\bullet$“ der Gruppe K^* auf der Menge $\big\{L \;\big|\; L \text{ ist ein Gitter von } V\big\}$ durch*

$$\begin{aligned} \bullet : K^* \times \big\{L \;\big|\; L \textit{ ist ein Gitter von } V\big\} &\to \big\{L \;\big|\; L \textit{ ist ein Gitter von } V\big\} \\ (x, L) &\mapsto x \bullet L := x \cdot L. \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gitter von V, sodass für zwei Gitter L, L' von V

$$\begin{aligned} L \sim L' \;&:\Leftrightarrow\; \exists x \in K^* : L' = x \bullet L \\ &\Leftrightarrow\; K^* \bullet L' = K^* \bullet L \end{aligned}$$

gilt. Die Äquivalenzklassen $[L] = K^* \bullet L = \big\{x \bullet L \;\big|\; x \in K^*\big\}$ bezeichnen wir auch als **Homothetieklassen**, da es sich anschaulich um eine Art „Streckung“ handelt, und setzen

$$\mathcal{L} := \big\{L \;\big|\; L \text{ ist ein Gitter von } V\big\}/\!\sim.$$

Für zwei Elemente von $\mathcal{L}$, d.h. zwei Äquivalenzklassen von Gittern, wollen wir im Folgenden einen Abstandsbegriff konstruieren.

Lemma 4.31. *Sind L und L' Gitter von V, so existieren eine $\mathfrak{o}$-Basis $\big(e_1, e_2\big)$ von L sowie $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $\big(\pi^a e_1, \pi^b e_2\big)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' ist.*

Beweis: Wir wollen $d := \max\big\{n \in \mathbb{Z} \;\big|\; \pi^{-n}L' \subseteq L\big\} \in \mathbb{Z}$ definieren, weshalb wir zeigen müssen, dass die Menge, über die wir das Maximum bilden, nicht-leer sowie nach oben beschränkt ist.

<u>nicht-leer:</u> Wegen Lemma 4.29 existieren $l_1, l_2 \in L$ und $l'_1, l'_2 \in L'$, die jeweils eine K-Basis von V bilden, mit $L = \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ und $L' = \langle l'_1, l'_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$. Wir schreiben zunächst $l'_1 = x_1 l_1 + x_2 l_2$ sowie $l'_2 = y_1 l_1 + y_2 l_2$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in K$ und setzen, da nicht alle Koeffizienten gleich 0 sein können, $d' := \min\big\{v(x_1), v(x_2), v(y_1), v(y_2)\big\} \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten $\pi^{-d'}l'_1 = \big(\pi^{-d'}x_1\big)l_1 + \big(\pi^{-d'}x_2\big)l_2$ und $\pi^{-d'}l'_2 = \big(\pi^{-d'}y_1\big)l_1 + \big(\pi^{-d'}y_2\big)l_2$, wobei jeweils die Koeffizienten der rechten Seite per Definition von d' in $\mathfrak{o}$ liegen. Damit folgt $\pi^{-d'}L' = \langle \pi^{-d'}l'_1, \pi^{-d'}l'_2 \rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq \langle l_1, l_2 \rangle_{\mathfrak{o}} = L$ und die Menge ist nicht-leer.

beschränkt: Wenn wir annehmen, dass die Menge nicht beschränkt ist, so würde $\pi^{-n}L' \subseteq L$ für ein beliebig großes $n \in \mathbb{N}$ gelten. Wir können $l' \in L'$ schreiben als $l' = z_1 l_1 + z_2 l_2$ mit $z_1, z_2 \in K$ und erhalten $\pi^{-n} z_1 l_1 + \pi^{-n} z_2 l_2 = \pi^{-n} l' \in L$. Da (l_1, l_2) eine $\mathfrak{o}$-Basis von L ist, folgern wir dass die Koeffizienten in $\mathfrak{o}$ liegen und somit $v(z_1) - n = v(\pi^{-n} z_1) \geq 0$ gilt. Da n beliebig groß ist, folgt $v(z_1) = \infty$ und daher $z_1 = 0$. Analog können wir $z_2 = 0$ sehen und damit $l' = 0$. Wir erhalten den Widerspruch $L' = 0$.

Da $\pi^{-d} \in K^*$ erfüllt ist, erhalten wir mit $\pi^{-d}L'$ ein Gitter, für das per Definition von d bereits $\pi^{-d}L' \subseteq L$ gilt. Da $\mathfrak{o}$ nach Lemma 4.8 ein Hauptidealring und mit Lemma 4.29 das Gitter L ein freier $\mathfrak{o}$-Modul mit Rang 2 ist, liefert Satz 3.20 eine $\mathfrak{o}$-Basis (e_1, e_2) von L sowie Elemente $a', b' \in \mathfrak{o}$, sodass $\pi^{-d}L' = \langle a'e_1, b'e_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ und $a' \mid b'$, d.h. $(b') \subseteq (a')$ gilt. Da $\pi^{-d}L'$ ein Gitter ist und daher V als K-Vektorraum erzeugt, muss $a' \neq 0 \neq b'$ gelten. Aus der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{o}$ folgt, dass $(a'e_1, b'e_2)$ sogar eine $\mathfrak{o}$-Basis von $\pi^{-d}L'$ ist. Mittels Lemma 4.13 schreiben wir $a', b' \in \mathfrak{o} \setminus \{0\} \subseteq K^*$ als $a' = \pi^{v(a')} \cdot u_1$ und $b' = \pi^{v(b')} \cdot u_2$ mit $u_1, u_2 \in \mathfrak{o}^*$ sowie $v(a'), v(b') \in \mathbb{N}$. Wir erhalten, dass auch $(u_1^{-1} a' e_1, u_2^{-1} b' e_2) = (\pi^{v(a')} e_1, \pi^{v(b')} e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von $\pi^{-d}L'$ und somit $(\pi^{v(a')+d} e_1, \pi^{v(b')+d} e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' ist. Durch die Definitionen $a := v(a') + d$ und $b := v(b') + d$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 4.32. Die Menge $\{a, b\} \subseteq \mathbb{Z}$ ist unabhängig von sämtlichen Wahlen im Beweis von Lemma 4.31, da zunächst d nur von L und L', nicht aber von gewählten Basen abhängt. Somit liefert der Zusatz von Satz 3.20, der auf L und $\pi^{-d}L'$ angewandt wird, dass die Ideale $(b') \subseteq (a')$ eindeutig bestimmt sind. Zwar könnte die Basis (e_1, e_2) variieren und wir könnten statt $a', b' \in \mathfrak{o} \setminus \{0\}$ andere Elemente $a'', b'' \in \mathfrak{o} \setminus \{0\}$ mit den jeweiligen Eigenschaften erhalten, doch es würde (nach eventueller Umbenennung) stets $(a') = (a'')$ und $(b') = (b'')$ gelten. Diese jeweils zueinander assoziierten Elemente unterscheiden sich, da $\mathfrak{o}$ nullteilerfrei ist, je durch eine Einheit in $\mathfrak{o}$. Es folgt $v(a') = v(a'')$ sowie $v(b') = v(b'')$, weshalb die Definitionen von a und b nur von L und L' abhängen.

Wenn wir nun die Gitter L, L' durch $x \bullet L, y \bullet L'$ mit $x, y \in K^*$ ersetzen, können wir berechnen, wie sich die Menge $\{a, b\}$ verändert. Da (e_1, e_2) eine $\mathfrak{o}$-Basis von L und $x \in K^*$ ist, ist (xe_1, xe_2) eine $\mathfrak{o}$-Basis von $x \bullet L = x \cdot L$. Für $\frac{y}{x} \in K^*$ schreiben wir mittels Lemma 4.13 mit $w \in \mathfrak{o}^*$ und $c := v(\frac{y}{x}) \in \mathbb{Z}$ nun $\frac{y}{x} = w \cdot \pi^c$. Weil $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' und $y \in K^*$ ist, erhalten wir

$$(y\pi^a e_1, y\pi^b e_2) = \left(\frac{y}{x} x\pi^a e_1, \frac{y}{x} x\pi^b e_2\right) = (w\pi^{a+c} xe_1, w\pi^{b+c} xe_2)$$

und wegen $w \in \mathfrak{o}^*$ schon $(\pi^{a+c} xe_1, \pi^{b+c} xe_2)$ als $\mathfrak{o}$-Basis von $y \bullet L' = y \cdot L'$. Aus Bemerkung 4.32 folgt, dass die neue Menge $\{a+c, b+c\}$ lautet. Wir bemerken, dass sich der Wert $|a-b| = \big|(a+c)-(b+c)\big| \in \mathbb{N}$ unter der Operation „$\bullet$" nicht ändert, also nur von den Äquivalenzklassen $\Lambda := [L]$, $\Lambda' := [L']$ der Gitter, aber nicht von den Repräsentanten L, L' abhängt. Dies führt uns zu der folgenden Definition:

Definition 4.33. *Unter den vorherigen Voraussetzungen definieren wir*

$$\delta(\Lambda, \Lambda') := |a-b| \in \mathbb{N}$$

*als den **Abstand** von Λ und Λ' in $\mathcal{L}$.*

Lemma 4.34. *Mit den Voraussetzungen von Lemma 4.31 gilt $L' \subseteq L$ genau dann, wenn $a, b \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. In diesem Fall erhalten wir zudem*

$$L/L' \cong \big(\mathfrak{o}/\pi^a\mathfrak{o}\big) \oplus \big(\mathfrak{o}/\pi^b\mathfrak{o}\big)$$

als $\mathfrak{o}$-Moduln.

Beweis: Wir bemerken vorab, dass wegen $\langle e_1, e_2\rangle_K = \langle L\rangle_K = V$ und $\dim_K V = 2$ $\big(e_1, e_2\big)$ auch eine K-Basis von V ist.

$\underline{\Rightarrow:}$ Wegen $\big\langle \pi^a e_1, \pi^b e_2\big\rangle_{\mathfrak{o}} = L' \subseteq L = \langle e_1, e_2\rangle_{\mathfrak{o}}$ schreiben wir $\pi^a e_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathfrak{o}$. Aus der linearen Unabhängigkeit von $\big(e_1, e_2\big)$ über K folgt $x_2 = 0$ sowie $x_1 = \pi^a$ und damit $a = \upsilon(\pi^a) = \upsilon(x_1) \geq 0$. Analog verfahren wir für b.

$\underline{\Leftarrow:}$ Wegen $\upsilon(\pi^a) = a \geq 0$ gilt $\pi^a \in \mathfrak{o}$ und somit $\pi^a e_1 \in L$. Da dies analog für b gilt, erhalten wir $L' = \big\langle \pi^a e_1, \pi^b e_2\big\rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq \langle e_1, e_2\rangle_{\mathfrak{o}} = L$.

Die letzte Aussage folgt direkt aus Lemma 4.31:

$$L/L' \cong \big(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}\big)\big/\big(\pi^a\mathfrak{o} \oplus \pi^b\mathfrak{o}\big) \cong \big(\mathfrak{o}/\pi^a\mathfrak{o}\big) \oplus \big(\mathfrak{o}/\pi^b\mathfrak{o}\big). \qquad \square$$

Lemma 4.35. *Ist L ein Gitter von V und $\Lambda := [L]$, so existiert für jede Klasse $\Lambda' \in \mathcal{L}$ genau ein Repräsentant $L' \in \Lambda'$, der die folgenden, äquivalenten Eigenschaften erfüllt:*

- *(a)* *$L' \subseteq L$ und L' ist maximal in Λ' mit dieser Eigenschaft,*
- *(b)* *$L' \subseteq L$ und $L' \nsubseteq \pi L$,*
- *(c)* *$L' \subseteq L$ und L/L' ist monogen.*

Für dieses L' gilt $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$ mit $n = \delta(\Lambda, \Lambda')$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \delta(\Lambda, \Lambda') = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \Lambda = \Lambda', \\ \delta(\Lambda, \Lambda') = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{es existieren Repräsentanten } L' \subseteq L \\ &\qquad\qquad \textit{von } \Lambda', \Lambda \textit{ mit } L/L' \cong \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

Beweis: Existenz: Sei $\Lambda' \in \mathcal{L}$ und L'' ein beliebiger Repräsentant dieser Klasse. Da L und L'' Gitter von V sind, existieren nach Lemma 4.31 eine $\mathfrak{o}$-Basis (e_1, e_2) von L sowie $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L'' ist. O.B.d.A. ist $a \leq b$ und somit $(e_1, \pi^{b-a} e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von $L' := \pi^{-a} L'' \in \Lambda'$, da $\pi^{-a} \in K^*$ gilt. Da mit $b - a \geq 0$ die Exponenten nun in $\mathbb{N}$ liegen, liefert Lemma 4.34 somit $L' \subseteq L$ und

$$L/L' \cong (\mathfrak{o}/\pi^0 \mathfrak{o}) \oplus (\mathfrak{o}/\pi^{b-a} \mathfrak{o}) \cong \mathfrak{o}/\pi^{b-a} \mathfrak{o}$$

als $\mathfrak{o}$-Moduln. Mit dem Erzeuger $\overline{1} = 1_{\mathfrak{o}} + \pi^{b-a} \mathfrak{o}$ ist letzterer monogen, weshalb (c) erfüllt ist.

Eindeutigkeit: Sei $\Lambda' \in \mathcal{L}$ und seien L', L'' zwei Repräsentanten dieser Klasse, die die Eigenschaften erfüllen. Wegen $[L'] = \Lambda' = [L'']$ existiert ein $x \in K^*$ mit $L' = xL''$. Wir schreiben mittels Lemma 4.13 nun $x = u \cdot \pi^c$ mit $u \in \mathfrak{o}^*$ sowie $c \in \mathbb{Z}$ und erhalten $L' = u\pi^c L'' = \pi^c L''$, da Gitter $\mathfrak{o}$-Moduln sind. Falls $c \leq 0$ ist, erfüllt $-c \geq 0$ dann $\pi^{-c} L' = \pi^{-c} \pi^c L'' = L''$ und wir vertauschen die Benennung von L' und L''. Daher können wir $c \geq 0$ annehmen, woraus aufgrund von $\pi^c \in \mathfrak{o}$ bereits $L' = \pi^c L'' \subseteq L''$ folgt. Die Maximalität aus (a) liefert wie gewünscht $L' = L''$.

(a)$\Rightarrow$(b): Wir nehmen an, dass (a) sowie $L' \subseteq \pi L$ gilt. Mit $\pi \in \mathfrak{o} \setminus \{0\} \subseteq K^*$ folgern wir $\pi^{-1} L' \subseteq \pi^{-1} \pi L = L$ sowie $L' = \pi \pi^{-1} L' \subseteq \pi^{-1} L'$ und $\pi^{-1} L' \in [L'] = \Lambda'$. Aus der Maximalität von L' erhalten wir $L' = \pi^{-1} L'$. Sei (l_1', l_2') mittels Lemma 4.29 eine K-Basis von V mit $L' = \langle l_1', l_2' \rangle_{\mathfrak{o}}$, so können wir $\pi^{-1} l_1' \in \pi^{-1} L' = L'$ schreiben als $\pi^{-1} l_1' = x_1 l_1' + x_2 l_2'$ mit $x_1, x_2 \in \mathfrak{o}$. Aus der linearen Unabhängigkeit über K ergibt sich $x_1 = \pi^{-1}$ und somit der Widerspruch $0 \leq \upsilon(x_1) = \upsilon(\pi^{-1}) = -1$.

(b)$\Rightarrow$(c): Aus $L' \subseteq L$ folgt mit Lemma 4.31 und Lemma 4.34, dass $L = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$, $L' = \langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ sowie $L/L' \cong (\mathfrak{o}/\pi^a \mathfrak{o}) \oplus (\mathfrak{o}/\pi^b \mathfrak{o})$ als $\mathfrak{o}$-Moduln mit $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. Angenommen a und b sind beide nicht Null, so wäre $a - 1 \geq 0$ sowie $b - 1 \geq 0$ und somit π^{a-1}, $\pi^{b-1} \in \mathfrak{o}$ erfüllt. Einen Widerspruch erhalten wir nun mit

$$L' = \langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} = \pi \cdot \langle \pi^{a-1} e_1, \pi^{b-1} e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq \pi \cdot \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} = \pi L,$$

da $L' \nsubseteq \pi L$ laut (b) gilt. Daher ist $a = 0$ oder $b = 0$ und somit L/L' monogen, denn für $a = 0$ ($b = 0$ analog) ist $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^b \mathfrak{o}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln und letzterer erzeugt von $\overline{1} = 1_{\mathfrak{o}} + \pi^b \mathfrak{o}$.

(c)$\Rightarrow$(a): Aus $L' \subseteq L$ folgt wie zuvor, dass $L = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$, $L' = \langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \rangle_{\mathfrak{o}}$ sowie $L/L' \cong (\mathfrak{o}/\pi^a \mathfrak{o}) \oplus (\mathfrak{o}/\pi^b \mathfrak{o})$ als $\mathfrak{o}$-Moduln mit $a, b \in \mathbb{N}$ gilt. Angenommen $a > 0$ und $b > 0$, so wäre dieser Modul nicht monogen, denn falls $\tau = (\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2})$ ein Erzeuger wäre, betrachten wir die Elemente $(\overline{1}, \overline{0})$ und $(\overline{0}, \overline{1})$. Für beide Teile der direkten Summe gilt $\overline{1} \neq \overline{0}$, denn andernfalls wäre $1 \in \pi^a \mathfrak{o}$, d.h. $1 = \pi^a x$ mit $x \in \mathfrak{o}$, und somit würde sich der Widerspruch $0 = \upsilon(1) = \upsilon(\pi^a x) = a + \upsilon(x) \geq a > 0$

(und für b analog) ergeben. Nun könnten wir $(\overline{1},\overline{0}) = x_1 \cdot \tau = (\overline{x_1\tau_1}, \overline{x_1\tau_2})$ und $(\overline{0},\overline{1}) = x_2 \cdot \tau = (\overline{x_2\tau_1}, \overline{x_2\tau_2})$ mit $x_1, x_2 \in \mathfrak{o}$ schreiben. Aus dem ersten Teil der ersten Gleichung folgt $\overline{\tau_1} \in \left(\mathfrak{o}/\pi^a\mathfrak{o}\right)^*$ und aus dem ersten Teil der zweiten Gleichung damit $\overline{x_2} = \overline{0}$. Der zweite Teil der zweiten Gleichung liefert nun den Widerspruch $\overline{1} = \overline{0}$. Also gilt $a = 0$ oder $b = 0$, wobei wir die Maximalität von L' für $a = 0$ zeigen werden, denn $b = 0$ verläuft erneut analog. Sei $L'' \in \Lambda'$ mit $L' \subseteq L'' \subseteq L$, so müssen wir $L' = L''$ beweisen. Wie im Beweis der Eindeutigkeit erhalten wir $L' = \pi^c L''$ für ein $c \in \mathbb{Z}$ und somit auch $\pi^{-c}L' = L''$. Da $\left(e_1, \pi^b e_2\right)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' ist, ist $\left(\pi^{-c}e_1, \pi^{b-c}e_2\right)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von $\pi^{-c}L' = L''$. Wir folgern $\pi^{-c}e_1 \in L'' \subseteq L = \langle e_1, e_2\rangle_{\mathfrak{o}}$ und mithilfe der linearen Unabhängigkeit von $\left(e_1, e_2\right)$ über K schon $\pi^{-c} \in \mathfrak{o}$, d.h. $-c = v(\pi^{-c}) \geq 0$. Da $L' \subseteq L''$ gilt, können wir aus der Form der Basen mit Lemma 4.31 und Lemma 4.34 bereits $c \in \mathbb{N}$, insgesamt also $c = 0$ und somit $L' = L''$ folgern.

Quotient: Für dieses $L' \in \Lambda'$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) folgt, wie im Beweis für „(b)⇒(c)", stets $a = 0$ oder $b = 0$ und falls $a = 0$ (b=0 analog) die Isomorphie $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^b\mathfrak{o}$ als $\mathfrak{o}$-Moduln. Durch $n := b \in \mathbb{N}$ erhalten wir wegen $\delta(\Lambda, \Lambda') = |a - b| = |0 - b| = b = n$ die Behauptung für $\Lambda = [L]$.

insb. (Teil 1): ⇒: Gilt $\delta(\Lambda, \Lambda') = 0$, so ist $\Lambda = [L]$ für ein Gitter L in V und mit den vorherigen Aussagen existiert ein $L' \in \Lambda'$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) sowie $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$ mit $n = \delta(\Lambda, \Lambda') = 0$. Wir erhalten $L/L' = 0$, also $L = L'$ und somit $\Lambda = [L] = [L'] = \Lambda'$.

⇐: Gilt $\Lambda = \Lambda'$, so ist erneut $\Lambda = [L]$ für ein Gitter L in V und mit den vorherigen Aussagen existiert genau ein $L' \in \Lambda'$ mit den üblichen Eigenschaften. Da aber auch $L \subseteq L \in \Lambda = \Lambda'$ Eigenschaft (a) besitzt, gilt aufgrund der Eindeutigkeit $L' = L$. Aus dem Zusatz folgern wir $0 \cong L/L = L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$ mit $n = \delta(\Lambda, \Lambda') \in \mathbb{N}$ und somit $1 \in \mathfrak{o} = \pi^n\mathfrak{o}$, also wie zuvor schon einmal $0 = v(1) \geq v(\pi^n) = n$. Damit gilt $\delta(\Lambda, \Lambda') = n = 0$.

insb. (Teil 2): ⇒: Gilt $\delta(\Lambda, \Lambda') = 1$, so ist $\Lambda = [L]$ für ein Gitter L in V und mit den vorherigen Aussagen existiert ein $L' \in \Lambda'$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) sowie $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$ mit $n = \delta(\Lambda, \Lambda') = 1$. Dies sind bereits die gesuchten Repräsentanten $L' \subseteq L$ von Λ' und Λ mit $L/L' \cong \mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o} = \mathfrak{K}$.

⇐: Wir nehmen an, dass Repräsentanten $L' \subseteq L$ von Λ' und Λ mit $L/L' \cong \mathfrak{K}$ existieren. Da L ein Gitter von V und $\Lambda' \in \mathcal{L}$ ist, existiert nach dem bewiesenen Teil des Lemmas genau ein $L'' \in \Lambda'$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) sowie $L/L'' \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$ mit $n = \delta(\Lambda, \Lambda')$. Da aber auch $L' \subseteq L$ erfüllt, dass $L/L' \cong \mathfrak{K}$ monogen ist, folgt aus der Eindeutigkeit $L'' = L'$ und daher $\mathfrak{K} \cong \mathfrak{o}/\pi^n\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{K}$ ein Körper ist, muss $\pi^n\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}$ ein maximales Ideal sein, weshalb $n \neq 0$ gilt. Für $n \geq 1$ folgt wegen $\pi^n\mathfrak{o} \subseteq \pi\mathfrak{o}$ bereits $1 = n = \delta(\Lambda, \Lambda')$. □

4.3 Baumkonstruktion mit zugehörigen $\mathbf{GL_2}(\boldsymbol{K})$-Operationen

Als Nächstes werden wir mithilfe der obigen Ergebnisse die explizite Konstruktion eines regulären Baumes und anschließend einige $\mathrm{GL}_2(K)$-Operationen thematisieren, die auf den Ausführungen in Kapitel II §1 von [Ser80, S. 70 ff.] basieren.
Auf der Menge $\mathcal{L} = \big\{[L] \mid L \text{ ist ein Gitter von } V\big\}$ wollen wir mittels δ eine Graphenstruktur definieren. Dazu seien zwei Elemente $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}$ genau dann adjazent, wenn $\delta(\Lambda, \Lambda') = 1$ gilt. Das bedeutet, wir definieren einen Graphen $\mathfrak{B}$ durch

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}(\mathfrak{B}) := \mathcal{L} \quad \text{und} \\ &\mathrm{E}(\mathfrak{B}) := \big\{\{\Lambda, \Lambda'\} \bigm| \Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L} \text{ mit } \delta(\Lambda, \Lambda') = 1\big\}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\mathfrak{o}^2 = \big\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \big\rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq V$ mit der K-Basis $\Big(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)$ von V ein Gitter, weshalb $\big[\mathfrak{o}^2\big] \in \mathcal{L}$ gilt und $\mathrm{V}(\mathfrak{B})$ eine nicht-leere Menge ist. Zudem besitzt die Menge $\mathrm{E}(\mathfrak{B})$ die geforderte Eigenschaft

$$\mathrm{E}(\mathfrak{B}) \subseteq \big\{M \bigm| M \subseteq \mathrm{V}(\mathfrak{B}) \text{ mit } |M| = 2\big\},$$

weil für $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}$ mit $\delta(\Lambda, \Lambda') = 1 \neq 0$ nach Lemma 4.35 stets $\Lambda \neq \Lambda'$ gilt.

Satz 4.36. *Der Graph $\mathfrak{B}$ ist ein Baum.*

Beweis: Diese Aussage wird in [Ser80, S. 70 f.] als Theorem 1 aus Kapitel II §1 bewiesen. □

Bemerkung 4.37. Aus dem Beweis in [Ser80] geht zudem hervor, dass der Abstand zweier Äquivalenzklassen von Gittern mit dem graphentheoretischen Abstand zweier Knoten in $\mathfrak{B}$ übereinstimmt. Mit unserer Notation bedeutet das $\delta(\Lambda, \Lambda') = \mathrm{d}(\Lambda, \Lambda')$ für alle $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}$.

Satz 4.38. *Es gilt $\mathfrak{B} \cong \mathrm{X}_{q+1}$ als Graphen und $\mathfrak{B}$ ist nicht endlich.*

Beweis: Wir werden zeigen, dass jeder Knoten in $\mathfrak{B}$ genau $q+1$ Nachbarn besitzt, wobei $q = |\mathfrak{K}| \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt. Dann folgt aus Satz 4.36, dass $\mathfrak{B}$ ein $(q+1)$-regulärer Baum ist und die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie aus Satz 2.23 liefert mit $k = q+1 \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ die Behauptung $\mathfrak{B} \cong \mathrm{X}_{q+1}$. Aus dem Zusatz (c) erhalten wir zudem, dass $\mathfrak{B}$ nicht endlich ist. Es bleibt also nur zu zeigen, dass für einen beliebigen Knoten $\Lambda_0 \in \mathcal{L}$

$$\Big|\big\{\Lambda \in \mathcal{L} \bigm| \mathrm{d}(\Lambda, \Lambda_0) = 1\big\}\Big| = q + 1 \tag{4.1}$$

gilt, doch dafür benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

Damit wir Gleichung (4.1) schließlich beweisen können, benötigen wir die Konstruktion der projektiven Geraden. Diese kann man bereits für einen Ring R definieren und im Fall, dass $R = K$ ein Körper ist, besondere Eigenschaften gewinnen.

Dazu definieren wir auf der Menge $\{(a,b) \in R \times R \mid aR + bR = R\}$ die Relation $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in R^* : (\lambda a, \lambda b) = (c,d)$. Die Bedingung an die Elemente (a,b) $\big($sowie $(c,d)\big)$ der Menge bedeutet bekanntermaßen „teilerfremd", denn es gilt $(a,b) = (a) + (b) = aR + bR = R$.

Bemerkung 4.39. Da R^* eine multiplikative Gruppe ist, erhalten wir mit $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\{(a,b) \in R \times R \mid aR + bR = R\}$.

Definition 4.40. *Die* ***projektive Gerade*** *von R ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, also*

$$\mathbb{P}^1(R) := \{(a,b) \in R \times R \mid aR + bR = R\}/\sim.$$

In dem Fall, dass nun $R = K$ ein beliebiger Körper ist, bemerken wir zunächst, dass wir die Eigenschaft $aK + bK = K$ für $(a,b) \in K \times K$ zu $(a,b) \in K^2 \setminus \{0\}$ vereinfachen können. Auf der einen Seite gilt für (a,b) mit der genannten Eigenschaft, dass $(a,b) \neq (0,0)$, da wir sonst den Widerspruch $0 = 0K + 0K = K$ erhalten. Auf der anderen Seite gilt für $(a,b) \in K^2 \setminus \{0\}$ stets $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, somit durch das Bilden der Inversen schon $aK = K$ oder $bK = K$ und daher durch das Ergänzen einer Null $aK + bK = K$. Wir erhalten also

$$\mathbb{P}^1(K) = \big(K^2 \setminus \{0\}\big)/\sim\, = \big\{[a:b] \;\big|\; (a,b) \in K^2 \setminus \{0\}\big\},$$

indem wir für die Äquivalenzklassen kurz $[a:b]$ statt $\big[(a,b)\big]$ schreiben. Diese Schreibweise nennen wir **homogene Koordinaten** und halten fest, dass aufgrund der Relation für alle $\lambda \in K^*$ stets $[a:b] = [\lambda a : \lambda b]$ gilt.

Lemma 4.41. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho : K &\to \mathbb{P}^1(K) \\ x &\mapsto [x:1] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert sowie injektiv mit $\rho(K) = \big\{[x:1] \;\big|\; x \in K\big\}$ und liefert zudem

$$\mathbb{P}^1(K) = \rho(K) \,\dot\cup\, \big\{[1:0]\big\}, \tag{4.2}$$

$$\big|\mathbb{P}^1(K)\big| = |K| + 1. \tag{4.3}$$

Beweis: <u>wohldef.:</u> Für $x \in K$ ist $(x,1) \in K^2 \setminus \{0\}$ und somit $[x:1] \in \mathbb{P}^1(K)$.

<u>injektiv:</u> Seien $x, y \in K$ mit $\rho(x) = \rho(y)$, d.h. $[x:1] = [y:1]$, so existiert ein $\lambda \in K^*$ mit $\lambda x = y$ und $\lambda \cdot 1 = 1$. Daraus folgt sofort $x = y$.

<u>Bild:</u> $\rho(K) = \big\{[x:1] \;\big|\; x \in K\big\}$ gilt per Definition.

(4.2): Um vorab zu sehen, dass die Vereinigung tatsächlich disjunkt ist, setzen wir $[x : 1] = [1 : 0]$ für ein $x \in K$. Somit existiert ein $\lambda \in K^*$ mit $\lambda x = 1$ und $\lambda \cdot 1 = 0$, was zusammen den Widerspruch $0 = 1$ liefert. Da die Teilmenge „$\supseteq$" klar ist, fehlt jetzt nur noch die Umkehrung. Sei $[a : b] \in \mathbb{P}^1(K)$, so gilt $(a, b) \in K^2 \setminus \{0\}$. Falls nun $b = 0$ gilt, so ist $a \neq 0$ und somit $a \in K^*$, weshalb $[a : b] = [a : 0] = [1 : 0]$. Falls aber $b \neq 0$ und somit $b \in K^*$ gilt, so setzen wir $x := b^{-1}a \in K$ und erhalten damit $[a : b] = [b^{-1}a : 1] = [x : 1]$.

(4.3): Da ρ injektiv ist, gilt $\big|\rho(K)\big| = |K|$, weshalb die Gleichheit aus (4.2) folgt. □

Bemerkung 4.42. Durch die injektive Abbildung ρ aus Lemma 4.41 können wir K als Teilmenge von $\mathbb{P}^1(K)$ betrachten. Aus diesem Grund wird die Gleichung (4.2) oft so interpretiert, dass die projektive Gerade aus der affinen Geraden K und einem Punkt im Unendlichen $[1 : 0]$ besteht.

Wir erhalten noch eine weitere Möglichkeit, um die Elemente von $\mathbb{P}^1(K)$ zu zählen:

Lemma 4.43. *Es existiert eine wohldefinierte, bijektive Abbildung von Mengen*

$$\phi : \big\{U \subseteq K^2 \;\big|\; U \textit{ Untervektorraum mit } \dim_K U = 1\big\} \to \mathbb{P}^1(K).$$

Daher gilt insbesondere

$$\big|\mathbb{P}^1(K)\big| = \Big|\big\{U \subseteq K^2 \;\big|\; U \textit{ Untervektorraum mit } \dim_K U = 1\big\}\Big|.$$

Beweis: Sei $U \subseteq K^2$ ein beliebiger Untervektorraum mit $\dim_K U = 1$. Somit gilt $U = \langle u \rangle_K$ für ein $u = (u_1, u_2) \in K^2 \setminus \{0\}$. Wir setzen nun $\phi(U) := [u_1 : u_2]$.

wohldef.: $[u_1 : u_2] \in \mathbb{P}^1(K)$ ist klar, da $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$. Falls wir jedoch einen anderen Basisvektor $\widetilde{u} \in K^2 \setminus \{0\}$ wählen, also $\langle \widetilde{u} \rangle_K = U = \langle u \rangle_K$, so existiert ein $\lambda \in K^*$ mit $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) = \widetilde{u} = \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2)$. Da $[\widetilde{u}_1 : \widetilde{u}_2] = [\lambda u_1 : \lambda u_2] = [u_1 : u_2]$, ist $\phi(U)$ wohldefiniert.

injektiv: Seien $U, U' \subseteq K^2$ Untervektorräume mit $\dim_K U = \dim_K U' = 1$ und $U = \langle u \rangle_K, U' = \langle u' \rangle_K$ für $u = (u_1, u_2), u' = (u'_1, u'_2) \in K^2 \setminus \{0\}$ sowie $\phi(U) = \phi(U')$. Per Definition von ϕ gilt somit $[u_1 : u_2] = [u'_1 : u'_2]$, weshalb ein $\lambda \in K^*$ existiert mit $(u_1, u_2) = (\lambda u'_1, \lambda u'_2)$. Daraus folgt wiederum $U = \langle u \rangle_K = \langle u' \rangle_K = U'$.

surjektiv: Für $[u_1 : u_2] \in \mathbb{P}^1(K)$, also $(u_1, u_2) \in K^2 \setminus \{0\}$, definieren wir uns den Untervektorraum $U := \big\langle (u_1, u_2) \big\rangle_K \subseteq K^2$, der $\dim_K U = 1$ erfüllt, da $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$. Dann gilt schon $\phi(U) = [u_1 : u_2]$ per Definition von ϕ.

insb.: Der Zusatz folgt aus der eben nachgewiesenen Bijektion der Mengen. □

Mit diesem Wissen können wir nun (4.1) beweisen, um den Beweis von Satz 4.38 zu beenden. Wir schreiben $\Lambda_0 = [L_0]$ für ein Gitter L_0 von V. Mit $\pi \in \mathfrak{o} \setminus \{0\} \subseteq K^*$ ist $\pi L_0 \subseteq L_0$ wieder ein Gitter und aus Lemma 4.31 und Lemma 4.34 folgt wegen der Eindeutigkeit von $\{a, b\}$ schon $a = 1 = b$ und somit $L_0/\pi L_0 \cong (\mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o}) \oplus (\mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o})$ als $\mathfrak{o}$-Moduln. Da die Multiplikation mit π auf beiden Seiten für beliebige Elemente stets Null ergibt, erhalten wir die Isomorphie auch als $(\mathfrak{o}/\pi\mathfrak{o})$-Moduln, d.h. als $\mathfrak{K}$-Vektorräume. Es gilt also $L_0/\pi L_0 \cong \mathfrak{K}^2$ und $\dim_{\mathfrak{K}}(L_0/\pi L_0) = 2$. Als Nächstes wollen wir die Isomorphie

$$\Big\{\Lambda \in \mathcal{L} \;\big|\; \delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1\Big\} \cong \Big\{U \subseteq L_0/\pi L_0 \;\Big|\; U \text{ Untervektorraum mit } \dim_{\mathfrak{K}} U = 1\Big\}$$

von Mengen beweisen. Für $\Lambda \in \mathcal{L}$ mit $\delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1$ liefert Lemma 4.35 angewandt auf L_0 genau ein Gitter $L \in \Lambda$ mit $L \subseteq L_0$ und $L_0/L \cong \mathfrak{K}$. Aufgrund von Lemma 4.31 existieren eine $\mathfrak{o}$-Basis (e_1, e_2) von L_0 sowie $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L ist und mittels Lemma 4.34 erhalten wir $a, b \in \mathbb{N}$. Angenommen $a > 0$ und $b > 0$, so liefert $L \subseteq \pi L_0$ einen Widerspruch zu Punkt (b) aus Lemma 4.35. Sei o.B.d.A. $a = 0$, dann ist $b = |a - b| = \delta([L], [L_0]) = \delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1$ und daher

$$\pi L_0 = \langle \pi e_1, \pi e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq \langle e_1, \pi e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} = L.$$

Wir betrachten $L/\pi L_0$ und erhalten $L/\pi L_0 \subseteq L_0/\pi L_0$ über die kanonische Einbettung. Wie zuvor sehen wir, dass diese Teilmenge nicht nur als $\mathfrak{o}$-Moduln, sondern auch als $\mathfrak{K}$-Vektorräume gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} 1 = \dim_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}) = \dim_{\mathfrak{K}}(L_0/L) &= \dim_{\mathfrak{K}}\Big((L_0/\pi L_0)/(L/\pi L_0)\Big) \\ &= \dim_{\mathfrak{K}}(L_0/\pi L_0) - \dim_{\mathfrak{K}}(L/\pi L_0) = 2 - \dim_{\mathfrak{K}}(L/\pi L_0) \end{aligned}$$

und somit $\dim_{\mathfrak{K}}(L/\pi L_0) = 1$ erfüllt, weshalb wir zeigen müssen, dass die Zuordnung $\Lambda \mapsto L/\pi L_0$ bijektiv ist.

injektiv: Falls aus dieser Konstruktion für $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{L}$ mit $\delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1 = \delta(\Lambda', \Lambda_0)$ Gitter $L \in \Lambda$ und $L' \in \Lambda'$ hervorgehen mit $L/\pi L_0 = L'/\pi L_0$, dann folgt $L = L'$ und somit $\Lambda = [L] = [L'] = \Lambda'$. Das sehen wir, indem wir für $l \in L$ die Klasse $l + \pi L_0 \in L'/\pi L_0$ betrachten. Wir schreiben daher $l = l' + \pi l_0$ mit $l' \in L'$ sowie $l_0 \in L_0$ und erhalten wegen $\pi L_0 \subseteq L'$ bereits $l \in L'$. Die Beziehung $L \supseteq L'$ sehen wir analog.

surjektiv: Ist $U \subseteq L_0/\pi L_0$ ein Untervektorraum mit $\dim_{\mathfrak{K}} U = 1$, so konstruieren wir nun ein Gitter $L \subseteq L_0$ mit $L_0/L \cong \mathfrak{K}$. Für $\Lambda := [L] \in \mathcal{L}$ gilt laut Lemma 4.35 dann $\delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1$. Um dies zu erreichen, schreiben wir $U = \big\langle [e_1] \big\rangle_{\mathfrak{K}}$ mit $e_1 \in L_0$ und ergänzen diesen Vektor zu einer $\mathfrak{K}$-Basis $([e_1], [e_2])$ von $L_0/\pi L_0$ mit $e_2 \in L_0$. Nach dem Lemma von Nakayama können wir diese Basis heben (vergleiche Korollar 3 aus Abschnitt 2.8 von [Rei95, S. 44]), weshalb $L_0 = \langle e_1, e_2\rangle_{\mathfrak{o}}$ gilt. Daher erhalten wir durch die Definition $L := \langle e_1, \pi e_2\rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq L_0$ wieder ein Gitter, weil $\langle e_1, \pi e_2\rangle_K = \langle e_1, e_2\rangle_K = \langle L_0\rangle_K = V$ gilt, da $\pi \in K^*$ und L_0 ein Gitter ist. Lemma 4.34 liefert $L_0/L \cong \big(\mathfrak{o}/\pi^0\mathfrak{o}\big) \oplus \big(\mathfrak{o}/\pi^1\mathfrak{o}\big) \cong \mathfrak{K}$ und wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung wird Λ auf $L/\pi L_0$ abgebildet. Es ist $e_1 \in L$ und $[e_1] \neq 0$ in $L_0/\pi L_0$, da $[e_1]$ eine $\mathfrak{K}$-Basis von U bildet. Somit ist auch $[e_1] \neq 0$ im Untervektorraum $L/\pi L_0$ und daher eine $\mathfrak{K}$-Basis dieses eindimensionalen Vektorraums, wodurch wie gewünscht $L/\pi L_0 = \big\langle [e_1]\big\rangle_{\mathfrak{K}} = U$ gilt.

Mit der soeben bewiesenen Isomorphie von Mengen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big|\big\{\Lambda \in \mathcal{L} \;\big|\; \delta(\Lambda, \Lambda_0) = 1\big\}\Big| &= \left|\left\{U \subseteq L_0/\pi L_0 \;\middle|\; U \text{ UVR mit } \dim_{\mathfrak{K}} U = 1\right\}\right| \\
&= \left|\left\{U \subseteq \mathfrak{K}^2 \;\middle|\; U \text{ UVR mit } \dim_{\mathfrak{K}} U = 1\right\}\right| \\
&= \big|\mathbb{P}^1(\mathfrak{K})\big| \quad \text{(nach Lemma 4.43)} \\
&\overset{(4.3)}{=} |\mathfrak{K}| + 1 = q + 1,
\end{aligned}$$

womit Gleichung (4.1) wegen $\mathrm{d}(\Lambda, \Lambda_0) = \delta(\Lambda, \Lambda_0)$ bewiesen ist. □

Aufgrund von Satz 4.38 schreiben wir ab nun X_{q+1} für den Graphen $\mathfrak{B}$ und wollen als Nächstes eine Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf diesem $(q+1)$-regulären Baum, genauer auf der Knotenmenge $\mathrm{V}(\mathrm{X}_{q+1}) = \mathcal{L}$ konstruieren:

Definition 4.44. *Wir definieren*

$$\begin{aligned}
\odot : \mathrm{GL}_2(K) \times \mathcal{L} &\to \mathcal{L} \\
\big(A, [L]\big) &\mapsto A \odot [L] := [A \cdot L].
\end{aligned}$$

Lemma 4.45. *„$\odot$“ ist eine Operation von* $\mathrm{GL}_2(K)$ *auf* $\mathcal{L}$.

Beweis: Da $\mathrm{GL}_2(K)$ eine Gruppe und $\mathcal{L}$ eine Menge ist, müssen wir die Wohldefiniertheit der Abbildung „$\odot$“ sowie die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 4.18 nachrechnen. Seien dazu $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$ und sei $[L] \in \mathcal{L}$ mit einem Gitter L von V. Wegen Lemma 4.29 existieren $l_1, l_2 \in L$, die linear unabhängig über K sind, sodass $L = \langle l_1, l_2\rangle_{\mathfrak{o}}$ und $V = \langle l_1, l_2\rangle_K$ gilt.

wohldef.: Da $L \subseteq V = K^2$ gilt und laut Lemma 4.17 die Abbildung $A\cdot\_ : K^2 \to K^2$ ein K-linearer Isomorphismus, d.h. insbesondere $\mathfrak{o}$-linear ist, berechnen wir explizit

$$A \cdot L = A \cdot \langle l_1, l_2\rangle_{\mathfrak{o}} = \langle A \cdot l_1, A \cdot l_2\rangle_{\mathfrak{o}} \subseteq V.$$

Somit liegen $A\,l_1$ und $A\,l_2$ in $A \cdot L$ und sind ebenfalls linear unabhängig über K, womit wir $V = \langle A\,l_1, A\,l_2\rangle_K$ erhalten. Es folgt, dass $A{\cdot}L$ wieder ein Gitter von V ist, weshalb $A \odot [L] = [A \cdot L] \in \mathcal{L}$ gilt. Zudem ist die Definition von $A \odot [L]$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten L, denn falls $[L] = [L']$ für ein weiteres Gitter L' von V gilt, so existiert ein $x \in K^*$ mit $L' = x \bullet L = x \cdot L$ und wir folgern aus der K-Linearität von $A \cdot \_$, dass $A \cdot L' = A \cdot (x \cdot L) = x \cdot (A \cdot L)$ und somit $A \odot [L'] = [A \cdot L'] = [A \cdot L] = A \odot [L]$ erfüllt ist. Darüber hinaus rechnen wir wegen $L \subseteq V$ nach:

(a): $1_{\mathrm{GL}_2(K)} \odot [L] = \big[1_{\mathrm{GL}_2(K)} \cdot L\big] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot L\right] = [L]$,

(b): $(A \cdot B) \odot [L] = \big[(A \cdot B) \cdot L\big] = \big[A \cdot (B \cdot L)\big] = A \odot [B \cdot L] = A \odot \big(B \odot [L]\big)$. □

Lemma 4.46. *Für jedes $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ ist die Abbildung $A \odot \_ : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ ein Automorphismus des Graphen X_{q+1}.*

Beweis: Es gilt $\mathcal{L} = \mathrm{V}(\mathrm{X}_{q+1})$ und wegen Lemma 4.45 ist die Abbildung $A \odot \_$ für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ wohldefiniert.

bijektiv: Da $\mathrm{GL}_2(K)$ eine Gruppe ist, erhalten wir $A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(K)$ und somit eine weitere wohldefinierte Abbildung $A^{-1} \odot \_ : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, die wegen der Eigenschaften von „$\odot$“ als Operation die Umkehrabbildung zu $A \odot \_$ ist. Somit ist $A \odot \_$ bijektiv.

Kanten: Laut Lemma 4.31 existieren für $\Lambda = [L]$, $\Lambda' = [L'] \in \mathcal{L}$ mit Gittern L, L' von V eine $\mathfrak{o}$-Basis (e_1, e_2) von L sowie $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' ist und es gilt $\delta(\Lambda, \Lambda') = |a - b|$. Erneut bemerken wir vorab, dass wegen $\langle e_1, e_2 \rangle_K = \langle L \rangle_K = V$ und $\dim_K V = 2$ die Familie (e_1, e_2) auch eine K-Basis von V darstellt, analog für $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$. Daher sind $(A\,e_1, A\,e_2)$ und $(\pi^a A\,e_1, \pi^b A\,e_2)$ jeweils linear unabhängig über K und eine $\mathfrak{o}$-Basis von $A \cdot L$ bzw. $A \cdot L'$. Wir folgern

$$\delta(A \odot \Lambda, A \odot \Lambda') = \delta\big([A \cdot L], [A \cdot L']\big) = |a - b| = \delta(\Lambda, \Lambda')$$

und somit per Definition von $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{q+1})$ insbesondere

$$\{\Lambda, \Lambda'\} \in \mathrm{E}(\mathrm{X}_{q+1}) \;\Leftrightarrow\; \big\{A \odot \Lambda, A \odot \Lambda'\big\} \in \mathrm{E}(\mathrm{X}_{q+1}).$$ □

Bemerkung 4.47. Der $(q+1)$-reguläre Baum X_{q+1} heißt **Bruhat-Tits-Baum** von $\mathrm{GL}_2(K)$, genauer eigentlich von $\mathrm{SL}_2(K)$.

Lemma 4.48. *Die Operation „$\odot$“ von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathcal{L}$ ist transitiv.*

Beweis: Für $[L], [L'] \in \mathcal{L}$ existieren laut Lemma 4.31 eine $\mathfrak{o}$-Basis (e_1, e_2) von L sowie $a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $(\pi^a e_1, \pi^b e_2)$ eine $\mathfrak{o}$-Basis von L' ist, wobei es sich jeweils auch um K-Basen von V handelt, wie wir bereits an einigen Stellen bemerkt haben.

Indem wir die erste Basis auf die zweite abbilden, erhalten wir einen Isomorphismus, dessen zugehörige Matrix das gewünschte Ergebnis liefert. Explizit setzen wir

$$A := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi^a & 0 \\ 0 & \pi^b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{GL}_2(K),$$

da $\left(e_1, e_2\right)$ eine K-Basis von K^2 und $\pi^a \cdot \pi^b = \pi^{a+b} \in K^*$ ist. Wir erhalten somit $A \cdot L = \langle A \cdot e_1, A \cdot e_2 \rangle_{\mathfrak{o}} = \left\langle \pi^a e_1, \pi^b e_2 \right\rangle_{\mathfrak{o}} = L'$, woraus $A \odot [L] = [A \cdot L] = [L']$ folgt. $\square$

Als Nächstes betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : K^* &\to \mathrm{GL}_2(K) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

die wegen der Definition von $\mathrm{GL}_2(K)$ sowie der Matrizenmultiplikation ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Da $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1_K\}$ gilt, ist φ injektiv, womit wir mittels dieser Einbettung $K^* \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$ als Untergruppe verstehen können. Des Weiteren ist $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) = \left\{A \in \mathfrak{o}^{2\times 2} \;\middle|\; \det(A) \in \mathfrak{o}^*\right\}$ eine Gruppe, die wegen $\mathfrak{o} \subseteq K$ in $\mathrm{GL}_2(K)$ enthalten ist und somit ebenfalls eine Untergruppe bildet. Wie wir bereits gesehen haben, ist $\mathfrak{o}^2$ ein Gitter von V, weshalb wir $x_0 := \left[\mathfrak{o}^2\right] \in \mathcal{L}$ als Wurzel von X_{q+1} betrachten können, da alle Knoten eines regulären Baumes (wie in Abschnitt 2.2 festgestellt) die gleichen Eigenschaften besitzen.

Lemma 4.49. *Der Stabilisator von x_0 in $\mathrm{GL}_2(K)$ ist*

$$\mathrm{GL}_2(K)_{x_0} = K^* \cdot \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}).$$

Beweis: Durch Anwenden der Definitionen erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(K)_{x_0} &= \left\{A \in \mathrm{GL}_2(K) \;\middle|\; A \odot x_0 = x_0\right\} \\ &= \left\{A \in \mathrm{GL}_2(K) \;\middle|\; \left[A \cdot \mathfrak{o}^2\right] = \left[\mathfrak{o}^2\right]\right\} \\ &= \left\{A \in \mathrm{GL}_2(K) \;\middle|\; \exists\, x \in K^* \text{ mit } A \cdot \mathfrak{o}^2 = x \cdot \mathfrak{o}^2\right\}, \end{aligned}$$

weshalb wir $\left\{A \in \mathrm{GL}_2(K) \;\middle|\; \exists\, x \in K^* \text{ mit } x^{-1}A \cdot \mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}^2\right\} = K^* \cdot \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ zeigen können, um die Aussage zu beweisen.

$\underline{\supseteq}$: Für $y \in K^* \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$ und $B \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$ gilt $A := yB \in \mathrm{GL}_2(K)$. Wir setzen $x := y \in K^*$ und erhalten $x^{-1}A \cdot \mathfrak{o}^2 = y^{-1}yB \cdot \mathfrak{o}^2 = B \cdot \mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}^2$, weil $B \cdot \_ : \mathfrak{o}^2 \to \mathfrak{o}^2$ laut Lemma 3.18 ein $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus ist.

$\underline{\subseteq}$: Ist $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $x \in K^*$ mit $x^{-1}A \cdot \mathfrak{o}^2 = \mathfrak{o}^2$, so ist die damit wohldefinierte Abbildung $x^{-1}A \cdot \_ : \mathfrak{o}^2 \to \mathfrak{o}^2$ surjektiv. Da $\mathfrak{o}^2 \subseteq K^2$ gilt und x sowie A invertierbar sind, ist die Abbildung auch injektiv und laut der Definition der Matrizenmultiplikation somit ein $\mathfrak{o}$-Modulisomorphismus. Lemma 3.18 liefert $x^{-1}A \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ und daher gilt $A = x \cdot x^{-1}A \in K^* \cdot \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$. $\square$

Lemma 4.50. *$K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ und die Abbildung*

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{GL}_2(K)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) &\to \mathcal{L}\\ A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) &\mapsto \left[A \cdot \mathfrak{o}^2\right]\end{aligned}$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

Beweis: Wegen Lemma 4.49 können wir Lemma 4.19 Punkt i) anwenden, weshalb $K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ ist. Lemma 4.19 Punkt iii) liefert dann, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{GL}_2(K)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) &\to \mathrm{GL}_2(K) \odot x_0\\ A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) &\mapsto A \odot x_0 = \left[A \cdot \mathfrak{o}^2\right]\end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Da „$\odot$“ laut Lemma 4.48 transitiv ist, folgt bereits $\mathrm{GL}_2(K) \odot x_0 = \mathcal{L}$ aus Bemerkung 4.21 und somit die Behauptung. $\square$

Definition 4.51. *Für einen Ring R definieren wir die **kompakte Induktion** durch*

$$\operatorname{c-ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R) := \left\{ f : \mathrm{GL}_2(K) \to R \;\middle|\; \begin{array}{c} f \textit{ ist eine Abbildung von Mengen} \\ \textit{mit } f(AB) = f(A) \textit{ für alle} \\ A \in \mathrm{GL}_2(K), B \in K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \textit{ und} \\ \mathrm{supp}(f)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \textit{ ist endlich} \end{array} \right\}.$$

Bemerkung 4.52.

i) Analog zu Definition 3.21 ist der Träger von f definiert durch

$$\mathrm{supp}(f) := \left\{A \in \mathrm{GL}_2(K) \;\middle|\; f(A) \neq 0_R\right\}.$$

ii) Da $K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ laut Lemma 4.50 eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(K)$ und somit selbst eine Gruppe ist, können wir auf der Menge $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathrm{GL}_2(K)$ durch

$$A \sim A' \;:\Leftrightarrow\; A^{-1}A' \in K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$$

für $A, A' \in \mathrm{supp}(f)$ eine Äquivalenzrelation definieren. Mit $\mathrm{supp}(f)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen, die wir aufgrund der Eigenschaften für $f \in \operatorname{c-ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ genau beschreiben können. Es gilt

$$\begin{aligned}[A] &= \{A' \in \operatorname{supp}(f) \mid A \sim A'\} = \{A' \in \operatorname{supp}(f) \mid A^{-1}A' \in K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})\} \\ &= \{AB \mid B \in K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})\} = A \cdot K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})\end{aligned}$$

für $A \in \operatorname{supp}(f)$, da in diesem Fall $f(AB) = f(A) \neq 0_R$ für alle $B \in K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})$ erfüllt ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(f)/K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o}) &= \{A \cdot K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o}) \mid A \in \operatorname{supp}(f)\} \\ &\subseteq \operatorname{GL}_2(K)/K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o}).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Lemma 4.53. $\operatorname{c-ind}_{K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\operatorname{GL}_2(K)}(R)$ *ist ein R-Modul.*

Beweis: Auf $\operatorname{c-ind}_{K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\operatorname{GL}_2(K)}(R)$ definieren wir die Addition und R-Multiplikation durch $(f,g) \mapsto f+g$ sowie $(r,f) \mapsto r \cdot f$ mit $(f+g)(A) := f(A) + g(A)$ sowie $(r \cdot f)(A) := r \cdot f(A)$ für $A \in \operatorname{GL}_2(K)$. Wenn wir zeigen können, dass $f+g$ und $r \cdot f$ wieder die geforderten Eigenschaften haben, könnten wir die R-Modulaxiome mithilfe der Ringaxiome von R nachrechnen. Dabei ist $0 \in \operatorname{c-ind}_{K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\operatorname{GL}_2(K)}(R)$ die Abbildung, die jedem Element aus $\operatorname{GL}_2(K)$ den Wert 0_R zuordnet.

$\underline{f+g}$: Durch die oben genannte Definition erhalten wir eine Abbildung von Mengen $f+g : \operatorname{GL}_2(K) \to R$, die für alle $A \in \operatorname{GL}_2(K)$ und $B \in K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})$

$$(f+g)(AB) = f(AB) + g(AB) = f(A) + g(A) = (f+g)(A)$$

erfüllt. Wie in (3.1) sehen wir $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$, sodass mit (4.4)

$$\operatorname{supp}(f+g)/K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o}) \subseteq \operatorname{supp}(f)/K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o}) \cup \operatorname{supp}(g)/K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})$$

folgt, wobei Letzteres nach Voraussetzung endlich ist.

$\underline{r \cdot f}$: Die Eigenschaften von $r \cdot f$ könnten wir auf analoge Weise nachrechnen, würden jedoch $\operatorname{supp}(r \cdot f) \subseteq \operatorname{supp}(f)$ wie in (3.2) für den letzten Schritt nutzen. □

Nun können wir wie in Kapitel 3 den R-Modul $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ betrachten, für den wir wichtige Ergebnisse wie Satz 3.33 und Korollar 3.48 festhalten konnten.

Lemma 4.54. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\phi^* : C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) &\to \operatorname{c-ind}_{K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\operatorname{GL}_2(K)}(R) \\ f &\mapsto \phi^*(f) \text{ definiert durch} \\ (\phi^*(f))(A) &:= f\Big(\phi\big(A \cdot K^* \operatorname{GL}_2(\mathfrak{o})\big)\Big) = f\Big(\big[A \cdot \mathfrak{o}^2\big]\Big)\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von R-Moduln.

Beweis: Wir haben festgestellt, dass sowohl $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ als auch $\text{c-ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ laut Lemma 4.53 R-Moduln sind. Somit müssen wir zeigen, dass ϕ^* wohldefiniert, R-linear bezüglich dieser Modulstrukturen sowie bijektiv ist.

wohldef.: Wir betrachten die Restklassenabbildung $\mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{GL}_2(K)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ sowie die Abbildung $\phi : \mathrm{GL}_2(K)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \to \mathcal{L}$, die wegen Lemma 4.50 wohldefiniert ist und erhalten durch die Verkettung von f nach ϕ nach der Restklassenabbildung für $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, also $f : \mathrm{V}(\mathrm{X}_{q+1}) = \mathcal{L} \to R$, eine Abbildung von Mengen $\phi^*(f) : \mathrm{GL}_2(K) \to R$. Da als Erstes die Restklassenabbildung angewandt wird, besitzt $\phi^*(f)$ die Eigenschaft $\big(\phi^*(f)\big)(AB) = \big(\phi^*(f)\big)(A)$ für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $B \in K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$. Mit (4.4) und der Bijektivität von ϕ aus Lemma 4.50 folgt

$$\begin{aligned} &\Big|\operatorname{supp}\big(\phi^*(f)\big)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\Big| = \Big|\Big\{A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \;\Big|\; A \in \operatorname{supp}\big(\phi^*(f)\big)\Big\}\Big| \\ = &\bigg|\Big\{\phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big) \;\Big|\; A \in \mathrm{GL}_2(K) \text{ mit } f\Big(\phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big)\Big) \neq 0_R\Big\}\bigg| \\ = &\Big|\big\{\Lambda \in \mathcal{L} \mid f(\Lambda) \neq 0_R\big\}\Big| = \big|\operatorname{supp}(f)\big| < \infty. \end{aligned}$$

R-linear: Für $f, g \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ und $r \in R$ könnten wir $\phi^*(f+g) = \phi^*(f) + \phi^*(g)$ und $\phi^*(r \cdot f) = r \cdot \phi^*(f)$ zeigen, indem wir die Gleichheit auf den Argumenten mithilfe der Modulstrukturen von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ und $\text{c-ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ nachrechnen.

injektiv: Wir zeigen $\operatorname{Ker}(\phi^*) = \big\{0_{C_c(\mathrm{X}_{q+1},R)}\big\}$. Sei also $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ mit $\phi^*(f) = 0$, so existiert für ein beliebiges Element $\Lambda \in \mathcal{L}$ wegen der Surjektivität von ϕ aus Lemma 4.50 ein $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ mit $\phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big) = \Lambda$ und wir erhalten $f(\Lambda) = f\Big(\phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big)\Big) = \big(\phi^*(f)\big)(A) = 0_R$. Daher gilt $f = 0_{C_c(\mathrm{X}_{q+1},R)}$.

surjektiv: Sei $g \in \text{c-ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ beliebig. Wie im Beweis der Injektivität schreiben wir $\Lambda = \phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big)$ mit $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ und setzen $f(\Lambda) := g(A) \in R$. Diese Definition ist wohldefiniert, denn falls auch $\phi\big(A' \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big) = \Lambda$ mit $A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ erfüllt ist, folgt aus der Injektivität von ϕ, dass $A' = AB$ mit $B \in K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ gilt und die Eigenschaft von g liefert dann $g(A') = g(AB) = g(A)$. Wir haben also eine Abbildung $f : \mathcal{L} \to R$ definiert für die wir analog zu oben $\big|\operatorname{supp}(f)\big| = \big|\operatorname{supp}(g)/K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big| < \infty$ und somit $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ erhalten. Für $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt nun $\big(\phi^*(f)\big)(A) = f\Big(\phi\big(A \cdot K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\big)\Big) = f(\Lambda) = g(A)$ und somit $\phi^*(f) = g$. □

Als Nächstes wollen wir auf den beiden betrachteten R-Moduln $\mathrm{GL}_2(K)$-Operationen definieren, die ϕ^* schließlich $\mathrm{GL}_2(K)$-äquivariant machen.

Definition 4.55. *Wir definieren*

$$
\begin{aligned}
. : \mathrm{GL}_2(K) \times \text{c-ind}_{K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R) &\to \text{c-ind}_{K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R) \\
(A, f) &\mapsto A.f \ \textit{mit} \ \big(A.f\big)(A') := f(A^{-1}A') \qquad \textit{und} \\
\circ : \mathrm{GL}_2(K) \times \quad C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) &\to \quad C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \\
(A, f) &\mapsto A_\circ f \ \textit{mit} \ \big(A_\circ f\big)(\varLambda) := f\big(A^{-1} \odot \varLambda\big).
\end{aligned}
$$

Lemma 4.56. *„ . “ ist eine R-lineare Operation von* $\mathrm{GL}_2(K)$ *auf* $\text{c-ind}_{K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$*, „ ∘ “ ist eine R-lineare Operation von* $\mathrm{GL}_2(K)$ *auf* $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ *und* ϕ^* *ist bezüglich dieser Operationen* $\mathrm{GL}_2(K)$*-äquivariant.*

Beweis: Für den ersten Teil des Lemmas müssen wir, da $\mathrm{GL}_2(K)$ eine Gruppe und $\text{c-ind}_{K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ eine Menge ist, die Wohldefiniertheit der Abbildung „ . “, die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 4.18 sowie die R-Linearität nachrechnen. Seien dazu $A, \widetilde{A} \in \mathrm{GL}_2(K)$, $f, g \in \text{c-ind}_{K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ und $r, s \in R$.

wohldef.: Für $A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ ist $\big(A.f\big)(A') = f(A^{-1}A') \in R$ und $A.f : \mathrm{GL}_2(K) \to R$ somit eine Abbildung von Mengen. Diese erfüllt zudem für alle $B \in K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ die Eigenschaft $\big(A.f\big)(A'B) = f(A^{-1}A'B) = f(A^{-1}A') = \big(A.f\big)(A')$. Zuletzt nutzen wir, dass $A^{-1} \cdot \_ : \mathrm{GL}_2(K)/K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \to \mathrm{GL}_2(K)/K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ eine wohldefinierte und bijektive Abbildung ist, um mit Gleichung (4.4)

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathrm{supp}(A.f)/K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\Big| = \Big|\big\{A' \cdot K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \;\big|\; A' \in \mathrm{supp}(A.f)\big\}\Big| \\
= &\Big|\big\{A^{-1}A' \cdot K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \;\big|\; A' \in \mathrm{GL}_2(K) \text{ mit } f(A^{-1}A') \neq 0_R\big\}\Big| \\
= &\Big|\big\{A'' \cdot K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}) \;\big|\; A'' \in \mathrm{GL}_2(K) \text{ mit } f(A'') \neq 0_R\big\}\Big| \\
= &\Big|\mathrm{supp}(f)/K^*\,\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})\Big| < \infty
\end{aligned}
$$

zu zeigen.

(a): Für alle $A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt $\big(1_{\mathrm{GL}_2(K)}.f\big)(A') = f(1_{\mathrm{GL}_2(K)}^{-1}A') = f(A')$ und somit $1_{\mathrm{GL}_2(K)}.f = f$.

(b): Es gilt $A.(\widetilde{A}.f) = (A\widetilde{A}).f$, denn wir rechnen für alle $A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ nach, dass $\big(A.(\widetilde{A}.f)\big)(A') = \big(\widetilde{A}.f\big)(A^{-1}A') = f(\widetilde{A}^{-1}A^{-1}A') = f\big((A\widetilde{A})^{-1}A'\big) = \big((A\widetilde{A}).f\big)(A')$.

R-linear: $A.(rf + sg) = r \cdot (A.f) + s \cdot (A.g)$ ist erfüllt, denn für $A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\big(A.(rf + sg)\big)(A') &= \big(rf + sg\big)(A^{-1}A') = r \cdot f(A^{-1}A') + s \cdot g(A^{-1}A') \\
&= r \cdot \big(A.f\big)(A') + s \cdot \big(A.g\big)(A') = \big(r \cdot (A.f) + s \cdot (A.g)\big)(A').
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Teil des Lemmas müssen wir, da auch $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ eine Menge ist, die Wohldefiniertheit der Abbildung „$\circ$“, erneut die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 4.18 sowie die R-Linearität nachrechnen. Seien dazu $A, \widetilde{A} \in \mathrm{GL}_2(K)$, $f, g \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ und $r, s \in R$.

wohldef.: Da laut Lemma 4.46 auch die Abbildung $A^{-1} \odot \_ : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ bijektiv ist, erhalten wir, dass $A_\circ f : \mathrm{V}(\mathrm{X}_{q+1}) = \mathcal{L} \to R$ eine Abbildung ist mit

$$\begin{aligned} \left|\operatorname{supp}(A_\circ f)\right| &= \left|\left\{\Lambda \in \mathcal{L} \,\middle|\, f\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) \neq 0_R\right\}\right| \\ &= \left|\left\{A^{-1} \odot \Lambda \in \mathcal{L} \,\middle|\, f\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) \neq 0_R\right\}\right| \\ &= \left|\left\{\Lambda' \in \mathcal{L} \mid f(\Lambda') \neq 0_R\right\}\right| = \left|\operatorname{supp}(f)\right| < \infty. \end{aligned}$$

(a): Für alle $\Lambda \in \mathcal{L}$ gilt $\big(1_{\mathrm{GL}_2(K)\circ} f\big)(\Lambda) = f\big(1_{\mathrm{GL}_2(K)}^{-1} \odot \Lambda\big) = f(\Lambda)$ und somit $1_{\mathrm{GL}_2(K)\circ} f = f$.

(b): Unter Verwendung, dass „$\odot$“ laut Lemma 4.45 eine Operation ist, erhalten wir $A_\circ(\widetilde{A}_\circ f) = (A\widetilde{A})_\circ f$, indem wir für alle $\Lambda \in \mathcal{L}$ nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} \big(A_\circ(\widetilde{A}_\circ f)\big)(\Lambda) &= \big(\widetilde{A}_\circ f\big)\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) = f\big((\widetilde{A}^{-1}A^{-1}) \odot \Lambda\big) \\ &= f\big((A\widetilde{A})^{-1} \odot \Lambda\big) = \big((A\widetilde{A})_\circ f\big)(\Lambda). \end{aligned}$$

R-linear: Es gilt $A_\circ(rf + sg) = r \cdot (A_\circ f) + s \cdot (A_\circ g)$, denn für $\Lambda \in \mathcal{L}$ ist

$$\begin{aligned} \big(A_\circ(rf + sg)\big)(\Lambda) &= \big(rf + sg\big)\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) = r \cdot f\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) + s \cdot g\big(A^{-1} \odot \Lambda\big) \\ &= r \cdot \big(A_\circ f\big)(\Lambda) + s \cdot \big(A_\circ g\big)(\Lambda) = \big(r \cdot (A_\circ f) + s \cdot (A_\circ g)\big)(\Lambda). \end{aligned}$$

Zuletzt rechnen wir noch nach, dass ϕ^* bezüglich dieser beiden Operationen $\mathrm{GL}_2(K)$-äquivariant ist. Dazu seien $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ und $A, A' \in \mathrm{GL}_2(K)$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \big(\phi^*(A_\circ f)\big)(A') &= \big(A_\circ f\big)\Big(\big[A' \cdot \mathfrak{o}^2\big]\Big) = f\Big(A^{-1} \odot \big[A' \cdot \mathfrak{o}^2\big]\Big) \\ &= f\Big(\big[A^{-1}A' \cdot \mathfrak{o}^2\big]\Big) = \big(\phi^*(f)\big)(A^{-1}A') = \big(A.\phi^*(f)\big)(A') \end{aligned}$$

und somit $\phi^*(A_\circ f) = A.\phi^*(f)$. $\square$

Für die wesentlichen Ergebnisse in Kapitel 3 war es wichtig, $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ auch als $R[T]$-Modul zu betrachten. Wir wollen nun prüfen, ob die Operation „$\circ$“ auch mit dieser Struktur harmoniert.

Lemma 4.57. *„$\circ$“ ist eine $R[T]$-lineare Operation von* $\mathrm{GL}_2(K)$ *auf* $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$.

Beweis: Wegen Lemma 4.56 reicht es aus, für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ zu zeigen, dass $A_\circ(T \cdot f) = T \cdot (A_\circ f)$ gilt. Für $\Lambda \in \mathcal{L}$ rechnen wir nach, dass

$$\big(A_\circ(T\cdot f)\big)(\Lambda) = \big(T\cdot f\big)\big(A^{-1}\odot\Lambda\big) = \sum_{\substack{\Lambda'\in\mathcal{L}\\ \Lambda'\sim A^{-1}\odot\Lambda}} f(\Lambda') \qquad \text{und}$$

$$\big(T\cdot(A_\circ f)\big)(\Lambda) = \sum_{\substack{\Lambda''\in\mathcal{L}\\ \Lambda''\sim\Lambda}} \big(A_\circ f\big)(\Lambda'') = \sum_{\substack{\Lambda''\in\mathcal{L}\\ \Lambda''\sim\Lambda}} f\big(A^{-1}\odot\Lambda''\big)$$

erfüllt ist. Lemma 4.46 liefert die Mengengleichheit

$$\big\{\Lambda'\in\mathcal{L} \mid \Lambda'\sim A^{-1}\odot\Lambda\big\} = \big\{A^{-1}\odot\Lambda''\in\mathcal{L} \mid \Lambda''\sim\Lambda\big\},$$

und somit bereits die Gleichheit der vorherigen Terme, denn einerseits schreiben wir $\Lambda' = A^{-1}\odot A\odot\Lambda'$ und erhalten dann $A\odot\Lambda' \sim A\odot A^{-1}\odot\Lambda = \Lambda$ und andererseits ist $A^{-1}\odot\Lambda''\in\mathcal{L}$ mit $A^{-1}\odot\Lambda''\sim A^{-1}\odot\Lambda$ wegen $\Lambda''\sim\Lambda$. □

Bemerkung 4.58. Die kompakte Induktion $\operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ wird auch **universeller sphärischer Heckemodul** genannt und man kann zeigen, dass die sogenannte **sphärische Heckealgebra** von $\mathrm{GL}_2(K)$

$$\begin{aligned} H &:= \operatorname{End}_{\mathrm{GL}_2(K)}\Big(\operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)\Big) \\ &= \left\{\varphi : \operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R) \to \operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R) \;\middle|\; \begin{array}{c}\varphi \text{ ist } R\text{-linear und}\\ \mathrm{GL}_2(K)\text{-äquivariant}\end{array}\right\} \end{aligned}$$

eine R-Algebra bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen „$\circ$“ ist, für die $H \cong R[T]$ gilt. (Vergleiche Proposition 4 aus Abschnitt 2.1 von [BL95, S. 7].) Des Weiteren rechnet man nach, dass durch $f\cdot\varphi := \varphi(f)$ für alle $f \in \operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ und $\varphi \in H$ die kompakte Induktion $\operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ zu einem H-Rechtsmodul wird. Über den Isomorphismus aus Lemma 4.54 entspricht die H-Modulstruktur von $\operatorname{c-ind}_{K^*\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ der $R[T]$-Modulstruktur von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$. Sie ist von zentraler Bedeutung in dem Artikel [BL95], wie wir im Folgenden erläutern.

4.4 Existenz einfacher Quotientendarstellungen von $\mathrm{GL}_2(K)$

Da dieses Kapitel von Darstellungen der Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$ als Anwendung des Freiheitssatzes handelt, werden wir zunächst die zugehörigen Begrifflichkeiten allgemein betrachten, wofür wir Kapitel 1 von [Mai02] zurate ziehen.
Sei im Folgenden R ein Ring, M ein R-Modul und G eine Gruppe.

Definition 4.59. *Eine **R-lineare Darstellung** von G ist ein Gruppenhomomorphismus* $\sigma : G \to \mathrm{GL}(M) := \big\{\varphi : M \to M \;\big|\; \varphi \text{ ist ein } R\text{-Modulisomorphismus}\big\}$. *M heißt **Darstellungsraum** von G, wird jedoch oft auch mit „Darstellung von G“ bezeichnet.*

Definition 4.60. *M heißt **G-R-Modul**, falls es eine Abbildung* $* : G \times M \to M$ *gibt, sodass für alle* $m, m' \in M, g, h \in G, r, s \in R$ *gilt:*

(a) $1_G * m = m$,

(b) $(g \cdot h) * m = g * (h * m)$,

(c) $g * (r \cdot m + s \cdot m') = r \cdot (g * m) + s \cdot (g * m')$.

Im Grunde sind uns die Konstruktionen aus Definition 4.59 und Definition 4.60 schon aus Definition 4.25 bekannt, denn:

Lemma 4.61. *Die Begriffe „R-lineare G-Darstellung“, „G-R-Modul“ und „R-lineare G-Operation“ sind äquivalent.*

Beweis: Die Definition eines G-R-Moduls M ist die kompakte Version der Definition einer R-linearen Operation von G auf dem R-Modul M (vgl. Definition 4.18 und Definition 4.25). Die Äquivalenz dieser Begriffe gilt also per Definition.
Um aus einer R-linearen Darstellung σ ein G-R-Modul zu erhalten, setzen wir $g * m := \sigma(g)(m)$. Umgekehrt definieren wir $\sigma(g) := g * \_$ und könnten dann in beiden Fällen die Definitionen nachrechnen. $\square$

Lemma 4.61 ist der Grund dafür, dass diese Begriffe oft nicht genau unterschieden werden. Wenn wir also später einige Darstellungen genauer betrachten, interessieren wir uns oftmals nur für den Darstellungsraum. Dies ist auch vollkommen ausreichend, wenn uns klar ist, auf welche Weise G darauf R-linear operiert, da wir gerade gesehen haben, wie wir die Darstellung (als Gruppenhomomorphismus) wieder daraus erhalten können.

Definition 4.62. *Eine R-lineare Darstellung* σ *von G bzw. der G-R-Modul M als Darstellungsraum heißt **irreduzibel** oder auch **einfach**, falls* $M \neq 0$ *gilt und M keine nicht-trivialen G-stabilen R-Untermoduln besitzt.*

Definition 4.63. *Ist M ein G-R-Modul und* $N \subseteq M$ *ein G-stabiler R-Untermodul, so nennen wir die zu* M/N *zugehörige Darstellung die **Quotientendarstellung**.*

Ohne dies explizit zu nennen, haben wir mit Lemma 4.56 bereits zwei R-lineare Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(K)$ studiert, die wir mithilfe des $\mathrm{GL}_2(K)$-äquivarianten Isomorphismus ϕ^* von R-Moduln aus Lemma 4.54 vergleichen konnten. Mittels Lemma 4.57 haben wir sogar eine $R[T]$-lineare Darstellung von $\mathrm{GL}_2(K)$ erhalten, die wir im Folgenden noch genauer betrachten wollen.

Korollar 4.64. *Für jedes Ideal $I \subseteq R[T]$ ist der $R[T]$-Untermodul $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ stabil unter der Operation „$\circ$“ von $\mathrm{GL}_2(K)$. Insbesondere trägt der Quotient $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ eine R-lineare Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$.*

Beweis: Zunächst ist die Menge

$$I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \overset{\mathrm{Def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(T) \cdot f_i \;\middle|\; \begin{array}{c} p_i(T) \in I, f_i \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \\ \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

ein $R[T]$-Untermodul von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, denn zum Einen ist die Addition zweier solcher Summen natürlich wieder von der gewünschten Form und zum Anderen gilt für $q(T) \in R[T]$ und $\sum_{i=1}^{n} p_i(T) \cdot f_i \in I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ wieder

$$q(T) \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i(T)\, f_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{q(T)\, p_i(T)}_{\in I} \cdot f_i \in I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R),$$

weil I ein Ideal ist. Für die Stabilität unter $\mathrm{GL}_2(K)$ müssen wir nachrechnen, dass $\mathrm{GL}_2(K) \circ \big(I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)\big) \subseteq I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ gilt. Da laut Lemma 4.57 die Operation „$\circ$“ sogar $R[T]$-linear ist und $I \subseteq R[T]$, ergibt sich für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ sofort

$$A \circ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(T)\, f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} p_i(T) \cdot \underbrace{A \circ f_i}_{\in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)} \in I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R).$$

Da $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ laut Lemma 4.57 und Lemma 4.61 ein $\mathrm{GL}_2(K)$-$R[T]$-Modul ist und wir soeben gesehen haben, dass wir mit $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ einen $\mathrm{GL}_2(K)$-stabilen $R[T]$-Untermodul davon erhalten, folgt bereits, dass $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ ein $\mathrm{GL}_2(K)$-$R[T]$-Modul ist, also insbesondere eine R-lineare Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ trägt. $\square$

Mit diesem Korollar haben wir also eine ganze Reihe neuer R-linearer Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(K)$ konstruiert, die wir weiter untersuchen können. Dabei interessieren wir uns besonders für einfache Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(K)$. Es stellt sich heraus, dass wir unseren Freiheitssatz (Satz 3.33), bzw. das zugehörige Korollar 3.48, aus Kapitel 3 anwenden können, um solche Darstellungen zu erhalten.

Satz 4.65. *Für jedes echte Ideal $I \subsetneq R[T]$ besitzt die R-lineare $\mathrm{GL}_2(K)$-Darstellung $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ eine R-lineare Quotientendarstellung, die einfach ist.*

Beweis: Laut Definition 4.62 sowie Definition 4.63 suchen wir einen $\mathrm{GL}_2(K)$-stabilen R-Untermodul N von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, für den bereits $\big(C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)\big)/N \neq 0$ gilt und dieser Quotient keine nicht-trivialen $\mathrm{GL}_2(K)$-stabilen R-Untermoduln besitzt. Um die Existenz eines solchen N später mithilfe des Lemmas von Zorn beweisen zu können, benötigen wir zunächst jedoch $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$. Wegen Satz 4.38 können wir Korollar 3.48 anwenden, woraus $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \cong \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} R[T]$ als $R[T]$-Moduln mit passender unendlicher Indexmenge $V_{\mathcal{B}}$ folgt. Wir erhalten $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \cong I \cdot \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} R[T] = \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} I \cdot R[T]$ wegen $I \subsetneq R[T]$ und somit ebenfalls als $R[T]$-Moduln

$$C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \cong \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} R[T] \Big/ \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} I \cdot R[T] \cong \bigoplus_{\Lambda \in V_{\mathcal{B}}} \underbrace{R[T]/I \cdot R[T]}_{\neq 0, \text{ da } I \subsetneq R[T]} \neq 0,$$

also die gewünschte Aussage $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$. Wir definieren

$$S := \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{c} M \text{ ist ein } \mathrm{GL}_2(K)\text{-stabiler } R\text{-Untermodul} \\ \text{mit } I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq M \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \end{array} \right\}$$

und bemerken, dass $S \neq \emptyset$ wegen $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \in S$ gilt. S ist mit der Relation „$\subseteq$“ eine teilgeordnete Menge, für die wir nun zeigen wollen, dass jede totalgeordnete Teilmenge $Q \subseteq S$ eine obere Schranke $M \in S$ besitzt. Für $Q = \emptyset$ können wir als obere Schranke $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ verwenden. Ist $Q \subseteq S$ eine nicht-leere, totalgeordnete Teilmenge, so ist $Q = \{M_j \in S \mid j \in J\}$ für eine passende Indexmenge $J \neq \emptyset$. Wir setzen $M := \bigcup_{j \in J} M_j$, denn dann gilt $M_j \subseteq M$ für alle $j \in J$, weshalb M eine obere Schranke von Q ist. Es bleibt also nur $M \in S$ nachzurechnen.

Untermodul: Da $M_j \in S$ für alle $j \in J$ gilt, d.h. insbesondere $M_j \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, erhalten wir $M \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$. Für $m, m' \in M$ gilt per Definition $m \in M_j$ und $m' \in M_{j'}$ für passende $j, j' \in J$. Da Q totalgeordnet ist, gilt o.B.d.A. $M_{j'} \subseteq M_j$ und somit $m + m' \in M_j \subseteq M$, da M_j ein R-Untermodul von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ ist. Zudem erhalten wir aus dem gleichen Grund für $r \in R$, dass $r \cdot m \in M_j \subseteq M$ gilt. Damit haben wir gesehen, dass M ein R-Untermodul von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ ist.

stabil: Sei $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ und $m \in M$, d.h. $m \in M_j$ für ein $j \in J$. Da $M_j \in S$ nach Voraussetzung $\mathrm{GL}_2(K)$-stabil ist, erhalten wir $A \circ m \in M_j \subseteq M$, womit wir gezeigt haben, dass auch M stabil unter $\mathrm{GL}_2(K)$ ist.

$I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq M$: Wegen $J \neq \emptyset$ existiert ein $j \in J$ und aus $M_j \in S$ folgern wir bereits die Eigenschaft $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq M_j \subseteq M$.

$M \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$: Da wir gesehen haben, dass M ein R-Untermodul von $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ ist, bleibt nur noch $M \neq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ zu zeigen. Wir nehmen $M = C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ an und führen dies zu einem Widerspruch. Wegen $x_0 = [\mathfrak{o}^2] \in \mathcal{L} = \mathrm{V}(\mathrm{X}_{q+1})$, folgern wir $\mathbb{1}_{x_0} \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) = M = \bigcup_{j \in J} M_j$ und somit $\mathbb{1}_{x_0} \in M_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$. Wenn es uns gelingt, daraus zu folgern, dass dann schon $M_{j_0} = C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ gilt, steht dies im Widerspruch zu $M_{j_0} \in S$. Die Beziehung $M_{j_0} \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ gilt per Definition. Sei anders herum $f \in C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, so schreiben wir f mittels Lemma 3.24 als endliche Linearkombination $f = \sum\limits_{\Lambda \in \mathcal{L}} r_\Lambda \mathbb{1}_\Lambda$ mit $r_\Lambda \in R$ für alle $\Lambda \in \mathcal{L}$, wobei fast alle Koeffizienten 0 sind. Da laut Lemma 4.48 die Operation „$\odot$" von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathcal{L}$ transitiv ist, existiert für jedes Element $\Lambda \in \mathcal{L}$ ein $A_\Lambda \in \mathrm{GL}_2(K)$ mit $A_\Lambda \odot x_0 = \Lambda$. Für ein beliebiges $\Lambda' \in \mathcal{L}$ berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\big(A_\Lambda \circ \mathbb{1}_{x_0}\big)(\Lambda') = \mathbb{1}_{x_0}\big(A_\Lambda^{-1} \odot \Lambda'\big) &= \begin{cases} 1_R & \text{falls } A_\Lambda^{-1} \odot \Lambda' = x_0, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases} \\
= \begin{cases} 1_R & \text{falls } \Lambda' = A_\Lambda \odot x_0, \\ 0_R & \text{sonst} \end{cases} &= \mathbb{1}_{A_\Lambda \odot x_0}(\Lambda'),
\end{aligned}
$$

weshalb $A_\Lambda \circ \mathbb{1}_{x_0} = \mathbb{1}_{A_\Lambda \odot x_0}$ in $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ gilt. Wir folgern

$$
f = \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}} r_\Lambda \mathbb{1}_\Lambda = \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}} r_\Lambda \mathbb{1}_{A_\Lambda \odot x_0} = \sum_{\Lambda \in \mathcal{L}} r_\Lambda \cdot \underbrace{\big(A_\Lambda \circ \mathbb{1}_{x_0}\big)}_{\in M_{j_0}} \in M_{j_0},
$$

da $\mathbb{1}_{x_0} \in M_{j_0}$ und M_{j_0} ein $\mathrm{GL}_2(K)$-stabiler R-Untermodul ist.

Da wir insgesamt gezeigt haben, dass S eine induktiv geordnete Menge ist, liefert Satz 4.27 die Existenz eines maximalen Elementes $M_{\max} \in S$. An dieser Stelle bemerken wir zudem, dass unser Vorgehen mit dem Beweis von Proposition 11 aus Abschnitt 2.3 von [BL95, S. 10] vergleichbar ist. Per Definition von $M_{\max}$ gilt somit $\{M' \in S \mid M_{\max} \subseteq M'\} = \{M_{\max}\}$ und $M_{\max}$ ist ein $\mathrm{GL}_2(K)$-stabiler R-Untermodul mit $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq M_{\max} \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$. Über die kanonische Einbettung erhalten wir daher $N := M_{\max}/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ ebenfalls als $\mathrm{GL}_2(K)$-stabiler R-Untermodul. Da $M_{\max} \neq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ können wir zudem

$$
\big(C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)\big) / \big(M_{\max}/I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)\big) \cong C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/M_{\max} \neq 0
$$

nachrechnen, weshalb wir nur noch beweisen müssen, dass dieser Quotient keine nicht-trivialen $\mathrm{GL}_2(K)$-stabilen R-Untermoduln besitzt. Sei $\widetilde{M} \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/M_{\max}$ ein $\mathrm{GL}_2(K)$-stabiler R-Untermodul, so liefert das Urbild von $\widetilde{M}$ unter der Projektion $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \to C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/M_{\max}$ wie in der linearen Algebra einen $\mathrm{GL}_2(K)$-stabilen R-Untermodul M' mit $M_{\max} \subseteq M' \subseteq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ und $\widetilde{M} = M'/M_{\max}$. Die Stabilität bleibt dabei erhalten, weil die Projektion $\mathrm{GL}_2(K)$-äquivariant ist. Da stets $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subseteq M_{\max} \subseteq M'$ gilt, können wir zwei Fälle betrachten.

Fall 1: Wenn $M' = C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ erfüllt ist, sehen wir, dass $\widetilde{M} = C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)/M_{\max}$ ein trivialer Untermodul ist.

Fall 2: Ist hingegen $M' \neq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$, so gilt $M' \in S$ mit $M_{\max} \subseteq M'$. Aus der Maximalität folgern wir $M' = M_{\max}$ und daher ist $\widetilde{M} = M_{\max}/M_{\max} = 0$ ein trivialer Untermodul. $\square$

Bemerkung 4.66. Der Freiheitssatz aus Kapitel 3 spielt für den soeben erbrachten Beweis eine sehr wichtige Rolle, da uns andernfalls nicht klar wäre, warum $I \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \subsetneq C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R)$ für jedes echte Ideal $I \subsetneq R[T]$ gilt.

4.5 Ausblick auf supersinguläre Darstellungen

Zuletzt werden wir einen kleinen Ausblick liefern, wofür Satz 4.65 nützlich ist:

Bemerkung 4.67.

i) Da das Ideal $I := T \cdot R[T]$ keine konstanten Elemente enthält, gilt $T \cdot R[T] \subsetneq R[T]$, das bedeutet, es ist ein echtes Ideal und wir können Satz 4.65 anwenden. Wählen wir zudem $R := \overline{\mathfrak{K}}$ einen algebraischen Abschluss des Restklassenkörpers $\mathfrak{K}$, so gehören die einfachen Quotienten der $\overline{\mathfrak{K}}$-linearen $\mathrm{GL}_2(K)$-Darstellung $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, \overline{\mathfrak{K}})/T \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, \overline{\mathfrak{K}})$, deren Existenz der Satz liefert, zu den sogenannten **supersingulären** Darstellungen. Diese wurden zuerst von Barthel und Livné in [BL94] studiert. Sie erbringen mit ihrem Theorem 19 auf Seite 279, das auf Seite 281 schließlich bewiesen wird, einen wesentlich allgemeineren Freiheitssatz. Um unsere Ergebnisse mit der dort verwendeten Notation in Beziehung setzen zu können, beachten wir $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, R) \cong \mathrm{c\text{-}ind}_{K^* \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})}^{\mathrm{GL}_2(K)}(R)$ mittels ϕ^* aus Lemma 4.54, wobei wir die Verträglichkeit mit den jeweiligen $\mathrm{GL}_2(K)$-Operationen aus Lemma 4.56 erhalten.

ii) Für eine Primzahl p wählen wir K als den lokalen Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ und erhalten aus der Zahlentheorie $\mathfrak{K} = \mathbb{F}_p$. Breuil hat in [Bre03, S. 166] in seinem Théorème 1.1 gezeigt, dass $C_c(\mathrm{X}_{q+1}, \overline{\mathbb{F}_p})/T \cdot C_c(\mathrm{X}_{q+1}, \overline{\mathbb{F}_p})$ bereits eine einfache Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ über $\overline{\mathbb{F}_p}$ ist. Das bedeutet, dass das Bilden eines weiteren Quotienten in Satz 4.65 in diesem speziellen Fall wegfällt. Dabei hilft uns erneut ϕ^* aus Lemma 4.54 beim Erschließen der von Breuil genutzten Notation.

Literatur

[BL94] Barthel, L. ; Livné, R.: Irreducible Modular Representations of GL_2 of a Local Field. In: *Duke Mathematical Journal* 75 (August 1994), Nr. 2, S. 261–292.

[BL95] Barthel, L. ; Livné, R.: Modular Representations of GL_2 of a Local Field: The Ordinary, Unramified Case. In: *Journal of Number Theory* 55 (November 1995), Nr. 1, S. 1–27.

[Bre03] Breuil, Christophe: Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$: I. In: *Compositio Mathematica* 138 (September 2003), Nr. 2, S. 165–188. – Online erhältlich unter `https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/B56D1EF5D11B88B670039BC3620BDF98/S0010437X03100553a.pdf/sur_quelques_representations_modulaires_et_padiques_de_gl2qp_i.pdf` (zuletzt aufgerufen am 13.05.2018).

[JS14] Jantzen, Jens Carsten ; Schwermer, Joachim: *Algebra*. 2., korrigierte und erweiterte Auflage. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2014. – ISBN 978–3–642–40532–7.

[Mai02] Maier, Peter: *Skript zur Vorlesung Darstellungstheorie endlicher Gruppen*. TU Darmstadt : Wintersemester 2001/2002. – Online erhältlich unter `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Lehrveranstaltungen/Lehrmaterial/WS2001-2002/Darstellungstheorie_endlicher_Gruppen/darstheo.pdf` (zuletzt aufgerufen am 17.03.2018).

[Neu07] Neukirch, Jürgen: *Algebraische Zahlentheorie*. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 2007. – ISBN 978–3–540–37547–0.

[Ore62] Ore, Oystein: *Theory of Graphs*. Colloquium Publications Volume 38. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1962. – Online erhältlich unter `https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo.31924001069529;view=1up;seq=37;size=150` (zuletzt aufgerufen am 13.05.2018).

[Rei95] Reid, Miles: *Undergraduate Commutative Algebra*. London Mathematical Society Student Texts 29. Cambridge University Press, 1995. – ISBN 978–0–521–45889–4.

[Ser80] Serre, Jean-Pierre ; aus dem Französischen übersetzt von Stillwell, John: *Trees*. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1980. – ISBN 3–540–10103–9.

Versicherung an Eides statt

Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit – mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer – selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und

- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und

- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und

- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung an Eides statt nach §156 und nach §163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.

Ort, Datum	Unterschrift