Bachelorarbeit

Torische Varietäten

Marc Kohlhaw

vorgelegt der
Fakultät der Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

betreut von
Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird ein erster Einblick in die Welt der torischen Varietäten gegeben. Diese speziellen Schemata stellen ein große Klasse an Beispielen in der algebraischen Geometrie dar. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Konstruktion dieser Schemata und dem Beweis grundlegender Eigenschaften.

In einem ersten Schritt führen wir dazu den Begriff eines Monoidrings über einem Körper K ein. Den Monoidring $K[Y]$ assoziieren wir zu einem kommutativen Monoid, also einer Menge Y zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $+$, so dass es bezüglich dieser Verknüpfung ein neutrales Element gibt. Nun ist es so, dass sich gewisse Eigenschaften des Monoids Y auf den Monoidring $K[Y]$ übertragen; zum Beispiel ist der Monoidring eines endlich erzeugten Monoids als K-Algebra endlich erzeugt.

Im nächsten Schritt arbeiten wir in Abschnitt 1.2 einige grundlegende geometrische Eigenschaften konvexer Kegel in endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen heraus und definieren unter anderem den Begriff einer Seite sowie den dualen Kegel im Dualraum des Vektorraums und zeigen, dass beide Objekte ebenfalls Kegel sind. Hierbei orientieren wir uns wie in weiten Teilen der Arbeit an [Ful93] und [CLS11].

Durch die Einbettung eines Gitters N – d. h. eines endlich erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Moduls – können wir die Menge der Punkte eines Kegels σ geeignet diskretisieren: Das Lemma von Gordan ist eines der Hauptresultate des dritten Kapitels und besagt, dass diese Diskretisierung den dualen Kegel $\sigma^\vee$ unter gewissen Annahmen an σ selbst zu einem endlich erzeugten kommutativen Monoid macht, welches wir mit S_σ bezeichnen. Somit erhalten wir wie im ersten Kapitel einen endlich erzeugten Monoidring $K[S_\sigma]$ über dem Körper K, dessen Spektrum $X_\sigma := Spec(K[S_\sigma])$ im Sinne der algebraischen Geometrie ein affines K-Schema ist. Dieses Schema nennen wir dann die zum Kegel σ assoziierte affine torische Varietät.

Ist nun τ eine Seite des Kegels σ, so werden wir eine Verbindung zwischen den zugehörigen Monoidringen S_τ und S_σ herstellen, die es uns erlaubt, das affine Schema X_τ als ein offenes Unterschema von X_σ aufzufassen.

Um allgemeinere torische Varietäten zu definieren, führen wir in Kapitel 3.2 den Begriff eines Fächers ein. Dies ist eine endliche Menge Δ von Kegeln mit gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Kegel und deren Seiten. Unter anderem wird gefordert, dass der Schnitt zweier Kegel in Δ eine Seite beider Kegel ist. Falls nun τ die gemeinsame Seite zweier Kegel σ und σ' ist, so wird wie oben erläutert X_τ zu einem offenen Unterschema beider Schemata X_σ und $X_{\sigma'}$. Unter dieser Identifikation können wir die affinen Schemata X_σ mit $\sigma \in \Delta$ mithilfe des Verklebungssatzes für Schemata zu einem Schema X_Δ verkleben. Wir werden zu diesem Zeitpunkt der Arbeit ein solches durch Zusammenkleben entstandenes Schema als torische Varietät definieren, arbeiten jedoch im weiteren Verlauf eine etwas allgemeinere Definition heraus.

Im Anschluss an diese Definition werden wir in Kapitel 4 einige Beispiele torischer Varietäten sehen. In Beispiel 4.1 verleihen wir dem Torus $\mathbb{T} := Spec(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}])$ als Spektrum des zum Kegel $\{0\}$ im $\mathbb{R}^n$ assoziierten Monoidrings die Form einer affinen torischen Varietät.

Der sogenannte gewichtete projektive Raum ist das projektive Spektrum des mit einer gewichteten Graduierung versehenen Polynomrings in endlich vielen Variablen über einem Körper K. Dieser kann in geeigneter Weise ebenfalls als torische Varietät konstruiert werden, wie wir in den Beispielen 4.5 bis 4.7 genauer erläutern werden.

In Abschnitt 5 widmen wir uns erneut dem Torus $\mathbb{T}$. Es wird sich zeigen, dass er die Struktur eines sogenannten Gruppenschemas besitzt und als solches auf jeder torischen Varietät operiert. Mithilfe dieser Operation definieren wir dann eine torische Varietät etwas allgemeiner als normales, irreduzibles Schema X, welches den Torus $\mathbb{T}$ als offenes Unterschema enthält, so dass sich die Gruppenoperation des Torus zu einer Operation des Torus auf dem Schema X fortsetzen lässt.

Als nächstes werden wir in Kapitel 6 einige geometrische Eigenschaften torischer Varietäten beweisen. Das sind Eigenschaften der affinen Schemata X_σ, die sich auf die zusammengeklebte torische Varietät X_Δ übertragen. Beispielsweise ist jede torische Varietät normal, von endlichem Typ über K und separiert als K-Schema.
Abschließend werden wir im siebten Kapitel sehen, dass torische Varietäten im Allgemeinen nicht regulär sind. Tatsächlich werden wir beweisen, dass man die Frage, ob eine torische Varietät regulär ist oder nicht, durch eine Analyse der zugehörigen Kegel beantworten kann. Als Anwendung dieser Aussage betrachten wir einige Beispiele und geben insbesondere dem gewichteten projektiven Raum in Anlehnung an [Dol82] die Struktur einer Quotientensingularität.
Als Ausblick kann man mit diesem Wissen Auflösungen von Singularitäten konstruieren, indem man den Fächer in geeigneter Weise so abändert, dass alle Kegel eine gewisse Regularitätseigenschaft erfüllen.

2 Grundlagen

2.1 Monoidringe

Sei $(Y, +)$ ein kommutatives Monoid und K ein Körper. Dann ist die Menge

$$K[Y] := \{f : Y \to K \mid \text{f ist Abb. von Mengen mit } f(y) = 0 \text{ für f. a. } y \in Y\}$$

ein K-Vektorraum bezüglich punktweise definierter Verknüpfungen

$$+ : K[Y] \times K[Y] \to K[Y], (f + g)(y) := f(y) + g(y),$$
$$\cdot : K \times K[Y] \to K[Y], (\lambda f)(y) := \lambda f(y).$$

Mit der Faltung

$$* : K[Y] \times K[Y] \to K[Y], (f * g)(z) := \sum_{x+y=z} f(x)g(y)$$

wird $K[Y]$ zu einer K-Algebra mit Einslement χ^0, wobei wir für $y \in Y$ mit χ^y die charakteristische Funktion von y bezeichnen, die gegeben ist durch

$$\chi^y(x) := \begin{cases} 1, & x = y \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Man nennt $K[Y]$ den Monoidring von Y oder auch die Monoidalgebra von Y über K.
Über den injektiven Monoidhomomorphismus

$$Y \hookrightarrow K[Y], y \mapsto \chi^y,$$

wobei wir $K[Y]$ mittels des Vergissfunktors $\{\text{Ringe}\} \to \{\text{Monoide}\}$ als multiplikatives Monoid betrachten, und über den injektiven K-linearen Ringhomomorphismus

$$K \hookrightarrow K[Y], \lambda \mapsto \lambda\chi^0$$

fassen wir K und Y als Teilmengen von $K[Y]$ auf.
Beachte, dass die Familie $\{\chi^y\}_{y\in Y}$ eine K-Basis von $K[Y]$ als K-Vektorraum ist, d. h. jedes Element $f \in K[Y]$ lässt sich eindeutig schreiben als $f = \sum_{y\in Y} \lambda_y \chi^y$, wobei $\lambda_y = f(y)$ gilt.
Sind Y und Y' zwei kommutative Monoide, so induziert jeder Monoidhomomorphismus $\phi : Y \to Y'$ einen Ringhomomorphismus

$$K[\phi] : K[Y] \to K[Y'], f \mapsto (y' \mapsto \sum_{y\in Y, \phi(y)=y'} f(y)).$$

Beachte, dass die letzte Summe per Konvention 0 ist, falls y' nicht im Bild von ϕ liegt. Damit ist $K[\phi]$ die eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung, die jedes χ^y auf $\chi^{\phi(y)}$ abbildet.
Falls ϕ injektiv ist, so ist $K[\phi]$ die Fortsetzung durch 0 und daher injektiv.
Sind $\phi : Y \to Y'$ und $\psi : Y' \to Y''$ zwei Monoidhomomorphismen, so gilt nach Konstruktion $K[\psi \circ \phi] = K[\psi] \circ K[\phi]$ als Ringhomomorphismen $K[Y] \to K[Y'']$. Da ferner $K[id_Y] = id_{K[Y]}$, ist

$$K[\cdot] : \{\text{Monoide}\} \to \{\text{K-Algebren}\}$$

ein (kovarianter) Funktor.

Beispiel 2.1. *(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$K[\mathbb{N}^n] \cong K[t_1, ..., t_n]$$

als K-Algebren, denn in diesem Fall ist die Konstruktion des Monoidrings der des abstrakten Polynomrings in n Variablen über K nachempfunden.

(ii) Sei wieder $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir

$$K[\mathbb{Z}^n] \cong K[t_1, t_1^{-1}, ..., t_n, t_n^{-1}].$$

vermöge $f \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} f(\alpha) t_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot t_n^{\alpha_n}$.

(iii) Sei allgemeiner Y ein endllich erzeugtes Monoid über $\mathbb{N}$, d. h. es gebe $y_1, ..., y_r \in Y$, so dass

$$Y = \{\sum_{i=1}^{r} n_i y_i \mid n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt

$$K[Y] = K[s_1, ..., s_r],$$

wobei $s_i := \chi^{y_i}$, $i = 1, ..., n$, die charakteristische Funktion von y_i ist. Insbesondere ist in diesem Fall $K[Y]$ eine K-Algebra von endlichem Typ.

Bemerkung 2.2. *Sind Y, Y' zwei Monoide, so induzieren die Homomorphismen*

$$Y \to Y \times Y', y \mapsto (y, 0),$$

und

$$Y' \to Y \times Y', y' \mapsto (0, y'),$$

Homomorphismen

$$K[Y] \to K[Y] \otimes_K K[Y'] \leftarrow K[Y'].$$

Diese induzieren einen Homomorphismus

$$K[Y] \otimes_K K[Y'] \to K[Y \times Y']$$

von K-Algebren, der $\chi^y \otimes \chi^{y'}$ auf $\chi^{(y,y')} = \chi^{(y,0)} \cdot \chi^{(0,y')}$ abbildet und daher bijektiv ist.

In Kapitel 7 benötigen wir noch den folgenden Begriff:

Definition 2.3. *Ein Untermonoid $S \subseteq Y$ heißt saturiert, falls für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $m \in Y$ aus $km \in S$ schon $m \in S$ folgt.*

2.2 Konvexe Kegel

Um den Begriff einer torischen Varietät einzuführen, benötigen wir unter anderem einige Eigenschaften von konvexen Kegeln, die im folgenden Unterkapitel bewiesen werden. Das Kapitel ist an [Ful93], §1.2, angelehnt.

Definition 2.4. *(Kegel)*
Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein additives Untermonoid $\emptyset \neq \sigma \subseteq V$ heißt konvexer Kegel in V, falls für jedes Element $v \in \sigma$ und alle $\lambda \geq 0$ auch $\lambda v \in \sigma$ gilt. Ein solcher Kegel σ heißt polyedrisch, falls er von endlich vielen Elementen $v_1, ..., v_r \in V$ erzeugt wird, d. h. falls $\sigma = \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \mid \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ gilt.

Beispiel 2.5. *$\sigma = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein polyedrischer Kegel.*

Bemerkung 2.6. *Sind $v_1, ..., v_r \in V$, so schreiben wir auch $Cone(v_1, ..., v_r)$ für die Menge der nichtnegativen Linearkombinationen der Vektoren $v_1, ..., v_r$. Per Konvention gilt $Cone(\emptyset) = \{0\}$.*

Aus Gründen, die später klar werden, sind wir zu einem gegebenen Kegel auch am sogenannten *dualen Kegel* interessiert. Hierfür führen wir noch eine Notation ein: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $V^* := Hom_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ sein algebraischer Dualraum, so notieren wir die kanonische Paarung wie folgt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \to \mathbb{R}, \langle f, v \rangle := f(v).$$

Wir schreiben die duale Paarung also wie ein Skalarprodukt. Sei $e_1, ..., e_n$ eine Basis von V und $e_1^*, ..., e_n^*$ die zugehörige duale Basis von V^*. Sind $v \in V$ und $w \in V^*$, so können wir $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i^*$ schreiben, und erhalten für die duale Paarung

$$\langle w, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} w_i v_j \langle e_i^*, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} w_i v_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Definition 2.7. *(dualer Kegel)*
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und σ ein Kegel in V. Die Menge

$$\sigma^\vee := \{w \in V^* \mid \forall v \in \sigma : \langle w, v \rangle \geq 0\}$$

heißt der zu σ duale Kegel.

Bemerkung 2.8. *(i) Offenbar ist $\sigma^\vee \subseteq V^*$ ein konvexer Kegel im Sinne von Def. 2.4.*

(ii) Es gilt $\{0\}^\vee = V^*$.

Definition 2.9. *(Dimension eines Kegels)*
Ist $\sigma \subseteq V$ ein Kegel, so heißt $dim(\sigma) := dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}\sigma)$ die Dimension des Kegels σ.

Wir werden nun einige grundlegende Aussagen über konvexe Kegel beweisen. Einige dieser Aussagen basieren auf dem folgenden Spezialfall des Satzes von Hahn-Banach:

Satz 2.10. *Sei σ ein konvexer polyedrischer Kegel im Vektorraum V und $v \in V$ ein Vektor mit $v \notin \sigma$. Dann existiert ein $u \in \sigma^\vee$, so dass $\langle u, v \rangle < 0$.*

Beweis. Wir können ohne Einschänkung $V = \mathbb{R}^n$ annehmen und identifizieren V^* mittels des Standardskalarproduktes mit V, d. h. über den Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen

$$V \to V^*, w \mapsto l_w := (x \mapsto (w, x)),$$

wobei hier $(\cdot, \cdot)$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.
Betrachte nun die Funktion

$$\sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}, w \mapsto ||w - v||^2,$$

und beachte zunächst, dass σ als endlich erzeugter Kegel eine bezüglich der Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^n$ abgeschlossene Teilmenge ist ([Nac18], Thm. 1). Die Frage, ob die Funktion auf σ

ihr Minimum annimmt, ist äquivalent zur Frage, ob $||\cdot||$ auf σ sein Minimum annimmt. Hierzu schneiden wir σ mit einem abgeschlossenen Ball A, sodass der Schnitt $\sigma \cap A$ nichtleer ist. Dieser Schnitt ist sogar kompakt, sodass die Funktion auf dieser Menge ihr Minimum annimmt, da sie stetig und nach unten beschränkt ist. Sei w_0 eine solche Minimumstelle. Wegen $v \notin \sigma$ gilt dann $u := w_0 - v \neq 0$.
Sei nun $x \in \sigma$ beliebig und betrachte die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto ||(1-t)w_0 + tx - v||^2.$$

Die Funktion ist polynomial und daher stetig differenzierbar. Nach Wahl von w_0 nimmt ihre Einschränkung auf $[0,1]$ in 0 ein Minimum an, also gilt

$$0 \leq \frac{d}{dt}||(1-t)w_0 + tx - v||^2 \mid_{t=0} = 2(x - w_o, w_o - v),$$

d.h. wir haben

$$(x - w_0, w_0 - v) \geq 0.$$

Da $x \in \sigma$ beliebig war, gilt dies insbesondere für $x = 0$ und $x = 2w_0$, womit wir

$$-(w_0, w_0 - v) \geq 0 \text{ und } (w_0, w_0 - v) \geq 0$$

und daher

$$(w_0, w_0 - v) = 0$$

erhalten. Daher gilt $(u, x) \geq 0$ für alle $x \in \sigma$ und damit $u \in \sigma^\vee$. Unter Benutzung der Symmetrie des Skalarproduktes und wegen $u \neq 0$ erhalten wir insgesamt

$$(u, v) = (w_0 - v, v) = (w_0 - v, v - w_0) = -(u, u) = -||u||^2 < 0.$$

□

Eine direkte Folgerung aus dem Satz ist das folgende Lemma:

Lemma 2.11. *Sei $\sigma \subset V$ ein Kegel. Dann gilt $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. (vgl. [Ful93], S. 9)*

Beweis. Wir zeigen beide Inklusionen: Sei zunächst $v \in \sigma$.
Über die kanonische Injektion

$$\delta : V \hookrightarrow (V^*)^*, v \mapsto \delta_v := (f \mapsto f(v))$$

fassen wir $v \in V$ auf als $\delta_v \in (V^*)^*$. Dann gilt für alle $u \in \sigma^\vee$

$$\langle \delta_v, u \rangle = \delta_v(u) = u(v) = \langle u, v \rangle \geq 0$$

und damit $v \in (\sigma^\vee)^\vee$.
Sei nun $v \in V$ mit $v \notin \sigma$. Nach dem vorherigen Satz existiert dann ein $u_0 \in \sigma^\vee$ mit $\langle u_0, v \rangle < 0$. Dann ist aber

$$\langle \delta_v, u_0 \rangle = \delta_v(u_0) = u_0(v) = \langle u_0, v \rangle < 0$$

und damit ist $v = \delta_v \notin (\sigma^\vee)^\vee$. □

Die folgende Definition führt den Begriff der Seite eines Kegels ein.

Definition 2.12. *(Seite)*
Sei σ ein Kegel in V. Eine Menge der Form

$$\tau = \sigma \cap u^{\perp} = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

für ein $u \in \sigma^{\vee}$ heißt eine Seite von σ. In diesem Fall schreiben wir $\tau \leq \sigma$.

Bemerkung 2.13. *Offenbar ist jede Seite von σ wieder ein konvexer Kegel. Im Beweis von Lemma 2.16 rechnen wir das auch noch einmal nach.*

Beispiel 2.14. *(i) $\sigma = \sigma \cap \{0\}^{\perp}$ ist stets eine Seite von σ.*

(ii) Ist σ streng konvex (d. h. gilt $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$; vgl. Def. 2.30), so ist $\{0\} \leq \sigma$ eine Seite (vgl. Lemma 2.31 (iii))

Lemma 2.15. *Sei σ ein Kegel, $u \in \sigma^{\vee}$ und $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ die zugehörige Seite von σ. Seien weiter $v, w \in \sigma$. Dann sind äquivalent:*

(i) $v + w \in \tau$

(ii) $v \in \tau$ und $w \in \tau$

Beweis. Sind $v, w \in \tau$, so gilt $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$ und damit auch

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 + 0 = 0,$$

also $v + w \in \tau$.
Sei nun umgekehrt $v + w \in \tau$. Dann gilt also

$$0 = \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

Nun ist aber $u \in \sigma^{\vee}$ und damit $\langle u, v \rangle \geq 0$ und $\langle u, w \rangle \geq 0$ (da $v, w \in \sigma$), womit insgesamt $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$ folgt, also $v, w \in \tau$. □

Ist σ ein polyedrischer Kegel und $\tau \leq \sigma$ eine Seite , so kann man vermuten, dass auch τ als Kegel wieder endlich erzeugt ist, da es eine Teilmenge von σ ist. Aufschluss gibt hier das folgende Lemma, das uns ermöglichen wird, die Erzeuger einer Seite explizit aus den Erzeugern des Kegels σ zu bestimmen:

Lemma 2.16. *Sei σ ein polyedrischer Kegel in V, der von Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$ erzeugt wird, und sei $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ eine Seite von σ. Dann wird τ als Kegel genau von den Elementen aus $\{v_1, ..., v_n\}$ erzeugt, die $\langle u, v_i \rangle = 0$ erfüllen. Insbesondere ist jede Seite eines polyedrischen Kegels wieder ein polyedrischer Kegel.*

Beweis. Seien ohne Einschränkung $v_1, ..., v_r$ diejenigen Erzeuger von σ, für die
$\langle u, v_i \rangle = 0$ gilt, d. h. $v_1, ..., v_r \in \tau$. Sei $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_r \geq 0$ eine nichtnegative Linearkombination der $v_1, ..., v_r$. Dann gilt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{\langle u, v_i \rangle}_{=0} = 0$$

und damit $v \in \tau$. Sei nun umgekehrt $v \in \tau$. Schreibe $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$. Dann gilt

$$0 = \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, v_i \rangle.$$

Wegen $u \in \sigma^{\vee}$ gilt $\langle u, v_i \rangle \geq 0$ für alle i. Ist also $\langle u, v_i \rangle \neq 0$ für ein i, so gilt $\lambda_i = 0$ und damit ist v schon nichtnegative Linearkombination der $v_1, ..., v_r$. □

Bemerkung 2.17. *Der Beweis zeigt, dass jeder konvexe polyedrische Kegel σ nur endlich viele Seiten besitzt, denn jede Seite wird von einer Teilmenge der Erzeuger von σ erzeugt. Von diesen Teilmengen gibt es nur endlich viele, da σ endlich erzeugt ist.*

In den beiden folgenden Lemmata beweisen wir zwei weitere Eigenschaften über die Seiten eines Kegels:

Lemma 2.18. *Sei σ ein konvexer Kegel und seien $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$ zwei Seiten von σ. Dann ist die Menge $\tau_1 \cap \tau_2$ eine Seite von σ, d. h. der Schnitt zweier Seiten eines Kegels ist wieder eine Seite des Kegels.*

Beweis. Seien $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$ zwei Seiten. Schreibe $\tau_i = \sigma \cap u_i^\perp$ für gewisse $u_i \in \sigma^\vee$, $i = 1, 2$. Wir behaupten, es gilt $\tau_1 \cap \tau_2 = \sigma \cap (u_1 + u_2)^\perp$.
Sei zunächst $v \in \tau_1 \cap \tau_2$, d. h. $v \in \sigma$ mit $\langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle = 0$. Dann gilt

$$0 = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle = \langle u_1 + u_2, v\rangle$$

und damit $v \in \sigma \cap (u_1 + u_2)^\perp$.
Ist nun umgekehrt $v \in \sigma$ mit $\langle u_1 + u_2, v\rangle = 0$, so gilt

$$0 = \langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$$

und damit $\langle u_1, v\rangle = \langle u_2, v\rangle = 0$, da $u_1, u_2 \in \sigma^\vee$ und daher beide Summanden nichtnegativ sind. $\square$

Induktiv erhält man aus dem vorigen Lemma:

Korollar 2.19. *Ist σ ein Kegel, $r \in \mathbb{N}$ und sind $\tau_1, ..., \tau_r$ Seiten von σ, so ist auch $\bigcap_{i=1}^r \tau_i$ eine Seite von σ.*

Lemma 2.20. *Sei σ ein polyedrischer Kegel und $\tau \leq \sigma$ eine Seite. Ist weiter $\gamma \leq \tau$ eine Seite des Kegels τ, so gilt auch $\gamma \leq \sigma$, d. h. jede Seite einer Seite ist wieder eine Seite.*

Beweis. Sei $\tau = \sigma \cap u^\perp$ eine Seite von σ und $\gamma = \tau \cap w^\perp$ eine Seite von τ, d. h. insbesondere $u \in \sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ und $w \in \tau^\vee$. Sei $S := \{v_1, ..., v_r\}$ die Menge der Erzeuger von σ. Wir können ohne Einschränkung $\sigma \neq \tau$ annehmen, sodass $1 \leq i \leq r$ existiert mit $v_i \notin \tau$.
Definiere nun

$$p := 1 + \max_{v_i \in S, v_i \notin \tau} \frac{|\langle w, v_i\rangle|}{\langle u, v_i\rangle}.$$

Wir behaupten, für alle $1 \leq i \leq r$ gilt $\langle w + pu, v_i\rangle \geq 0$. Ist nämlich $v_i \in \tau$, so haben wir

$$\langle w + pu, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle + p\langle u, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle \geq 0.$$

Ist nun andererseits $v_i \notin \tau$, so folgt aus der Definition von p:

$$\langle w + pu, v_i\rangle = \langle w, v_i\rangle + p\langle u, v_i\rangle \geq \langle w, v_i\rangle + (1 + \frac{|\langle w, v_i\rangle|}{\langle u, v_i\rangle}) \cdot \langle u, v_i\rangle \geq \langle u, v_i\rangle \geq 0.$$

Damit haben wir $w + pu \in \sigma^\vee$ gezeigt.
Wir behaupten, es gilt $\gamma = \sigma \cap (w + pu)^\perp$. Sei dazu $v \in \gamma = \tau \cap w^\perp$. Dann gilt also insbesondere $v \in \tau$ und damit

$$\langle w + pu, v\rangle = \underbrace{\langle w, v\rangle}_{=0,\text{ da } v\in\gamma} + p \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0,\text{ da } v\in\tau} = 0,$$

sodass wir $v \in \sigma \cap (w + pu)^{\perp}$ erhalten.
Für die umgekehrte Inklusion genügt es nach Lemma 2.16 zu zeigen, dass jeder Erzeuger v_i von σ, der in $(w + pu)^{\perp}$ liegt, auch in γ liegt. Für ein solches v_i gilt wie in der obigen Rechnung

$$0 = \langle w + pu, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle + p\langle u, v_i \rangle \geq \langle w, v_i \rangle + (1 + \frac{|\langle w, v_i \rangle|}{\langle u, v_i \rangle})\langle u, v_i \rangle \geq \langle u, v_i \rangle$$

und damit gilt wegen $u \in \sigma^{\vee}$ schon $\langle u, v_i \rangle = 0$, also $v_i \in \tau$. Daraus folgt aber

$$0 = \langle w + pu, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle + p\langle u, v_i \rangle = \langle w, v_i \rangle$$

und damit wie behauptet $v_i \in \gamma$. □

Häufig ist man an echten Seiten eines Kegels interessiert, die bezüglich der Inkusion maximal sind. Diese werden nachfolgend diskutiert.

Definition 2.21. *(Facette)*
Sei σ ein Kegel in V. Eine Seite $\tau \leq \sigma$ heißt Facette, falls $dim(\tau) = dim(\sigma) - 1$. Eine Facette ist also eine Seite eines Kegels mit Kodimension 1.

Lemma 2.22. *Sei σ ein Kegel in V, der V als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufspannt, d. h. es gelte $dim(\sigma) = dim(V)$. Dann ist der topologische Rand von σ die Vereinigung all seiner echten Seiten (bzw. Facetten).*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede echte Seite von σ auf dem Rand von σ liegt:
Sei dazu $\tau = \sigma \cap u^{\perp}$ eine echte Seite von σ, d. h. es gilt $0 \neq u \in \sigma^{\vee} \subseteq V^*$.
Betrachte für $u \in V^*$ das Urbild unter dem Isomorphismus $V \to V^*$ aus dem Beweis von Satz 2.10 und bezeichne dies wieder mit u, aufgefasst als Element in V.

Sei nun $v \in \tau$ beliebig. Für $\lambda > 0$ setzen wir $w := v - \lambda u$. Dann gilt

$$\langle u, w \rangle = \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} - \lambda \underbrace{\langle u, u \rangle}_{>0, \text{ da } u \neq 0} = -\lambda |u|^2 < 0$$

für alle $\lambda > 0$, d. h. w liegt für jede Wahl von λ nicht in σ, d. h. zu Punkten in τ finden wir (bezüglich der Standardtopologie auf V als $\mathbb{R}$-Vektorraum) beliebig nahe Punkte, die nicht in σ liegen.
Im Fall $\sigma = V = 0$ ist jeder Punkt ein innerer Punkt. Damit ist der Rand von σ leer und die Aussage des Lemmas trivial. Ist $dim(\sigma) > 0$, so gilt wegen $span(\sigma) = V$, dass $int(\sigma) \neq \emptyset$, denn eine beliebige echt positive Linearkombination der Erzeuger von σ liefert einen inneren Punkt.
Sei nun $w \in int(\sigma)$ ein beliebiger innerer Punkt von σ, d. h. insbesondere gilt $\langle u, w \rangle > 0$.
Betrachte die Strecke von w nach v, d. h. die Menge

$$\{\lambda w + (1 - \lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Dann gilt für alle $\lambda \in (0, 1]$:

$$\langle u, \lambda w + (1 - \lambda)v \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + (1 - \lambda)\langle u, v \rangle = \lambda \langle u, w \rangle > 0,$$

d. h. wir können zu Punkten in τ beliebig nahe Punkte finden, die im Inneren von σ liegen, denn nach dem oben gesehenen ist jeder von v verschiedene Punkt auf der Verbindungsstrecke ein innerer Punkt von σ. Damit ist jede Seite Teil des Randes von σ.

Wir zeigen nun, dass jeder Randpunkt in einer echten Seite enthalten ist: Sei also umgekehrt $v \in \partial\sigma$. Sei $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $w_n \in V \setminus \sigma$, $n \in \mathbb{N}$ mit $w_n \to v$, $n \to \infty$.

Nach Satz 2.10 existieren $u_n \in \sigma^\vee$ mit $\langle u_n, w_n \rangle < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\|u_n\| = 1$ gilt, d. h. insbesondere, dass die u_n beschränkt sind. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $u_{n_k} \to u_0$, $k \to \infty$, die wir im Folgenden wieder mit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen. Es gilt $u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n \in \sigma^\vee$, da $\sigma^\vee$ abgeschlossen ist, sodass $\langle u_0, v\rangle \geq 0$ gilt.
Andererseits gilt aber auch

$$\begin{aligned}
|\langle u_n, w_n\rangle - \langle u_0, v\rangle| &= |\langle u_n, w_n\rangle - \langle u_0, w_n\rangle + \langle u_0, w_n\rangle - \langle u_0, v\rangle| \\
&\leq |\langle u_n - u_0, w_n\rangle| + |\langle u_0, w_n - v\rangle| \\
&\leq \underbrace{\|u_n - u_0\|}_{\to 0, n\to\infty} \cdot \underbrace{\|w_n\|}_{\leq const} + \|u_0\| \cdot \underbrace{\|w_n - v\|}_{\to 0, n\to\infty}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $lim_{n\to\infty}\langle u_n, w_n\rangle = \langle u_0, v\rangle$ gezeigt, womit wir $\langle u, v\rangle \leq 0$ und damit insgesamt $\langle u_0, v\rangle = 0$ und damit $v \in \sigma \cap u_0^\perp$ erhalten. ☐

Korollar 2.23. *Sei σ ein konvexer polyedrischer Kegel, sei $\tau \leq \sigma$ eine echte Seite. Dann ist τ in einer Facette von σ enthalten.*

Beweis. Sei $W := span(\tau)$. Indem wir V durch $span(\sigma)$ ersetzen, können wir ohne Einschränkung $V = span(\sigma)$ annehmen. Schreibe $\tau = \sigma \cap u^\perp$ mit $u \in V^*$. Aus $\tau \neq \sigma$ folgt $u \neq 0$ und $W \subseteq u^\perp \subsetneq V$. Das Bild $\overline{\sigma}$ von σ unter der Restklassenabbildung $V \to V/W$ ist ein konvexer polyedrischer Kegel mit $span(\overline{\sigma}) = V/W \neq 0$. Nach Lemma 2.25 existiert eine Facette $\overline{\rho} \subseteq \overline{\sigma}$. Schreibe $\overline{\rho} = \overline{\sigma} \cap \overline{y}^\perp$ mit $\overline{y} \in (V/W)^*$. Die Komposition $V \to V/W \xrightarrow{\overline{y}} \mathbb{R}$ ist ein Element $y \in V^*$ mit $y(\sigma) = \overline{y}(\overline{\sigma}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, d. h. $y \in \sigma^\vee$. Dann ist $\rho := \sigma \cap y^\perp$ eine Seite von σ mit $\tau \subseteq \rho$, denn $span(\tau) = W \subseteq y^\perp$. Daraus folgt $W = span(\tau) \subseteq span(\rho)$. Nach Konstruktion ist das Bild von ρ unter $V \to V/W$ gleich $\overline{\rho}$, sodass insgesamt $V/span(\rho) \cong (V/W)/(span(\rho)/W) \cong (V/W)/span(\overline{\rho})$ eindimensional ist, d. h. $\rho \subsetneq \sigma$ ist eine Facette, die τ enthält. ☐

Korollar 2.24. *Ist σ ein konvexer polyedrischer Kegel und $\tau \leq \sigma$ eine Seite, so ist τ der Schnitt aller Facetten, die τ enthalten.*

Beweis. Der Beweis erfolgt über die Kodimension n von τ in σ. Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind trivial. Für den Induktionsschritt müssen wir aber auch den Fall $n = 2$ einzeln behandeln. Durch Übergang zum Vektorraum $\mathbb{R}\sigma/\mathbb{R}\tau$ können wir mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von 2.23 $dim(V) = dim(\mathbb{R}\sigma) = 2$ und $\tau = 0$ annehmen. Schreibe $\sigma = cone(v_1, ..., v_m)$ mit $v_i \neq 0$. Wir behaupten, dass es $1 \leq i, j \leq m$ gibt mit $\sigma = cone(v_i, v_j)$. Je drei Vektoren v_i, v_j, v_k sind nämlich linear abhängig, d. h. es gibt $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_i v_i + \lambda_j v_j + \lambda_k v_k = 0$. Sind v_i, v_j, v_k paarweise Vielfache voneinander, so gilt $cone(v_i, v_j, v_k) = cone(v_i, v_j)$ nach eventueller Umnummerierung. Anderenfalls bilden v_i, v_j, v_k eine Erzeugendensystem von V. Hätten $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ alle dasselbe Vorzeichen, so könnten wir $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k \geq 0$ annehmen. Schreibe $0 = \tau = \sigma \cap u^\perp$. Dann gilt

$$0 = \langle u, \lambda_i v_i + \lambda_j v_j + \lambda_k v_k\rangle = \lambda_i\langle u, v_i\rangle + \lambda_j\langle u, v_j\rangle + \lambda_k\langle u, v_k\rangle > 0,$$

da $\langle u, w\rangle > 0$ für alle $w \in \sigma\backslash\{0\}$, da alle v_i, v_j, v_k ungleich 0 sind und da nicht alle $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ gleich 0 sind. Das ist ein Widerspruch, und wir können $\lambda_i, \lambda_j \geq 0$ und $\lambda_k \leq 0$ annehmen. Das zeigt $v_k \in cone(v_i, v_j)$ und $cone(v_i, v_j, v_k) = cone(v_i, v_j)$. Induktiv folgt $\sigma = cone(v_i, v_j) = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i + \mathbb{R}_{\geq 0} v_j$ für geeignete v_i, v_j wie behauptet. Da (v_i, v_j) eine Basis von V ist, sind $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i, \sigma_j = \mathbb{R}_{\geq 0} v_j$ zwei Facetten von σ (betrachte lineare Abbildungen $V \to \mathbb{R}$ mit $(v_i, v_j) \mapsto (0, 1)$ bzw. $(1, 0)$) mit $\sigma_i \cap \sigma_j = 0 = \tau$. Das beendet den Beweis des Falles $n = 2$.
Nun sei $n \geq 3$ und die Aussage für alle echt kleineren Kodimensionen wahr. Nach 2.23 existiert

eine Facette $\sigma' \leq \sigma$ mit $\tau \leq \sigma'$. Nach Induktionsannahme existieren Facetten $\sigma_1, ..., \sigma_m$ von σ', die τ enthalten mit $\tau = \bigcap_{i=1}^{m} \sigma_i$. Jedes σ_i hat Kodimension 2 in σ, ist nach dem Fall $n = 2$ also ein Schnitt von Facetten von σ. Damit ist τ ein Schnitt von Facetten von σ. □

Falls $span(\sigma) = V$ und $\tau \leq \sigma$ eine Facette von σ ist, so existiert ein $u_\tau \in \sigma^\vee$, so dass $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$. Da der Unterraum $\tau^\perp \subseteq V^*$ eindimensional ist, ist u_τ bis auf Multiplikation mit einem positiven Skalar eindeutig bestimmt. Mithilfe dieser Vektoren u_τ können wir den Kegel σ auch als Schnitt von Halbräumen auffassen:

Lemma 2.25. *Ist σ ein konvexer polyedrischer Kegel mit $span(\sigma) = V$, so gilt*

$$\sigma = \bigcap_{\tau \leq \sigma \text{ Facette}} H_\tau,$$

wobei $H_\tau := \{v \in V \mid \langle u_\tau, v\rangle \geq 0\}$ den von u_τ aufgespannten Halbraum bezeichnet.

Beweis. Beachte zunächst, dass die Aussage im Fall $\sigma = V$ trivialerweise richtig ist, da dann der Schnitt über die leere Familie per Konvention ganz V ist.
Die Inklusion $\subseteq$ ist klar, da $u_\tau \in \sigma^\vee$ für alle $\tau \leq \sigma$.
Sei also $v \in \bigcap_{\tau \leq \sigma \text{ Facette}} H_\tau$. Angenommen, $v \notin \sigma$. Wegen $span(\sigma) = V$ ist wie im vorigen Lemma durch jede positive Linearkombination der Erzeuger von σ ein innerer Punkt gegeben, d. h. $int(\sigma) \neq \emptyset$, und wir können ein $w \in int(\sigma)$ wählen. Betrachte nun die Menge der Punkte auf der Verbindungsstrecke von v nach w, d. h. die Menge

$$\{\lambda v + (1-\lambda)w \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

Sei $w^* = \lambda^* v + (1-\lambda^*)w$, $0 < \lambda^* < 1$, der letzte Punkt auf der Verbindungsstrecke, der in σ liegt. Ein solcher Punkt existiert, da σ abgeschlossen ist. Nach Lemma 2.22 ist dann w^* in einer Facette $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$ enthalten. Da w ein innerer Punkt von σ und $u_\tau \in \sigma^\vee$ ist, gilt $\langle u_\tau, w\rangle > 0$ und daher

$$0 = \langle u_\tau, w^*\rangle = \lambda^*\langle u_\tau, v\rangle + (1-\lambda^*)\langle u_\tau, w\rangle > \lambda^*\langle u_\tau, v\rangle$$

und damit $\langle u_\tau, v\rangle < 0$. Dies ist ein Widerspruch, denn aus $u_\tau \in \sigma^\vee$ und $v \in \sigma$ folgt $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$. Also gilt $v \in \sigma$. □

Aus dem Lemma folgern wir das sogenannte Lemma von Farkas:

Lemma 2.26. *(Lemma von Farkas)*
Der duale Kegel eines konvexen polyedrischen Kegels ist wieder ein konvexer polyedrischer Kegel.

Beweis. Sei $\sigma \subseteq V$ ein Kegel. Wir betrachten zwei Fälle:
1. Fall: $span_{\mathbb{R}}(\sigma) = V$.
Wir behaupten, dass die Vektoren $\{u_\tau\}_{\tau \leq \sigma \text{ Facette}}$ den Kegel $\sigma^\vee$ erzeugen. Wir führen den Beweis per Widerpruch: Angenommen, die Behauptung gilt nicht, d. h. es gibt $u \in \sigma^\vee$ mit $u \notin cone\{u_\tau\}_{\tau \leq \sigma \text{ Facette}}$.
Nach Satz 2.10 und unter dem kanonischen Isomorphismus $V \cong V^{**}$ existiert dann $v \in V$ mit $\langle u_\tau, v\rangle \geq 0$ für alle Facetten $\tau \leq \sigma$, aber $\langle u, v\rangle < 0$. Aber dann gilt nach vorigem Lemma $v \in \bigcap_{\tau \leq \sigma \text{ Facette}} H_\tau = \sigma$. Dies ist ein Widerspruch, denn dann gilt $u \in \sigma^\vee$, $v \in \sigma$ und $\langle u, v\rangle < 0$.
2. Fall: $span_{\mathbb{R}}(\sigma) \subsetneqq V$.
Bezeichne mit $W := span_{\mathbb{R}}(\sigma)$ den von σ in V aufgespannten Untervektorraum.
Betrachte nun das Bild $\overline{\sigma^\vee}$ von $\sigma^\vee$ in $W^* \cong V^*/W^\perp$. $\overline{\sigma^\vee}$ ist der zu σ duale Kegel, wobei σ hier als Kegel in W aufgefasst wird. Aus dem 1. Fall erhalten wir, dass $\overline{\sigma^\vee}$ von den Bildern der u_τ erzeugt wird, wobei τ die Facetten von σ durchläuft. Bezeichnet nun $y_1, ..., y_n$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $W^\perp$, so wird $\sigma^\vee$ von den Vektoren u_τ und $\pm y_1, ..., \pm y_n$ erzeugt. □

Definition 2.27. *Sei σ ein konvexer polyedrischer Kegel im $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Das relative Innere $relint(\sigma)$ von σ ist definiert als das topologische Innere von σ, wobei σ als Kegel im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}\cdot\sigma$ aufgefasst wird, und die Topologie auf diesem Untervektorraum zugrunde gelegt wird.*

Lemma 2.28. *Sei σ ein konvexer polyedrischer Kegel in V. Dann ist die Abbildung*

$$\{Seiten\ von\ \sigma\} \to \{Seiten\ von\ \sigma^\vee\}, \tau \mapsto \tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp,$$

eine wohldefinierte, inklusionsumkehrende Bijektion, die zudem involutorisch ist, d. h. es gilt $(\tau^*)^* = \tau$ für jede Seite $\tau \leq \sigma$. Außerdem gilt

$$dim(\tau) + dim(\tau^*) = dim(V).$$

Beweis. Zunächst ist die Abbildung wohldefiniert: Ist τ eine Seite von σ, so enthält τ einen Punkt v in seinem relativen Inneren, d. h. einen inneren Punkt in $\mathbb{R}\cdot\tau$. Wegen $v \in \sigma = (\sigma^\vee)^\vee$ ist dann $\sigma^\vee \cap v^\perp$ eine Seite von $\sigma^\vee$, und wir behaupten, es gilt $\sigma^\vee \cap v^\perp = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$. Für $u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ gilt $\langle u, w\rangle = 0$ für alle $w \in \tau$ und damit natürlich erst recht $\langle u, v\rangle = 0$. Ist umgekehrt $u \in \sigma^\vee \cap v^\perp$ und bezeichnen $v_1, ..., v_r$ Erzeuger von τ als Kegel in V, so können wir $v \in relint(\tau)$ wählen als

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$$

mit $\lambda_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$. Nun gilt

$$0 = \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle u, v_i\rangle.$$

Wegen $u \in \sigma^\vee$ und $v_i \in \sigma$ gilt $\langle u, v_i\rangle \geq 0$ für alle i und damit ist schon $\langle u, v_i\rangle = 0$ für alle i, da die λ_i echt größer als 0 sind. Da jedes Element $w \in \tau$ eine nichtnegative Linearkombination der Erzeuger $v_1, ..., v_r$ ist, gilt $\langle u, w\rangle = 0$ für alle $w \in \tau$, sodass wir $u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ gezeigt haben. Aufgrund der gerade bewiesenen Identität ist $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ in der Tat eine Seite von $\sigma^\vee$, d. h. die Abbildung ist wohldefiniert.
Außerdem ist sie inklusionsumkehrend, denn sind $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$ zwei Seiten mit $\tau_1 \subseteq \tau_2$, so gilt $\tau_1^\perp \supseteq \tau_2^\perp$ und damit

$$\tau_1^* = \sigma^\vee \cap \tau_1^\perp \supseteq \sigma^\vee \cap \tau_2^\perp = \tau_2^*.$$

Seien nun $v_1, ..., v_r$ Erzeuger des Kegels σ. Nach dem Beweis von Lemma 2.26 sind die Erzeuger von $\sigma^\vee$ gegeben durch die Vektoren u_τ für Facetten τ von σ zusammen mit einer geeigneten Teilmenge W des orthogonalen Komplements von $\mathbb{R}\cdot\sigma$. Seien nun $\tau_1, \tau_2 \leq \sigma$ Seiten mit $\tau_1^* = \tau_2^*$. Nach Lemma 2.24 ist τ_i der Schnitt aller Facetten, die τ_i enthalten. Bezeichne mit F_i die Menge dieser Facetten für $i = 1, 2$. Aus Lemma 2.18 folgern wir induktiv

$$\tau_i = \sigma \cap (\sum_{\gamma \in F_i} \mathbb{R}u_\gamma)^\perp, i = 1, 2.$$

Wir behaupten, dass der Kegel $\tau_i^* = \sigma^\vee \cap \tau_i^\perp$ von der Menge $\{u_\gamma\}_{\gamma \in F_i} \cup W$ erzeugt wird. Es ist klar, dass $W \subset \sigma^\vee \cap \tau_i^\perp$ gilt, da die Elemente aus W auf ganz σ senkrecht stehen und damit insbesondere auf τ_i. Außerdem ist für jedes $\gamma \in F_i$ der Vektor $u_\gamma \in \sigma^\vee$ nach Konstruktion orthogonal auf der Facette γ, die τ_i enthält, also insbesondere orthogonal auf τ_i, d. h. $u_\gamma \in \tau_i^\perp$. Ist umgekehrt u_j ein Erzeuger von $\sigma^\vee$ mit $u_j \in \tau_i^\perp$, so existiert nach 2.16 und 2.23 eine Facette von σ, auf der u_j orthogonal steht. Diese Facette enthält dann τ_i, sodass bis auf positive skalare Vielfache $u_j \in \{u_\gamma\}_{\gamma \in F_i}$ gilt. Es folgt, dass τ_i von der Menge $\{u_\gamma\}_{\gamma \in F_i} \cup W$ erzeugt wird. Nach Annahme gilt $\tau_1^* = \tau_2^*$, d. h. wir können ohne Einschränkung die gleichen Erzeuger wählen und erhalten so $F_1 = F_2$ und damit

$$\tau_1 = \sigma \cap (\sum_{\gamma \in F_1} \mathbb{R}u_\gamma)^\perp = \sigma \cap (\sum_{\gamma \in F_2} \mathbb{R}u_\gamma)^\perp = \tau_2,$$

womit die Injektivität der Abbildung gezeigt ist.
Wir wollen nun zeigen, dass die Abbildung involutorisch ist, d. h. für jede Seite $\tau \leq \sigma$ gilt $(\tau^*)^* = \tau$. Dazu beachte zunächst, dass nach Definition der Abbildung $(\tau^*)^* = \sigma \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp$ gilt. Da jedes Element aus τ orthogonal auf $\tau^\perp$ und damit auch auf der Teilmenge $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ steht, und da natürlich $\tau \subseteq \sigma$ gilt, haben wir

$$\tau \subseteq \sigma \cap (\sigma^\vee \cap \tau^\perp)^\perp = (\tau^*)^*.$$

Da die Abbildung inklusionsumkehrend ist, folgt daraus $\tau^* \supseteq ((\tau^*)^*)^*$. Andererseits gilt

$$((\tau^*)^*)^* = \sigma^\vee \cap (\sigma \cap (\tau^*)^\perp)^\perp.$$

Weiter gilt $\tau^* \subseteq \sigma^\vee$ und τ^* steht orthogonal auf $(\tau^*)^\perp$ und damit auch auf $\sigma \cap (\tau^*)^\perp$, sodass insgesamt $\tau^* = ((\tau^*)^*)^*$ folgt. Nach der gerade bewiesenen Injektivität gilt daher $\tau = (\tau^*)^*$.
Um die Surjektivität zu zeigen, wenden wir das bisher Gezeigte auf den Kegel $\sigma^\vee$ an: ist $\tau \leq \sigma^\vee$ eine Seite, so wird sie unter der Abbildung auf τ^* abgebildet, die wiederum auf $(\tau^*)^* = \tau$ abgebildet wird, d. h. wir haben mit $\tau^* \leq \sigma$ ein Urbild von τ gefunden.
Es verbleibt, die Formel für die Dimension zu beweisen. Aufgrund der Bijektivität und der Ordnungsumkehrung der Abbildung korrespondiert die kleinste Seite von σ mit der größten Seite von $\sigma^\vee$, also mit $\sigma^\vee$ selbst. Also ist die kleinste Seite von σ gegeben durch

$$(\sigma^\vee)^* = \sigma \cap (\sigma^\vee)^\perp = (\sigma^\vee)^\perp.$$

Für die kleinste Seite von σ erhalten wir damit

$$dim((\sigma^\vee)^*) + dim(\sigma^\vee) = dim((\sigma^\vee)^\perp) + dim(\sigma^\vee) = dim(V).$$

Ist $\tau \leq \sigma$ eine beliebige Seite, so existiert eine Kette maximaler Länge

$$\tau_0 \subsetneqq \tau_1 \subsetneqq ... \subsetneqq \tau_l = \tau$$

von Seiten von σ. Indem wir die Abbildung $(\cdot)^*$ anwenden, erhalten wir eine Kette

$$\tau^* = \tau_l^* \subsetneqq ... \subsetneqq \tau_1^* \subsetneqq \tau_0^*$$

von Seiten von $\sigma^\vee$, die aufgrund der Bijektivität ebenfalls maximale Länge hat. Wegen Maximalität und 2.23 verändert sich die Dimension in beiden Ketten in jedem Schritt genau um 1, d. h. es gilt $dim(\tau_0) = dim(\tau) + l$ und daher $dim(\tau^*) = dim(\tau_0^*) + l$. Außerdem muss $\tau_0^* = \sigma^\vee$ gelten, da wir anderenfalls $\sigma^\vee$ zur Kette hinzufügen können, im Widerspruch zur Maximalität der Kette. Es folgt

$$dim(\tau) + dim(\tau^*) = dim(\tau_0) + dim(\tau_0^*) = dim(\sigma^\vee) + dim((\sigma^\vee)^*) = dim(V).$$

□

Lemma 2.29. *(Trennungssatz)*
Seien σ und σ' konvexe polyedrische Kegel im Vektorraum V, so dass $\tau := \sigma \cap \sigma'$ eine gemeinsame Seite beider Kegel ist. Dann existiert ein $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma'^\vee)$, so dass

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp.$$

Beweis. Wir betrachten die Menge $\gamma := \sigma - \sigma' := \{v - v' \mid v \in \sigma, v' \in \sigma'\}$. Beachte zunächst, dass γ ein konvexer polyedrischer Kegel ist. Wählen wir $u \in relint(\gamma^\vee)$ beliebig, so erhalten wir wie im Beweis von Lemma 2.28, dass $(\gamma^\vee)^* = \gamma \cap u^\perp$ die kleinste Seite von γ ist.
Wir behaupten, es gilt $(\gamma^\vee)^\perp = \gamma \cap (-\gamma)$: Jedes $v \in (\gamma^\vee)^\perp$ ist per Definition in $(\gamma^\vee)^\vee = \gamma$ und in $-\gamma = ((-\gamma)^\vee)^\vee$ enthalten, da es orthogonal auf ganz $\gamma^\vee$ steht. Ist umgekehrt $v \in \gamma \cap (-\gamma)$, so gilt für jedes $u \in \gamma^\vee$

$$\langle u, v\rangle \geq 0 \text{ und } \langle u, -v\rangle \geq 0,$$

also $\langle u, v\rangle = 0$, d. h. $v \in (\gamma^\vee)^\perp$. Beachte, dass die obige Behauptung für jeden konvexen polyedrischen Kegel richtig ist.
Damit erhalten wir

$$\gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (-\gamma) = (\sigma - \sigma') \cap (\sigma' - \sigma).$$

Wir behaupten, dass $\tau = \sigma \cap u^\perp$ gilt, und dass u die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wegen $\sigma \subset \gamma$ ist $u \in \gamma^\vee \subset \sigma^\vee$. Ferner ist $\tau \subset \sigma$ und $\tau \subset \sigma'$, d. h. $\tau \subset \gamma$ und $\tau \subset -\gamma$, also $\tau \subset \gamma \cap (-\gamma) = \gamma \cap u^\perp$, was die erste Inklusion zeigt.
Für die umgekehrte Richtung sei $v \in \sigma \cap u^\perp$ beliebig. Dann ist

$$v \in \sigma \cap u^\perp \subset \gamma \cap u^\perp = \gamma \cap (-\gamma) \subset \gamma = \sigma' + (-\sigma),$$

sodass wir $w \in \sigma, w' \in \sigma'$ mit $v = w' - w$ schreiben können. Also gilt $v + w = w' \in \sigma'$. Wegen $v, w \in \sigma$ gilt auch $v + w \in \sigma$, also erhalten wir $v + w \in \sigma \cap \sigma' = \tau$. Nach Lemma 2.15 ist die Summe zweier Elemente genau dann in einer Seite enthalten, wenn beide Elemente in der Seite liegen. Damit gilt insbesondere $v \in \tau$, sodass wir auch die umgekehrte Inklusion $\sigma \cap u^\perp \subseteq \tau$ gezeigt haben.
Das gleiche Argument mit $-u$ zeigt $-u \in (\sigma')^\vee$, $\tau = \sigma' \cap u^\perp$ und damit

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap (-u)^\perp.$$

□

Definition 2.30. *Ein Kegel σ in V heißt streng konvex, falls $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ gilt.*

Unter Benutzung der obigen Aussagen über konvexe polyedrische Kegel erhalten wir folgende äquivalente Charakterisierungen von strenger Konvexität:

Proposition 2.31. *Sei σ ein konvexer polyedrischer Kegel im $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann sind äquivalent:*

(i) Es gilt $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$, d. h. σ ist streng konvex.

(ii) σ enthält keinen von 0 verschiedenen Untervektorraum.

(iii) Es existiert ein $u \in \sigma^\vee$ mit $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$.

(iv) Es gilt $span_{\mathbb{R}}(\sigma^\vee) = V^*$.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent, da $\sigma \cap (-\sigma)$ der größte Untervektorraum ist, den σ enthält.
Aussagen (i) und (iii) sind äquivalent, weil nach dem Beweis von Lemma 2.29 die Menge $\sigma \cap (-\sigma)$ die kleinste Seite von σ ist.
Schließlich sind (ii) und (iv) äquivalent, da nach Lemma 2.28 gilt:

$$\underbrace{dim(\sigma \cap (-\sigma))}_{=0 \text{ im Fall } (i)} + \underbrace{dim(\sigma^\vee)}_{=dim(V^*) \text{ im Fall } (iv)} = dim(V) = dim(V^*)$$

□

3 Konstruktion torischer Varietäten

In diesem Kapitel wollen wir mithilfe der im letzten Kapitel erarbeiteten Grundlagen über konvexe Kegel den Begriff einer torischen Varietät einführen. Hierzu konstruieren wir zunächst die zu einem Kegel σ assoziierte affine torische Varietät X_σ, um dann für geeignete Mengen von Kegeln die affinen Schemata X_σ entlang der durch Seiten definierte offene Unterschemata zu verkleben.

3.1 Affine torische Varietäten

Die Kegel, die wir betrachten, liegen stets in $\mathbb{R}$-Vektorräumen. In einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum kann man in folgender Weise ein sogenanntes Gitter einbetten. Dazu formulieren wir zunächst, was wir uns unter einem Gitter vorstellen wollen:

Definition 3.1. *(Gitter)*
Ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul N heißt Gitter.

Bemerkung 3.2. *Ist N ein Gitter, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $N \cong \mathbb{Z}^n$ als $\mathbb{Z}$-Moduln gilt.*

Haben wir nun ein Gitter $N \cong \mathbb{Z}^n$ gegeben, so können wir es via Skalarerweiterung in den n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := N_\mathbb{R} := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ einbetten.

Definition 3.3. *(duales Gitter)*
Ist N ein Gitter, so heißt der $\mathbb{Z}$-Modul $M := Hom_\mathbb{Z}(N, \mathbb{Z})$ das zu N duale Gitter.

Bemerkung 3.4. *Das duale Gitter M ist ebenfalls endlich erzeugt und frei über $\mathbb{Z}$ mit $rg_\mathbb{Z}(M) = rg_\mathbb{Z}(N)$.*

Auch den dualen Kegel betten wir via Skalarerweiterung $M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} \cong V^*$ in den dualen Vektorraum V^* ein.
Wir können nun die Aussagen aus dem letzten Abschnitt auf Kegel im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ anwenden. Um zur Definition einer torischen Varietät zu gelangen, brauchen wir Kegel mit einer zusätzlichen Eigenschaft:

Definition 3.5. *Sei N ein Gitter und $V = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ der zugehörige $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Kegel σ in V heißt rational, falls es eine Menge $S \subseteq N$ gibt, so dass $\sigma = Cone(S)$ gilt, d. h. σ wird von Elementen des Gitters N erzeugt.*

Bemerkung 3.6. *Aus 2.16 folgt, dass jede Seite eines rationalen polyedrischen Kegels wieder ein rationaler polyedrischer Kegel ist.*

Proposition 3.7. *(Gordan's Lemma)*
Sei N ein Gitter, $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ der zugehörige $\mathbb{R}$-Vektorraum und σ ein rationaler polyedrischer Kegel in V. Bezeichne wieder mit $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ das zu N duale Gitter. Dann ist die Menge $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$ ein endlich erzeugtes kommutatives Monoid.

Zum Beweis benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 3.8. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und diskret, d. h. für alle $x \in D$ gebe es ein $r > 0$ mit $D \cap B_r(x) = \{x\}$. Dann ist D eine endliche Menge.*

Beweis. Aufgrund der endlichen Überdeckungseigenschaft ist jeder kompakte, diskrete topologische Raum endlich. □

Beweis. (von Gordan's Lemma) Wähle $u_1, ..., u_r \in M$ mit $\sigma^\vee = Cone(u_1, ..., u_r)$. Dies ist möglich, da zusammen mit σ auch $\sigma^\vee$ rational ist. Dies folgt aus dem Beweis des Lemmas von Farkas: Sind $v_1, ..., v_m \in N$ mit $\sigma = Cone(v_1, ..., v_m)$, so wird jede Facette τ von σ von einer Teilmenge von $\{v_1, ..., v_m\}$ erzeugt (vgl. 2.16). Daher existiert $0 \neq u_\tau \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ mit $u_\tau \in \tau^\perp$, denn dazu muss ein über $\mathbb{Q}$ definiertes lineares Gleichungssystem gelöst werden. Nach Multiplikation mit einem Element von $\mathbb{Q}_{>0}$ können wir $u_\tau \in M$ annehmen wie behauptet. Analog ist auch $(\mathbb{R}\sigma)^\perp$ über $\mathbb{Q}$ definiert, besitzt also eine Basis in M. Der Beweis von 2.26 zeigt dann $\sigma^\vee = Cone(u_1, ..., u_r)$ mit $u_i \in M$ für $1 \leq i \leq r$. Setze

$$K := \{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \mid \forall i \in \{1, ..., r\} : 0 \leq \lambda_i \leq 1\} \subset M_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n.$$

K ist kompakt und $M \cong \mathbb{Z}^n$ ist diskret, sodass $K \cap M$ nach dem vorherigen Lemma endlich ist. Wir behaupten, dass S_σ von $K \cap M$ erzeugt wird. Sei dazu $u \in S_\sigma$. Schreibe

$$u = \sum_{i=1}^{r} \mu_i u_i$$

mit geeigneten $\mu_i \geq 0, i = 1, ..., r$.
Schreibe nun $\mu_i = \lfloor \mu_i \rfloor + \lambda_i$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ für $1 \leq i \leq r$.
Dann gilt

$$u = \sum_{i=1}^{r} \lfloor \mu_i \rfloor u_i + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i.$$

Nun gilt $u_i \in M$ und $\lfloor \mu_i \rfloor \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq i \leq r$, sodass einerseits $u_i \in K \cap M$ und andererseits die gesamte vordere Summe in M liegt. Schreiben wir nun

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i = \underbrace{u}_{\in M} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lfloor \mu_i \rfloor u_i}_{\in M},$$

so sehen wir, dass auch die zweite Summe in M liegt. Per Definition von K liegt diese dann auch in K, also in $K \cap M$. Daher ist u eine endliche Summe von Elementen aus $K \cap M$. Da $u \in S_\sigma$ beliebig war, wird S_σ von $K \cap M$ erzeugt. □

Nach Gordan's Lemma wissen wir also, dass ein Monoid der Form $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ für einen rationalen poyedrischen Kegel σ stets endlich erzeugt ist. Wir wollen diese Monoide noch besser verstehen. Die nächste Proposition zeigt den Zusammenhang zwischen den Monoiden S_τ und S_σ, falls $\tau \leq \sigma$ eine Seite ist:

Proposition 3.9. *Sei σ ein rationaler polyedrischer Kegel. Sei weiter $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ und $\tau = \sigma \cap u^\perp$ die zugehörige Seite. Dann ist τ ein rationaler polyedrischer Kegel. Alle Seiten von σ sind von dieser Form, und es gilt*

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

Beweis. Ist zunächst τ eine beliebige Seite, so ist τ als Seite eines rationalen polyedrischen Kegels selbst rational (vgl. Lemma 2.16) und es gilt $\tau = \sigma \cap u^\perp$ für jedes $u \in relint(\sigma^\vee \cap \tau^\perp)$. Wir können nun $u \in M$ wählen, da $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ als Seite des rationalen Kegels $\sigma^\vee$ ebenfalls rational ist. Damit hat jede Seite die gewünschte Form.

Für die zu beweisende Gleichung folgen wir dem Beweis von [CLS11], Proposition 1.3.16. Aus $\tau \subset \sigma$ folgt sofort $S_\sigma \subset S_\tau$. Wegen $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in \tau$ gilt zudem $\pm u \in \tau^\vee$. Damit gilt $\pm u \in S_\tau$ und $S_\sigma \subset S_\tau$, sodass

$$S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u) \subseteq S_\tau.$$

Sei nun $m \in S_\tau$ beliebig und fixiere $S \subset N$ endlich mit $\sigma = cone(S)$.
Setze

$$C := max_{v \in S}\{|\langle m, v\rangle|\} \in \mathbb{N}.$$

Wir behaupten, es gilt $m + Cu \in S_\sigma$. Sei dazu $v \in \sigma$ und betrachte zwei Fälle:
<u>1. Fall</u>: $v \in \tau$. Dann gilt

$$\langle m + Cu, v\rangle = \langle m, v\rangle + C\langle u, v\rangle = \langle m, v\rangle \geq 0,$$

da $m \in \tau^\vee$ und $u \in \tau^\perp$.
<u>2. Fall</u>: $v \in \sigma \setminus \tau$. Nach Definition von C gilt dann $C \geq -\langle m, v\rangle$ und daher

$$\langle m + Cu, v\rangle = \langle m, v\rangle + C\langle u, v\rangle \geq \langle m, v\rangle + C \geq \langle m, v\rangle - \langle m, v\rangle = 0,$$

da aus $\langle u, v\rangle > 0$ und σ rational schon $\langle u, v\rangle \in \mathbb{N}$ folgt und daher $\langle u, v\rangle \geq 1$ gilt.
Damit folgt die Behauptung. □

Proposition 3.10. *([CLS11], Proposition 3.1.3) Seien σ und σ' rationale polyedrische Kegel und sei $\tau := \sigma \cap \sigma'$ eine Seite beider Kegel. Dann gilt*

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}.$$

Beweis. Da $\tau \leq \sigma$ und $\tau \leq \sigma'$ gilt, folgt die Inklusion $S_\tau \supseteq S_\sigma + S_{\sigma'}$.
Nach dem Beweis des Trennungssatzes 2.29 können wir $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee \cap M$ wählen, so dass

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap (-u)^\perp.$$

Mit Proposition 3.9 und der Tatsache, dass $-u \in S_{\sigma'}$ gilt, erhalten wir

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u) \subseteq S_\sigma + S_{\sigma'}.$$

□

Im nächsten Schritt wollen wir eine minimale erzeugende Menge des Monoids S_σ finden. Es stellt sich heraus, dass die eindimensionalen Seiten des Kegels $\sigma^\vee$ hierbei eine wichtige Rolle spielen. Dazu definieren wir:

Definition 3.11. *(Kante)*
Sei σ ein konvexer Kegel in V. Eine Seite der Dimension 1 heißt eine Kante von σ.

Lemma 3.12. *Sei N ein Gitter und sei σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel in $N_{\mathbb{R}}$. Dann besitzt jede Kante ρ von σ einen eindeutigen Erzeuger $u_\rho \in N$, und σ wird von diesen Vektoren erzeugt.*

Beweis. Sei $\rho \leq \sigma$ eine Kante. Da σ streng konvex ist, ist ρ nach 2.31 eine Halbgerade, und ρ ist als Seite eines rationalen Kegels selbst rational. Daher gibt es einen eindeutigen Erzeuger u_ρ von $\rho \cap N$, nämlich den von 0 verschiedenen Punkt von ρ kleinster Norm, der im Gitter N liegt. Wir nennen den Vektor u_ρ den Strahlenerzeuger von ρ. Jedes Element $v \in \rho \cap N$ ist von der Form $k \cdot u_\rho$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Strahlenerzeuger bilden ein Erzeugendensystem für σ, d. h. es gilt $\sigma = Cone\{u_\rho\}_{\rho \leq \sigma \text{ Kante}}$: Da ρ eine Kante von σ definiert, ist aus Dimensionsgründen durch $\sigma^\vee \cap \rho^\perp$ eine Facette von $\sigma^\vee$ gegeben, und nach Lemma 2.28 sind alle Facetten von $\sigma^\vee$ von dieser Form. Mit Lemma 2.25 gilt dann

$$\sigma^\vee = \bigcap_{\rho \leq \sigma \text{ Kante}} Cone(u_\rho)^\vee,$$

da u_ρ ein innerer Punkt von ρ ist und daher $\sigma^\vee \cap \rho^\perp = \sigma^\vee \cap u_\rho^\perp$ nach dem Beweis von 2.28.

Wir behaupten, dass für zwei streng konvexe polyedrische Kegel σ, σ' die Gleichheit

$$\sigma^\vee \cap (\sigma')^\vee = (\sigma + \sigma')^\vee$$

gilt. Sei zunächst $u \in \sigma^\vee \cap (\sigma')^\vee$. Seien $v \in \sigma$ und $v' \in \sigma'$. Dann gilt

$$\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle \geq 0$$

und damit $u \in (\sigma + \sigma')^\vee$.
Ist umgekehrt $u \in (\sigma + \sigma')^\vee$ und ist $v \in \sigma$ beliebig, so gilt wegen $0 \in \sigma'$ natürlich schon $v \in \sigma + \sigma'$ und damit $\langle u, v \rangle \geq 0$. Analog zeigt man dann $\langle u, v' \rangle \geq 0$ für alle $v' \in \sigma'$.
Induktiv gilt die Gleichheit dann für eine beliebige endliche Menge von Kegeln, sodass wir das Resultat auf unsere Situation anwenden können. Es gilt also

$$\sigma^\vee = \bigcap_{\rho \leq \sigma \text{ Kante}} Cone(u_\rho)^\vee = \Big(\sum_{\rho \leq \sigma \text{ Kante}} Cone(u_\rho)\Big)^\vee.$$

Gehen wir nun wieder zum dualen Kegel über, so erhalten wir

$$\sigma = (\sigma^\vee)^\vee = \sum_{\rho \leq \sigma \text{ Kante}} Cone(u_\rho),$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die Vektoren u_ρ den Kegel σ erzeugen. ☐

Definition 3.13. *Sei Y ein Monoid. Ein Element $m \in Y \setminus \{0\}$ heißt irreduzibel, falls gilt: Sind $m', m'' \in Y$ mit $m = m' + m''$, so gilt $m' = 0$ oder $m'' = 0$.*

Proposition 3.14. *Sei $\sigma \subseteq V$ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel mit $dim(\sigma) = dim(V)$. Sei $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ das zugehörige Monoid. Dann besitzt die Menge*

$$\mathscr{H} := \{m \in S_\sigma \mid m \text{ ist irreduzibel }\}$$

die folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathscr{H}$ ist endlich und erzeugt S_σ als Monoid.

(ii) $\mathscr{H}$ enthält die Strahlenerzeuger der Kanten von $\sigma^\vee$.

(iii) $\mathscr{H}$ ist ein bezüglich Inklusion minimales Erzeugendensystem von S_σ.

Beweis. Im Beweis von (i) folgen wir [CLS11], Beweis von Proposition 1.2.22 (i).
Wegen $dim(\sigma) = dim(V)$ ist $\sigma^\vee$ nach 2.31 streng konvex. Daher ist nach der Proposition 2.31 $\{0\} \leq \sigma^\vee$ eine Seite, d. h. es existiert nach Prop. 3.9 ein $u \in \sigma \cap N \setminus \{0\}$ mit $\langle m, u\rangle \in \mathbb{N}$ für alle $m \in S_\sigma$ und $\langle m, u\rangle = 0$ genau dann, wenn $m = 0$ gilt. Sei nun $m \in S_\sigma$ reduzibel. Dann existieren $m', m'' \in S_\sigma \setminus \{0\}$ mit $m = m' + m''$. Es folgt

$$\langle m, u\rangle = \langle m', u\rangle + \langle m'', u\rangle,$$

wobei $\langle m', u\rangle, \langle m'', u\rangle \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt, sodass

$$\langle m', u\rangle < \langle m, u\rangle \text{ und } \langle m'', u\rangle < \langle m, u\rangle.$$

Ist nun m' oder m'' reduzibel, so können wir dasselbe Argument erneut durchführen. Dieser Prozess endet nach endlich vielen Schritten, sodass wir induktiv erhalten, dass jedes Element aus S_σ die Summe zweier irreduzibler Elemente ist, d. h. $\mathscr{H}$ erzeugt S_σ.
Da σ polyedrisch ist, ist $\sigma^\vee$ polyedrisch nach dem Beweis von 3.7. Wählen wir nun eine endliche Menge von Erzeugern von $\sigma^\vee$ in M, so ist jedes $m \in \mathscr{H}$ eine endliche Summe von Elementen aus dieser erzeugenden Menge. Da nun aber jedes $m \in \mathscr{H}$ irreduzibel ist, muss es selbst schon in dieser Menge enthalten sein. Damit ist die Menge $\mathscr{H}$ endlich. Dies zeigt (i).
Für den Beweis von (ii) sei ρ eine Kante von $\sigma^\vee$. Bezeichne mit $u_\rho \in \rho \cap M$ den eindeutigen Strahlenerzeuger von ρ. Seien $m', m'' \in S_\sigma$ mit $u_\rho = m' + m''$. Da ρ eine Seite von $\sigma^\vee$ ist, gilt dann $m', m'' \in \rho$ nach Lemma 2.15. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ mit

$$m' = u_\rho - m'' = k \cdot u_\rho.$$

Daraus folgt sofort $m'' = (1-k) \cdot u_\rho$. Wegen $m'' \in \mathbb{N} \cdot u_\rho$ gilt dann $k = 0$ oder $k = 1$ und damit $m' = 0$ oder $m'' = 0$. Dies zeigt, dass die Strahlenerzeuger der Kanten irreduzibel sind.
Schließlich ist (iii) zu zeigen: Ist $m \in S_\sigma$ ein beliebiges irreduzibles Element, so muss es wie im Beweis von (i) gesehen in jedem Erzeugendensystem von S_σ enthalten sein. Daher ist keine echte Teilmenge von $\mathscr{H}$ ein Erzeugendensystem von S_σ. □

Die Menge $\mathscr{H}$ in obiger Proposition wird auch die Hilbertbasis des Monoids S_σ genannt. Sie wird sich vor allem in Beispielen als besonders nützlich erweisen, da man mit ihrer Hilfe schnell an eine Erzeugendenmenge gelangt.

Ist N ein Gitter, V der zugehörige $\mathbb{R}$-Vektorraum und ist $\sigma \subseteq V$ ein rationaler polyedrischer Kegel, so haben wir gesehen, dass die Menge $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ ein endlich erzeugtes kommutatives Monoid ist. Sei nun K ein Körper. Wie in Kapitel 1 erhalten wir dann den Monoidring $K[S_\sigma]$, welcher eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra ist. Als K-Vektorraum besitzt er die Basis $\{\chi^u\}_{u \in S_\sigma}$, und für Elemente $u, u' \in S_\sigma$ gilt

$$\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}$$

nach Definition der Multiplikation auf $K[S_\sigma]$. Sind $\{u_i\}_i$ Erzeuger des Monoids S_σ, so sind $\{\chi^{u_i}\}_i$ Erzeuger der K-Algebra $K[S_\sigma]$. Ist $\tau \leq \sigma$ eine Seite, so ist

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \subseteq \tau^\vee \cap M = S_\tau$$

ein Untermonoid. Aufgrund der Funktorialität von $K[\cdot]$ ist dann

$$K[S_\sigma] \subseteq K[S_\tau]$$

eine K-Unteralgebra und beide sind nach Gordan's Lemma K-Algebren von endlichem Typ. Die Inklusion induziert einen Morphismus affiner K-Schemata

$$\varphi_{\tau\sigma} : Spec(K[S_\tau]) \to Spec(K[S_\sigma]).$$

Korollar 3.15. *Der Morphismus*

$$Spec(K[S_\tau]) \xrightarrow{\varphi_{\tau\sigma}} Spec(K[S_\sigma])$$

ist eine offene Immersion auf eine prinzipale offene Menge in $Spec(K[S_\sigma])$.

Beweis. Wähle $u \in S_\sigma$ mit $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Nach Proposition 3.9 gilt dann

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-u).$$

Es folgt, dass jedes Basiselement in $K[S_\tau]$ in der Form

$$\chi^{w-pu} = \frac{\chi^w}{(\chi^u)^p}$$

für gewisse $w \in S_\sigma$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geschrieben werden kann. Damit ist der Unterring $K[S_\tau]$ des Integritätsbereichs $K[M] \cong K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]$ die Lokalisierung von $K[S_\sigma]$ an χ^u, d. h. es gilt

$$K[S_\tau] = K[S_\sigma]_{\chi^u}$$

und damit

$$Spec(K[S_\tau]) = Spec(K[S_\sigma]_{\chi^u}) \cong D(\chi^u) \subseteq Spec(K[S_\sigma]).$$

□

Definition 3.16. *Ist σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel, so heißt das affine Schema $X_\sigma = Spec(K[S_\sigma])$ die zu dem Kegel σ assoziierte affine torische Varietät.*

Bemerkung 3.17. *Natürlich kann das K-Schema X_σ für jeden konvexen Kegel $\sigma \subseteq N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ definiert werden. Die Zusatzbedingungen an σ stellen lediglich sicher, dass es sich um eine torische Varietät in einem allgemeineren Sinne handelt (vgl. Def. 5.3 und die daran anschließenden Bemerkungen).*

3.2 Torische Varietäten von Fächern

Für Mengen von Kegeln, die gewisse Zusatzeigenschaften erfüllen, hat man nun die Möglichkeit, die zugehörigen affinen torischen Varietäten miteinander zu verkleben und ein neues Schema zu erhalten, das von diesen affinen Varietäten überdeckt wird. Hierzu ist der Begriff des Fächers nützlich:

Definition 3.18. *(Fächer)*
Ein Fächer Δ im Vektorraum $V = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ ist eine endliche Menge von streng konvexen rationalen polyedrischen Kegeln in V, so dass gilt:

(i) Ist $\sigma \in \Delta$ ein Kegel und $\tau \leq \sigma$ eine Seite, so gilt auch $\tau \in \Delta$.

(ii) Sind $\sigma, \sigma' \in \Delta$, so ist $\sigma \cap \sigma'$ eine Seite von σ und σ'.

Bemerkung 3.19. *Jeder streng konvexe rationale polyedrische Kegel σ definiert einen Fächer Δ, der aus σ zusammen mit all seinen Seiten besteht.*

Haben wir nun einen Fächer Δ gegeben, so erhalten wir nach Korollar 3.15 für je zwei Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$ offene Immersionen

$$X_{\sigma\cap\sigma'} \hookrightarrow X_\sigma \text{ und } X_{\sigma\cap\sigma'} \hookrightarrow X_{\sigma'}.$$

Dies liefert Verklebungsdaten

$$(X_\sigma, X_{\sigma\cap\sigma'} \overset{\phi_{(\sigma\cap\sigma')\sigma}}{\longrightarrow} X_\sigma)_{\sigma,\sigma'\in\Delta},$$

die trivialerweise die Voraussetzungen des Verklebungssatzes für Schemata erfüllen, denn für zwei Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$ mit gemeinsamer Seite $\tau := \sigma \cap \sigma' = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap (-u)^\perp$ (vgl. 2.29) gilt

$$K[S_\sigma]_{\chi^u} = K[S_\tau] = K[S_{\sigma'}]_{\chi^{-u}}$$

als Unterringe von $K[M]$ und daher sind

$$Spec(K[S_\sigma]_{\chi^u}) = X_{\sigma\cap\sigma'} \hookrightarrow X_\sigma$$

und

$$Spec(K[S_{\sigma'}]_{\chi^{-u}}) = X_{\sigma'\cap\sigma} \hookrightarrow X_{\sigma'}$$

dieselben affinen Schemata, sodass die Isomorphismen zwischen den offenen Unterschemata durch Identitäten gegeben sind.
Damit verkleben die affinen Schemata $(X_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$ zu einem Schema X_Δ, welches wir eine torische Varietät nennen.

4 Beispiele

Im vorherigen Kapitel haben wir erarbeitet, wie man zu einem konvexen Kegel σ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, der von endlich vielen Elementen des Gitters N erzeugt wird, das affine Schema

$$X_\sigma = Spec(K[S_\sigma])$$

assoziiert. Schematisch sieht das wie folgt aus:

$$\begin{gathered}\text{Kegel } \sigma \to \text{dualer Kegel } \sigma^\vee \to \text{Untermonoid } S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \to \\ \to \text{Monoidring } K[S_\sigma] \to \text{affines Schema } X_\sigma = Spec(K[S_\sigma]).\end{gathered}$$

In diesem Kapitel werden einige Beispiele für affine torische Varietäten erarbeitet, um dann mithilfe des Verklebungssatzes für Schemata einige Beispiele torischer Varietäten nachzurechnen, die nicht affin sind, wie den sogenannten gewichteten projektiven Raum.

4.1 Affine Beispiele

Beispiel 4.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $N := \mathbb{Z}^n$ mit Standardbasis $e_1, ..., e_n$ und $V = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Sei $M := Hom(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ das duale Gitter. Betrachte den Kegel $\sigma = \{0\} \subseteq V$. Er ist polyedrisch, rational und streng konvex. Nach der Charakterisierung strenger Konvexität in Proposition 2.31 ist σ Seite jedes streng konvexen Kegels in V. Wir wollen nun das zugehörige affine Schema bestimmen. Wieder nach Proposition 2.31 gilt*

$$\sigma^\vee = V^*$$

und daher ist

$$S_\sigma = M,$$

d. h. S_σ *wird als Monoid über* $\mathbb{N}$ *erzeugt von der Menge*

$$\{\pm e_i^*\}_{i=1,...,n},$$

wobei $e_i^* \in M$ *den i-ten Einheitsvektor bezeichnet, den wir im Folgenden wieder der Einfachheit halber mit* e_i *bezeichnen, wenn klar ist, in welchem Gitter wir uns befinden.*
Damit wird $K[S_\sigma]$ *als Monoidring erzeugt von den zugehörigen charakteristischen Funktionen*

$$\{\chi^{\pm e_i}\}_{i=1,...,n}.$$

Wie wir in Beispiel 2.1 (ii) gesehen haben, gilt dann

$$K[S_\sigma] \cong K[t_1, t_1^{-1}, ..., t_n, t_n^{-1}]$$

mit der Identifikation $\chi^{e_i} \leftrightarrow t_i$*, d. h. der Monoidring* $K[S_\sigma]$ *ist isomorph zum Ring der Laurent-Polynome in den Variablen* $t_1, ..., t_n$ *über* K*.*
Beachte nun, dass wir diesen Ring auch als Lokalisierung des üblichen Polynomrings auffassen können:

$$K[t_1, t_1^{-1}, ..., t_n, t_n^{-1}] \cong K[t_1, ..., t_n]_{t_1 \cdot ... \cdot t_n}.$$

Damit gilt:

$$X_\sigma = Spec(K[S_\sigma]) \cong D(t_1 \cdot ... \cdot t_n) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

als prinzipale offene Teilmenge des affinen n-dimensionalen Raumes, der durch

$$\mathbb{A}_K^n = Spec(K[t_1, ..., t_n])$$

definiert ist. Wegen $D(t_1 \cdot ... \cdot t_n) = \bigcap_{i=1}^n D(t_i)$ *erhalten wir auf dem Level der K-rationalen Punkte*

$$X_{\{0\}}(K) = (K^\times)^n,$$

d. h. $X_{\{0\}}$ *hat geometrisch die Form eines Torus. Dies führt zu folgender Definition:*

Definition 4.2. *(Torus)*
Die affine torische Varietät $\mathbb{T} := X_{\{0\}} = Spec(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ *heißt n-dimensionaler Torus über* K*.*

Beispiel 4.3. *Seien* $r, n \in \mathbb{N}$ *mit* $r \leq n$, $N := \mathbb{Z}^n$ *und* $V := N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$*. Sei weiter* $\sigma = Cone(e_1, ..., e_r)$ *der von den ersten r Einheitsvektoren erzeugte Kegel. Dann ist das orthogonale Komplement von* σ *in* $V \cong V^*$ *gegeben durch*

$$W = span_\mathbb{R}(e_{r+1}, ..., e_n),$$

wobei der Isomorphismus $V \cong V^*$ *das kanonische Skalarprodukt verwendet. Die Facetten von* σ *sind durch Kegel gegeben, die von* $r-1$ *Vektoren der Erzeuger von* σ *erzeugt werden. Eine Facette, die von allen bis auf den i-ten Vektor erzeugt wird, ist genau durch* $\sigma \cap e_i^\perp$ *gegeben, wobei natürlich* $e_i \in \sigma^\vee$ *gilt.*
Nach dem Beweis des Lemmas von Farkas 2.26 wird daher der duale Kegel $\sigma^\vee$ *erzeugt von den Vektoren*

$$e_1, ..., e_r, \pm e_{r+1}, ..., \pm e_n.$$

Betrachten wir den Kegel σ im (kleineren) Vektorraum $V' := N'_{\mathbb{R}}$ mit $N' := \mathbb{Z}^r$, so liefern uns die Kantenerzeuger $e_1, ..., e_r$ genau die Hilbertbasis von S_σ, denn jeder Vektor, der kein Vielfaches eines Einheitsvektors ist, lässt sich als Summe von (mindestens) zwei der Einheitsvektoren schreiben und ist daher nicht irreduzibel. In den restlichen $n - r$ Dimensionen ist das Monoid hingegen das gesamte Gitter, wird also von den Vektoren $\pm e_{r+1}, ..., \pm e_n$ erzeugt, sodass wir insgesamt das minimale Erzeugendensystem von S_σ erhalten, und somit gilt

$$S_\sigma = span_{\mathbb{N}}(e_1, ..., e_r, \pm e_{r+1}, ..., \pm e_n).$$

Mit $t_i := \chi^{e_i}$ erhalten wir für die Monoidalgebra

$$K[S_\sigma] \cong K[t_1, ..., t_r, t_{r+1}^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}] \cong K[t_1, ..., t_r] \otimes_K K[t_{r+1}^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}].$$

Das zum Kegel σ assoziierte K-Schema ist also gegeben durch

$$X_\sigma \cong \mathbb{A}_K^r \times_K (\mathbb{G}_m)^{n-r},$$

wobei $\mathbb{G}_m := Spec(K[t^{\pm 1}]) = D(t) \subseteq \mathbb{A}_K^1$ die sogenannte multiplikative Gruppe im Sinne der algebraischen Geometrie bezeichnet. Auf dieses Objekt gehen wir ausführlich in Kapitel 5 ein.

Beispiel 4.4. *Sei $N = \mathbb{Z}^2$ und sei $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ der Kegel, der von den Vektoren e_2 und $2e_1 - e_2$ erzeugt wird. Die Facetten von σ sind genau die nicht-negativen Halbgeraden, die von je einem Erzeuger aufgespannt werden.*
Nach dem Farkaslemma 2.26 wird der duale Kegel $\sigma^\vee$ von den zu den Facetten orthogonalen Vektoren erzeugt, die in $\sigma^\vee$ liegen, d.h. von den Vektoren e_1 und $e_1 + 2e_2$. Diese Elemente sind nach Proposition 3.14 Teil der Hilbertbasis. Man sieht leicht, dass der Vektor $e_1 + e_2$ das einzige weitere irreduzible Element in $\sigma^\vee \cap M$ ist, sodass das Monoid $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ genau von den Vektoren $e_1, e_1 + 2e_2, e_1 + e_2$ erzeugt wird, die nun die Hilbertbasis von S_σ bilden. Daher wird die Monoidalgebra von den charakteristischen Funktionen dieser Vektoren erzeugt. Indem wir $x := \chi^{e_1}$ und $y := \chi^{e_2}$ setzen, erhalten wir

$$K[S_\sigma] = K[x, xy, xy^2]$$

als Unterring des Polynomrings $K[x, y]$. Wir behaupten, es gilt

$$K[x, xy, xy^2] \cong K[u, v, w]/(v^2 - uw).$$

Dazu betrachten wir den surjektiven K-linearen Ringhom.

$$\varphi : K[u, v, w] \to K[x, xy, xy^2],$$

der gegeben ist durch $u \mapsto x$, $v \mapsto xy$ und $w \mapsto xy^2$. Offenbar gilt $(v^2 - uw) \subseteq ker(\varphi)$. Wir wollen zeigen, dass auch die umgekehrte Inklusion erfüllt ist, dann sind wir fertig.
Sei dazu $f = f(u, v, w) \in ker(\varphi)$, d. h. es gilt $f(x, xy, xy^2) = 0$ in $K[x, y]$.
Betrachte den K-linearen Ringhomomorphismus

$$K[x, y] \to K[s, s^{-1}, t],$$

der gegeben ist durch $x \mapsto s^2$ und $y \mapsto \frac{t}{s}$. Er schränkt sich ein zum Ringhomomorphismus

$$K[x, xy, xy^2] \to K[s^2, t^2, st]$$

und bildet $0 = f(x, xy, xy^2)$ *auf* $0 = f(s^2, st, t^2)$ *ab.*
Betrachte schließlich den K*-linearen Ringhomomorphismus*

$$\psi : K[u, v, w] \to K[s^2, t^2, st],$$

der durch $u \mapsto s^2$, $v \mapsto st$, $w \mapsto t^2$ *gegeben ist.*
Wir behaupten, es gilt $ker(\psi) = (v^2 - uw) =: I$, *und* ψ *ist ein graduierter Ringhomomorphismus graduierter Ringe. Dazu versehen wir den Ring* $R := K[u, v, w]$ *mit der gewöhnlichen Graduierung nach dem Grad, sodass* $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ *zu einem graduierten Ring wird.*
Analog versehen wir den Ring $S := \bar{K}[s, t]$ *mit der üblichen Graduierung und erhalten wieder einen graduierten Ring* $S = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$. *Nun betrachten wir den zweiten Veronese Unterring von* S, *der definiert ist durch* $S^{(2)} := \bigoplus_{n\geq 0} S_{2n}$, *und mit diesen Bezeichnungen sehen wir, dass* $S^{(2)} = K[s^2, t^2, st]$ *gilt:*
Sei dazu $p \in S^{(2)}$ *homogen vom Grad* n, *d. h.*

$$p = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_i s^i t^{2n-i}$$

für gewisse $\lambda_i \in K$. *Dann gilt*

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i s^i t^i t^{2(n-i)} + \sum_{i=n+1}^{2n} \lambda_i s^{2(i-n)} s^{2n-i} t^{2n-i} \in K[s^2, st, t^2].$$

Die umgekehrte Inklusion ist klar. Damit ist $\psi : K[u, v, w] \to K[s^2, t^2, st]$ *surjektiv und graduiert vom Grad 1.*
Im nächsten Schritt behaupten wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$dim_K(K[s^2, st, t^2]_n) = dim_K(K[u, v, w]_n/((uw - v^2)K[u, v, w])_n)$$

gilt. $K[s^2, st, t^2]_n$ *besitzt die* K*-Basis* $\{s^i t^{2n-i}\}_{i=0,...,2n}$ *und hat daher Dimension* $2n+1$ *über* K.
$K[u, v, w]_n$ *hat Dimension* $\binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{n}$, *da man für die Basiselemente* n *mal mit Zurücklegen aus der Menge* $\{u, v, w\}$ *wählen kann.*
$(uw - v^2)K[u, v, w]_n$ *hat Dimension* $\binom{n}{n-2}$, *da es* K*-linear isomorph ist zu* $K[u, v, w]_{n-2}$.
Damit ist die Dimensionsformel gezeigt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n+2}{n} - \binom{n}{n-2} &= \binom{n+2}{2} - \binom{n}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2 - n^2 + n}{2} \\
&= \frac{4n+2}{2} \\
&= 2n + 1.
\end{aligned}$$

Der graduierte Ringhomomorphismus graduierter Ringe $\psi : K[u, v, w] \to K[s^2, st, t^2]$ *schränkt sich für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ein zu einer* K*-linearen Abbildung*

$$\psi_n : K[u, v, w]_n \to K[s^2, st, t^2]_n.$$

Zusammen mit ψ ist sie surjektiv, und wegen $\psi(uw - v^2) = 0$ gilt $I_n \subseteq ker(\psi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Gleichheit der Dimensionen von oben folgt dann $I_n = ker(\psi_n)$ und wir erhalten einen graduierten Isomorphismus graduierter Ringe

$$\widetilde{\psi} : K[u,v,w]/(v^2 - uw) \xrightarrow{\cong} K[s^2, st, t^2].$$

Damit gilt insgesamt $f \equiv 0$ in $K[u,v,w]/(v^2 - uw)$ und daher $f \in (v^2 - uw)$.
Insgesamt ist daher $X_\sigma \cong Spec(K[u,v,w]/(v^2 - uw))$, das man als abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}^3_K$ auffassen kann. Anschaulich ist das die Oberfläche eines Doppelkegels mit Spitze in 0.

4.2 Der gewichtete projektive Raum

Beispiel 4.5. *(der Fall $n = 2$)*
Sei $N = \mathbb{Z}^2$ mit Standardbasis $\{e_1, e_2\}$. Betrachte den Fächer Δ, der von den Kegeln

$$\begin{aligned} \sigma_0 &:= Cone(e_1, e_2) \\ \sigma_1 &:= Cone(-e_1 - e_2, e_2) \\ \sigma_2 &:= Cone(-e_1 - e_2, e_1) \end{aligned}$$

erzeugt wird, d. h. Δ besteht aus den Kegeln $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ zusammen mit den Seiten aller Kegel und den Schnitten von jeweils zwei der Kegel.
Neben den 2-dimensionalen Kegeln $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ und ihren Seiten enthält Δ also noch die Strahlen $\tau_{ij} := \sigma_i \cap \sigma_j$ für $i, j = 0, 1, 2$, $i \neq j$. Die torische Varietät X_Δ wird von den affinen offenen Unterschemata $X_{\sigma_0}, X_{\sigma_1}$ und X_{σ_2} überdeckt, da die zugehörigen Kegel die bezüglich Inklusion maximalen Kegel des Fächers sind, und nach dem bisher Gezeigten die Seiten der Kegel zu offenen Unterschemata gehören.
Die zugehörigen dualen Kegel bestimmt man mit den Methoden im Beweis von Farkas Lemma 2.26 zu

$$\begin{aligned} \sigma_0^\vee &= Cone(e_1, e_2), \\ \sigma_1^\vee &= Cone(-e_1, -e_1 + e_2), \\ \sigma_2^\vee &= Cone(e_1 - e_2, -e_2), \end{aligned}$$

sodass mit den Bezeichnungen $x := \chi^{e_1}$ und $y := \chi^{e_2}$ die zugehörigen Monoidringe gegeben sind durch

$$\begin{aligned} K[S_{\sigma_0}] &= K[x, y], \\ K[S_{\sigma_1}] &= K[x^{-1}, x^{-1}y], \\ K[S_{\sigma_2}] &= K[xy^{-1}, y^{-1}]. \end{aligned}$$

Auf dem Level der affinen Schemata erhalten wir also

$$\begin{aligned} X_{\sigma_0} &= Spec(K[S_{\sigma_0}]) = Spec(K[x, y]), \\ X_{\sigma_1} &= Spec(K[S_{\sigma_1}]) = Spec(K[x^{-1}, x^{-1}y]), \\ X_{\sigma_2} &= Spec(K[S_{\sigma_2}]) = Spec(K[xy^{-1}, y^{-1}]). \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Art der Verklebung genauer verstehen. Wir wissen, dass die Schemata entlang der gemeinsamen Seiten miteinander verklebt werden. Um diesen Prozess zu analysieren, machen *wir uns den Trennungssatz 2.29 aus Kapitel 2 zunutze und erhalten*

$$\begin{aligned}
\tau_{10} &= \sigma_0 \cap \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_2 = \sigma_0 \cap e_1^{\perp} = \sigma_1 \cap (-e_1)^{\perp},\\
\tau_{20} &= \sigma_0 \cap \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e_1 = \sigma_0 \cap e_2^{\perp} = \sigma_2 \cap (-e_2)^{\perp},\\
\tau_{21} &= \sigma_2 \cap \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (-e_1 - e_2) = \sigma_1 \cap (-e_1 + e_2)^{\perp} = \sigma_2 \cap (e_1 - e_2)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Auf dem Level der K-Algebren schreibt sich dies als

$$\begin{aligned}
K[S_{\tau_{10}}] &= K[x, y]_x = K[x^{-1}, x^{-1}y]_{x^{-1}},\\
K[S_{\tau_{20}}] &= K[x, y]_y = K[xy^{-1}, y^{-1}]_{y^{-1}},\\
K[S_{\tau_{21}}] &= K[x^{-1}, x^{-1}y]_{x^{-1}y} = K[xy^{-1}, y^{-1}]_{xy^{-1}},
\end{aligned}$$

und die zugehörigen Schemata sind in der Tat offene Unterschemata.
Wählen wir nun die Variablentransformation $x := \frac{x_1}{x_0}$, $y := \frac{x_2}{x_0}$, so sehen wir, dass das resultierende Schema gerade der 2-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_K^2$ ist, d. h. wir haben $\mathbb{P}_K^2 \cong X_\Delta$ als torische Varietät konstruiert.

Beispiel 4.6. *(der allgemeine Fall)*
Wir wollen Beispiel 4.5 auf beliebige Dimensionen $n \geq 1$ verallgemeinern.
Sei also $1 \leq n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und sei $N := \mathbb{Z}^n$ der freie $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n. Sei $V := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ und bezeichne mit $e_1, ..., e_n$ die Standardeinheitsvektoren in $N \subseteq V$. Wir setzen

$$e_0 := -e_1 - e_2 - ... - e_n$$

und definieren Δ als den Fächer, der aus allen Kegeln besteht, die von echten Teilmengen der Vektoren $e_0, e_1, ..., e_n$ erzeugt werden. Es ist klar, dass Δ wirklich ein Fächer ist, denn alle Seiten und Schnitte von Seiten der Kegel werden wieder von echten Teilmengen der $e_0, ..., e_n$ erzeugt.
Wie im Beispiel oben wird die zusammengeklebte torische Varietät X_Δ von den bezüglich Inklusion maximalen Kegeln überdeckt, d. h. von den Kegeln, die von n der $n+1$ Vektoren aufgespannt werden. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &:= Cone(e_1, ..., e_n),\\
\sigma_i &:= Cone(e_0, e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n) \text{ für } 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Dann sind die zugehörigen dualen Kegel gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{\vee} &= Cone(e_1, ..., e_n),\\
\sigma_i^{\vee} &= Cone(-e_i, -e_i + e_1, ..., -e_i + e_{i-1}, -e_i + e_{i+1}, ..., -e_i + e_n) \text{ für } 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Für die zugehörigen Monoidringe gilt dann mit der Bezeichnung $t_i := \chi^{e_i}$:

$$\begin{aligned}
K[S_{\sigma_0}] &= K[t_1, ..., t_n],\\
K[S_{\sigma_i}] &= K[t_i^{-1}, t_i^{-1}t_1, ..., t_i^{-1}t_n] \text{ für } 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Die Schnitte der Kegel sind

$$\begin{aligned}
\tau_{0i} &:= \sigma_0 \cap \sigma_i = Cone(e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n) \text{ für } 1 \leq i \leq n,\\
\tau_{ij} &:= \sigma_i \cap \sigma_j = Cone(e_1, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_{j-1}, e_{j+1}, ..., e_n) \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Hilfreich, um den Verklebungsprozess zu verstehen, ist wieder die Darstellung

$$\tau_{0i} = \sigma_0 \cap (e_i)^\perp = \sigma_i \cap (-e_i)^\perp \text{ für } 1 \le i \le n,$$
$$\tau_{ij} = \sigma_i \cap (-e_i + e_j)^\perp = \sigma_j \cap (-e_j + e_i)^\perp \text{ für } 1 \le i < j \le n.$$

Die zugehörigen Monoidringe sind also gegeben durch

$$K[S_{\tau_{0i}}] = K[t_1, ..., t_n]_{t_i} = K[t_i^{-1}, t_i^{-1}t_1, ..., t_i^{-1}t_n]_{t_i^{-1}} \text{ für } 1 \le i \le n,$$
$$K[S_{\tau_{ij}}] = K[t_i^{-1}, t_i^{-1}t_1, ..., t_i^{-1}t_n]_{t_i^{-1}t_j} = K[t_j^{-1}, t_j^{-1}t_1, ..., t_j^{-1}t_n]_{t_j^{-1}t_i} \text{ für } 1 \le i < j \le n.$$

Nun setzen wir analog zum 2-dimensionalen Fall $t_i := \frac{x_i}{x_0}$ *und erhalten den* n*-dimensionalen projektiven Raum* $\mathbb{P}^n_K$.

Beispiel 4.7. *Es geht noch allgemeiner:*
Sei $n \in \mathbb{N}$ *und seien* $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Sei* $R = K[x_0, ..., x_n]$ *der Polynomring in* $n+1$ *Variablen, versehen mit der Graduierung, die durch* $deg(x_i) = a_i$ *bestimmt ist. Dann ist* $R = \bigoplus_{k\ge 0} R_k$ *ein graduierter Ring. Setze* $\mathbb{P}_K(a_0, ..., a_n) := Proj(R)$. *Nach der* $Proj$*-Konstruktion des projektiven Raumes gilt z. B.* $\mathbb{P}_K(1, ..., 1) = \mathbb{P}^n_K$.
Es gelte $ggT(a_0, ..., a_n) = 1$. *Setze* $N := \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z} \cdot (a_0, ..., a_n)$, *wobei wir die Standardeinheitsvektoren in* $\mathbb{Z}^{n+1}$ *mit* $e_0, ..., e_n$ *bezeichnen. Wegen* $ggT(a_0, ..., a_n) = 1$ *ist der* $\mathbb{Z}$*-Modul* $N = \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z} \cdot (a_0, ..., a_n)$ *torsionsfrei. Aus dem Elementarteilersatz folgt daher, dass* N *frei vom Rang* n *ist. Setze nun* $\overline{e_i} := e_i + \mathbb{Z} \cdot (a_0, ..., a_n)$ *für* $0 \le i \le n$, *und sei* Δ *der Fächer, dessen Kegel von echten Teilmengen der Vektoren* $\overline{e_i}$, $0 \le i \le n$, *erzeugt werden. Dann gilt* $X_\Delta \cong \mathbb{P}_K(a_0, ..., a_n)$ *(ohne Beweis).*
Den Spezialfall $a_0 = ... = a_n = 1$ *haben wir im vorherigen Beispiel behandelt, denn über den Isomorphismus* $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z} \cdot (1, ..., 1) \cong \mathbb{Z}^n$ *mit* $\overline{e_i} \mapsto e_i$ *entsprechen die Vektoren* $\overline{e_0}, ..., \overline{e_n}$ *genau den Vektoren* $e_0, ..., e_n$, *und für die von echten Teilmengen dieser Vektoren erzeugte torische Varietät* X_Δ *haben wir gerade* $X_\Delta \cong \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}_K(1, ..., 1)$ *gezeigt. Dieses Beispiel stellt also in der Tat eine Verallgemeinerung des vorigen Beispiels dar.*

5 Die Torusoperation

5.1 Die Gruppe $\mathbb{T}(R)$

Erinnerung: Für einen Körper K und $n \ge 1$ heißt das affine Schema

$$\mathbb{T} := Spec(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]) \cong \mathbb{G}_m \times_K ... \times_K \mathbb{G}_m = (\mathbb{G}_m)^n$$

n-dimensionaler Torus über K, wobei wieder

$$\mathbb{G}_m := Spec(K[t^{\pm 1}]) = D(t) \subseteq \mathbb{A}^1_K$$

die multiplikative Gruppe bezeichnet.
Für jede K-Algebra R gilt funktoriell

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(R) := Hom_{K-Schemata}(Spec(R), \mathbb{T}) &\cong Hom_{K-Algebren}(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}], R) \\ &\cong R^\times \times ... \times R^\times,\end{aligned}$$

wobei die erste Bijektion gerade die Dualität zwischen affinen K-Schemata und K-Algebren ist, und die letzte Bijektion durch

$$\phi \mapsto (\phi(t_1), ..., \phi(t_n))$$

gegeben ist.
Die Menge $R^\times \times ... \times R^\times$ ist eine Gruppe bezüglich komponentenweiser Multiplikation. Auch die linke Seite besitzt eine natürliche Gruppenstruktur, für die die obige Bijektion ein Gruppenisomorphismus ist: Definiere den Morphismus von K-Schemata

$$\mu : \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

durch den K-linearen Ringhomomorphismus

$$\chi : K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}] \to K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}] \otimes_K K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}], t_i \mapsto t_i \otimes t_i.$$

Der K-Morphismus μ macht die Menge $\mathbb{T}(R)$ zu einer Gruppe, indem man die Verknüpfung auf $\mathbb{T}(R)$ wie folgt definiert:
Sind $f_1, f_2 \in \mathbb{T}(R)$, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Spec(R) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \mathbb{T} \arrow[d, "can"] \\
\mathbb{T} \arrow[r, "can"] & Spec(K)
\end{tikzcd}$$

Mit der universellen Eigenschaft des Faserproduktes erhalten wir einen eindeutigen Morphismus von K-Schemata

$$f_1 \times f_2 : Spec(R) \to \mathbb{T} \times_K \mathbb{T},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Spec(R) \arrow[dr, dashed, "\exists! f_1 \times f_2"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \arrow[r, "can"] \arrow[d, "can"'] & \mathbb{T} \arrow[d] \\
& \mathbb{T} \arrow[r] & Spec(K)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Beachte, dass die kanonischen Morphismen $\mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ im obigen Diagramm nicht durch den Morphismus μ, sondern durch die Morphismen, die zu den kanonischen Ringhomomorphismen $t_i \mapsto 1 \otimes t_i$ bzw. $t_i \mapsto t_i \otimes 1$ gehören, gegeben sind!
Nun setzen wir

$$f_1 \cdot f_2 := \mu \circ (f_1 \times f_2) \in \mathbb{T}(R)$$

und erhalten so eine wohldefinierte Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{T}(R) \times \mathbb{T}(R) \to \mathbb{T}(R).$$

Aufgrund der Dualität zwischen affinen K-Schemata und K-Algebren existiert ein zu obigem kommutativen Diagramm duales Diagramm auf dem Level der K-Algebren, das wie folgt entsteht. Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir von nun an $K[t, t^{-1}]$ für $K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]$.
Sind $f_1, f_2 \in \mathbb{T}(R)$ wie oben, so existieren eindeutige Ringhomomorphismen

$$\phi_1, \phi_2 : K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}] \to R$$

von K-Algebren mit $f_1 = Spec(\phi_1)$, $f_2 = Spec(\phi_2)$ sowie ein Ringhomomorphismus

$$\phi_1 \otimes \phi_2 : K[t, t^{-1}] \otimes_K K[t, t^{-1}] \to R,$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R & & \\
& K[t,t^{-1}] \otimes_K K[t,t^{-1}] \arrow[ul, dashed, "\exists! \phi_1 \otimes \phi_2"'] & K[t,t^{-1}] \arrow[l, "\psi_2"] \arrow[ull, bend right, "\phi_2"'] \\
& K[t,t^{-1}] \arrow[u, "\psi_1"'] \arrow[uul, bend left, "\phi_1"] & K \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Hier sind wie oben angemerkt die kanonischen Abbildungen gegeben durch die Ringhomomorphismen

$$\psi_1 : K[t,t^{-1}] \to K[t,t^{-1}] \otimes_K K[t,t^{-1}], t_i \mapsto t_i \otimes 1,$$

und

$$\psi_2 : K[t,t^{-1}] \to K[t,t^{-1}] \otimes_K K[t,t^{-1}], t_i \mapsto 1 \otimes t_i.$$

Das neutrale Element von $\mathbb{T}(R)$, welches wir mit $1_{\mathbb{T}(R)}$ bezeichnen, ist gegeben durch den Ringhomomorphismus

$$e : K[t,t^{-1}] \to R, t_i \mapsto 1,$$

denn: Ist $f = Spec(\phi) \in \mathbb{T}(R)$, so gilt nach Def. der Multiplikation

$$f \cdot 1_{\mathbb{T}(R)} = \mu \circ (f \times 1_{\mathbb{T}(R)}) = Spec((\phi \otimes e) \circ \chi)$$

wobei auf dem Level der Ringhomomorphismen

$$(\phi \otimes e) \circ \chi(t_i) = (\phi \otimes e)(t_i \otimes t_i) = \phi(t_i) \cdot e(t_i) = \phi(t_i),$$

d. h. wir haben

$$(\phi \otimes e) \circ \chi = \phi$$

und damit durch Anwendung des $Spec(\cdot)$-Funktors

$$f \cdot 1_{\mathbb{T}(R)} = Spec((\phi \otimes e) \circ \chi) = Spec(\phi) = f$$

auf dem Level der Morphismen von K-Schemata.
Analog zeigt man $1_{\mathbb{T}(R)} \cdot f = f$, also wird durch $1_{\mathbb{T}(R)}$ in der Tat ein neutrales Element definiert.
Die Verknüpfung ist außerdem assoziativ:
Seien $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{T}(R)$ mit zugehörigen Ringhomomorphismen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3. Analog zur Rechnung mit dem neutralen Element rechnet man nach, dass dann der Morphismus $(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3 \in \mathbb{T}(R)$ gegeben ist durch den Ringhomomorphismus

$$(((\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \chi) \otimes \phi_3) \circ \chi : K[t,t^{-1}] \to R$$

und $f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3) \in \mathbb{T}(R)$ durch

$$(\phi_1 \otimes ((\phi_2 \otimes \phi_3) \circ \chi)) \circ \chi : K[t,t^{-1}] \to R.$$

Durch Einsetzen sieht man schnell, dass beide Abbildungen auf den Variablen gegeben sind durch

$$t_i \mapsto \phi_1(t_i)\phi_2(t_i)\phi_3(t_i).$$

Es gilt also $(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3 = f_1 \cdot (f_2 \cdot f_3)$ in $\mathbb{T}(R)$, sodass die Verknüpfung assoziativ ist.
Es bleibt, zu zeigen, dass jedes Element in $\mathbb{T}(R)$ ein Inverses besitzt. Sei dazu $f \in \mathbb{T}(R)$ mit zugehörigem Ringhomomorphismus ϕ, d. h. es gilt $f = Spec(\phi)$. Definiere

$$\psi : K[t, t^{-1}] \to R, t_i \mapsto \phi(t_i^{-1}) = \phi(t_i)^{-1}$$

und setze $g := Spec(\psi) \in \mathbb{T}(R)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathbb{T}(R)$ gegeben durch

$$(\phi \otimes \psi) \circ \chi : K[t, t^{-1}] \to R,$$

und es gilt

$$(\phi \otimes \psi) \circ \chi(t_i) = (\phi \otimes \psi)(t_i \otimes t_i) = \phi(t_i) \cdot \psi(t_i) = 1_R,$$

also ist

$$(\phi \otimes \psi) \circ \chi = e$$

und damit auf dem Level der K-Schemata

$$f \cdot g = 1_{\mathbb{T}(R)}.$$

Analog gilt dann wieder $g \cdot f = 1_{\mathbb{T}(R)}$, d. h. wir haben das Inverse zu f gefunden.
Die obigen Rechnungen zeigen, dass $(\mathbb{T}(R), \cdot)$ eine Gruppe ist.
Dass die Abbildung

$$\begin{aligned} Hom_{K-Algebren}(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}], R) &\to R^\times \times ... \times R^\times \\ \phi &\mapsto (\phi(t_1), ..., \phi(t_n)) \end{aligned}$$

bijektiv ist, sieht man, indem man explizit die Injektivität und Surjektivität nachweist.
Mit der gerade definierten Gruppenstruktur auf $\mathbb{T}(R)$ wird die Abbildung sogar zu einem Gruppenisomorphismus, denn sie ist verträglich mit den Gruppenstrukturen:
Sind $f = Spec(\phi), g = Spec(\psi) \in \mathbb{T}(R)$, so ist $f \cdot g$ gegeben durch den Ringhom. $(\phi \otimes \psi) \circ \chi$, und dieser erfüllt

$$((\phi \otimes \psi) \circ \chi)(t_i) = (\phi \otimes \psi)(t_i \otimes t_i) = \phi(t_i) \cdot \psi(t_i)$$

und das ist genau das Produkt der i-ten Komponenten der Bilder von ϕ und ψ unter der Abbildung.

5.2 Das Gruppenschema $\mathbb{T}$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass der Torus $\mathbb{T}$ ein sogenanntes Gruppenschema ist.

Definition 5.1. *(Gruppenschema)*
Sei S ein Schema. Ein Gruppenschema über S ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der S-Schemata, d. h. ein S-Schema G zusammen mit Morphismen

$$\begin{aligned} &\mu : G \times_S G \to G \text{ (Multiplikation auf } G) \\ &\varepsilon : S \to G \text{ (neutrales Element)} \\ &\iota : G \to G \text{ (Inversion)} \end{aligned}$$

von S-Schemata, so dass die folgenden üblichen Gruppeneigenschaften erfüllt sind:

(i) $\mu \circ (\mu \times id_G) = \mu \circ (id_G \times \mu)$ *(Assoziativität)*

(ii) $\mu \circ (id_G \times \varepsilon) = \mu \circ (\varepsilon \times id_G) = id_G$ *(ε ist neutrales Element)*

(iii) $\mu \circ (id_G \times \iota) \circ \Delta = \mu \circ (\iota \times id_G) \circ \Delta = e_G$ *(Existenz von Inversen),*

wobei im letzten Punkt der Morphismus $\Delta : G \to G \times_S G$ *die Diagonalabbildung und* e_G *der zusammengesetzte Morphismus* $e_G : G \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\varepsilon} G$ *ist. Außerdem identifizieren wir* $G \times_S S \cong S \times_S G \cong G$.

Um zu zeigen, dass der Torus $\mathbb{T}$ in geeigneter Weise zu einem Gruppenschema über $S = Spec(K)$ wird, geben wir die benötigten Morphismen an:

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \to \mathbb{T} \text{ gegeben durch } \chi : K[t, t^{-1}] &\to K[t, t^{-1}] \otimes_K K[t, t^{-1}] \\ t_i &\mapsto t_i \otimes t_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon : Spec(K) \to \mathbb{T} \text{ gegeben durch } \phi : K[t, t^{-1}] &\to K \\ t_i &\mapsto 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \text{ gegeben durch } \psi : K[t, t^{-1}] &\to K[t, t^{-1}] \\ t_i &\mapsto t_i^{-1}.\end{aligned}$$

Weiter haben wir die Diagonalabbildung

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \text{ gegeben durch } \delta : K[t, t^{-1}] \otimes_K K[t, t^{-1}] &\to K[t, t^{-1}] \\ t_i \otimes t_j &\mapsto t_i \cdot t_j\end{aligned}$$

und schließlich den zusammengesetzten Morphismus

$$\begin{aligned}e_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \text{ gegeben durch } K[t, t^{-1}] &\to K[t, t^{-1}] \\ t_i &\mapsto 1.\end{aligned}$$

Da die Ringhomomorphismen alle explizit auf den Variablen gegeben sind, ist es leicht, die obigen Axiome nachzurechnen: Um die Assoziativität nachzuprüfen, rechnen wir wieder nach, dass die zu den Morphismen gehörigen Ringhomomorphismen gleich sind.
Die Morphismen

$$\mu \circ (\mu \times id_{\mathbb{T}}) \text{ und } \mu \circ (id_{\mathbb{T}} \times \mu)$$

entsprechen den Ringhomomorphismen

$$(\chi \otimes id_{K[t,t^{-1}]}) \circ \chi \text{ und } (id_{K[t,t^{-1}]} \otimes \chi) \circ \chi.$$

Unter beiden Ringhomomorphismen wird $t_i \in K[t, t^{-1}]$ abgebildet auf

$$t_i \otimes t_i \otimes t_i \in K[t, t^{-1}] \otimes_K K[t, t^{-1}] \otimes_K K[t, t^{-1}].$$

Damit ist μ assoziativ.
Für die zweite Eigenschaft beachten wir, dass die Morphismen

$$\mu \circ (id_{\mathbb{T}} \times \varepsilon) \text{ und } \mu \circ (\varepsilon \times id_{\mathbb{T}})$$

zu den Ringhomomorphismen

$$(id_{K[t,t^{-1}]} \otimes \phi) \circ \chi \text{ und } (\phi \otimes id_{K[t,t^{-1}]}) \circ \chi$$

gehören. Es gilt

$$(id \otimes \phi) \circ \chi(t_i) = (id \otimes \phi)(t_i \otimes t_i) = t_i \otimes 1$$

und

$$(\phi \otimes id) \circ \chi(t_i) = (\phi \otimes id)(t_i \otimes t_i) = 1 \otimes t_i.$$

Unter den kanonischen Ringisomorphismen

$$K[t, t^{-1}] \otimes_K K \cong K[t, t^{-1}] \cong K \otimes_K K[t, t^{-1}]$$

entspricht das genau $t_i \in K[t, t^{-1}]$. Somit folgt die zweite Eigenschaft.
Schließlich entsprechen die Morphismen

$$\mu \circ (id_{\mathbb{T}} \times \iota) \circ \Delta \text{ und } \mu \circ (\iota \times id_{\mathbb{T}}) \circ \Delta$$

den Ringhomomorphismen

$$\delta \circ (id_{K[t,t^{-1}]} \otimes \psi) \circ \chi \text{ und } \delta \circ (\psi \otimes id_{K[t,t^{-1}]}) \circ \chi.$$

Unter beiden Ringhom. wird $t_i \in K[t, t^{-1}]$ abgebildet auf

$$t_i \cdot t_i^{-1} = 1 \in K[t, t^{-1}],$$

womit Eigenschaft (iii) folgt.
Wir erhalten, dass $\mathbb{T}$ mit den so definierten Morphismen von Schemata ein Gruppenschema über K ist.

5.3 Die Gruppenoperation auf torischen Varietäten

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie der Torus $\mathbb{T}$ mittels eines Morphismus von Schemata auf einer torischen Varietät operiert. Dabei benutzen wir, dass $\mathbb{T}$, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, die Struktur eines Gruppenschemas über K besitzt. Um die Operation einzuführen, benötigen wir eine allgemeine Definition einer Gruppenoperation auf einem Schema:

Definition 5.2. *(Operation auf einem Schema)*
Seien S ein Schema, X ein S-Schema und $(G, \mu, \varepsilon, \iota)$ ein Gruppenschema über S. Eine Gruppenoperation von G auf X ist gegeben durch einen Morphismus von S-Schemata

$$\eta : G \times_S X \to X,$$

so dass die folgenden formalen Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\eta \circ (id_G \times \eta) = \eta \circ (\mu \times id_X)$ *(Assoziativität)*

(ii) $\eta \circ (\varepsilon \times id_X) = id_X$ *(Identitätseigenschaft)*

Haben wir einen Kegel σ gegeben, so operiert der Torus $\mathbb{T}$ auf der zugehörigen affinen torischen Varietät X_σ über den Morphismus von K-Schemata

$$\mu_\sigma : \mathbb{T} \times_K X_\sigma \to X_\sigma,$$

welcher dem K-linearen Ringhomomorphismus

$$K[S_\sigma] \to K[M] \otimes_K K[S_\sigma] \cong K[M \times S_\sigma]$$

entspricht. Dieser erfüllt $\alpha \mapsto \alpha \otimes \alpha$ für alle $\alpha \in S_\sigma \subseteq K[S_\sigma]^\times$, denn er entsteht per Funktorialität aus dem Homomorphismus

$$S_\sigma \to M \times S_\sigma, \alpha \mapsto (\alpha, \alpha),$$

von Monoiden.
Da wieder alle Morphismen explizit gegeben sind, kann man leicht nachrechnen, dass die obigen formalen Eigenschaften einer Gruppenoperation erfüllt sind.
Sei nun Δ ein Fächer in einem Gitter N. Dann bilden die affinen Schemata $\mathbb{T} \times_K X_\sigma$ mit $\sigma \in \Delta$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{T} \times_K X_\Delta$.

Sind nun $\sigma, \sigma' \in \Delta$, so stimmen die Morphismen μ_σ und $\mu_{\sigma'}$ auf dem Schnitt

$$(\mathbb{T} \times_K X_\sigma) \cap (\mathbb{T} \times_K X_{\sigma'}) = \mathbb{T} \times_K (X_\sigma \cap X_{\sigma'}) = \mathbb{T} \times_K X_{\sigma \cap \sigma'}$$

überein, da sie beide dem Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} K[S_{\sigma\cap\sigma'}] &\to K[M] \otimes_K K[S_{\sigma\cap\sigma'}] \\ S_{\sigma\cap\sigma'} \ni \alpha &\mapsto \alpha \otimes \alpha \end{aligned}$$

entsprechen. Nach dem Verklebungssatz für Morphismen von Schemata verkleben sich die Morphismen $\{\mu_\sigma\}_{\sigma\in\Delta}$ zu einer $\mathbb{T}$-Operation auf der torischen Varietät X_Δ, d. h. zu einem Morphismus

$$\mu_\Delta : \mathbb{T} \times_K X_\Delta \to X_\Delta.$$

von K-Schemata.
Betrachte für $\sigma \in \Delta$ das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} & \xrightarrow{id_{\mathbb{T}} \times \subseteq} & \mathbb{T} \times_K X_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_\sigma} \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\iota_\sigma} & X_\sigma \end{array}$$

Beachte, dass wir an dieser Stelle "$\subseteq$" für den Morphismus $\mathbb{T} \to X_\sigma$ schreiben. Diese Notation erklärt sich wie folgt: Ist $\sigma \subseteq V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ein konvexer rationaler polyedrischer Kegel und $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ (mit $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$), so induziert die Inklusion $S_\sigma \overset{\subseteq}{\to} M$ einen Morphismus $\mathbb{T} = Spec(K[M]) \to X_\sigma = Spec(K[S_\sigma])$. Die Bedeutung der Eigenschaft "streng konvex" überträgt sich dabei wie folgt:

Lemma 5.3. *Ist σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel, so ist der Morphismus $\mathbb{T} \to X_\sigma$ eine offene Immersion, deren Bild eine prinzipale offene Teilmenge des affinen Schemas X_σ ist.*

Beweis. Sei $\mathbb{Z}S_\sigma \subseteq M$ die von S_σ erzeugt Untergruppe. Wir behaupten zunächst, dass $\mathbb{Z}S_\sigma = M$ gilt. Zunächst ist $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ ein torsionsfreier Modul: Ist $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$ für ein $k > 1$ und ein $m \in S_\sigma$, so gilt $km = m_1 - m_2$ für $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Da m_1 und m_2 beide in der konvexen Menge $\sigma^\vee$ liegen, haben wir

$$m + m_2 = \frac{1}{k} m_1 + \frac{k-1}{k} m_2 \in \sigma^\vee.$$

Es folgt $m = (m+m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$, sodass $M/\mathbb{Z}S_\sigma$ torsionsfrei ist. Nach dem Elementarteilersatz existiert ein $\mathbb{Z}$-Untermodul $M' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus \mathbb{Z}S_\sigma$. Das impliziert $V^* = (M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{Z}S_\sigma \otimes \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume. Nun hat aber $\mathbb{Z}S_\sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = span_{\mathbb{R}}(\sigma^\vee \cap M) = span_{\mathbb{R}}(\sigma^\vee)$ die Dimension $dim(V^*)$, da σ streng konvex ist (vgl. Prop. 2.31). Es folgt $M' = 0$ und $\mathbb{Z}S_\sigma = M$. Da das Monoid S_σ nach Gordan's Lemma endlich erzeugt ist, existieren $u_1, ..., u_r \in S_\sigma$ mit $M = \mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u_1) + ... + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-u_r)$. Wie im Beweis von Kor. 3.15 gilt daher $K[M] = K[S_\sigma]_{\chi^{u_1} \cdot ... \cdot \chi^{u_r}}$, und der Morphismus $\mathbb{T} \to X_\sigma$ ist eine offene Immersion auf $D(\chi^{u_1} \cdot \chi^{u_r}) = \bigcap_{i=1}^r D(\chi^{u_i})$. $\square$

Ist σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel, so schreiben wir im Folgenden $\iota_\sigma : \mathbb{T} \to X_\sigma$ für die offene Immersion aus dem obigen Lemma und deuten sie manchmal als Inklusion $\subseteq$. Ist Δ ein Fächer und $\sigma \in \Delta$, so erhalten wir nach Definition von X_Δ eine offene Immersion $\mathbb{T} \overset{\iota_\sigma}{\to} X_\sigma \hookrightarrow X_\Delta$, die unabhängig von der Wahl von σ ist. Auch diese wird manchmal einfach als Inklusion gedeutet.

Das obige Diagramm von K-Schemata entspricht dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[t,t^{-1}] \otimes_K K[t,t^{-1}] & K[t,t^{-1}] \otimes_K K[S_\sigma] \arrow[l, "id \otimes \supseteq"'] \\ K[t,t^{-1}] \arrow[u, "\chi"] & K[S_\sigma] \arrow[l, "\supseteq"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dass dieses Diagramm kommutativ ist, ist leicht zu sehen, da alle Ringhomomorphismen explizit gegeben sind. Damit ist auch das obige Diagramm von Schemata kommutativ.
Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T} \times_K X_\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\mu_\sigma"'] & \mathbb{T} \times_K X_\Delta \arrow[d, "\mu_\Delta"] \\ X_\sigma \arrow[r] & X_\Delta \end{tikzcd}$$

kommutiert ebenfalls, da die horizontalen Pfeile offene Immersionen sind, und aufgrund des Verklebungssatzes $\mu_\Delta|_{\mathbb{T} \times_K X_\sigma} = \mu_\sigma$ gilt.
Daher kommutiert auch das zusammengesetzte Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \arrow[r, "id_{\mathbb{T}} \times \iota_\sigma"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathbb{T} \times_K X_\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\mu_\sigma"] & \mathbb{T} \times_K X_\Delta \arrow[d, "\mu_\Delta"] \\ \mathbb{T} \arrow[r, "\iota_\sigma"] & X_\sigma \arrow[r] & X_\Delta \end{tikzcd}$$

Die horizontalen Pfeile sind immer noch injektiv, sodass sich μ_Δ über ι zur Gruppenoperation von $\mathbb{T}$ auf sich selbst (nämlich μ) einschränkt.
Dies führt zur folgenden allgemeinen Definition torischer Varietäten:

Definition 5.4. *(torische Varietät; allgemeine Definition)*
Ein irreduzibles K-Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ von endlichem Typ heißt torische Varietät, falls gilt:

(i) X enthält einen Torus $\mathbb{T} = Spec(K[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}])$ als offenes Unterschema

(ii) die gewöhnliche Gruppenstruktur

$$\mu : \mathbb{T} \times_K \mathbb{T} \to \mathbb{T}$$

lässt sich zu einer Gruppenoperation

$$\mathbb{T} \times_K X \to X$$

fortsetzen.

Wir haben gesehen, dass durch jeden Fächer Δ ein K-Schema X_Δ von endlichem Typ gegeben ist, welches (i) und (ii) der obigen Definition erfüllt. In Prop. 6.6 werden wir außerdem zeigen, dass X_Δ irreduzibel ist und damit eine torische Varietät im Sinne von Def. 5.4. Zudem ist X_Δ normal und separiert (vgl. Prop. 6.2 und 6.4).
Umgekehrt kann man zeigen, dass zu jeder normalen separierten torischen Varietät X im Sinne von Def. 5.4 ein Fächer Δ existiert, so dass $X = X_\Delta$ gilt, d. h. das Schema X ist die zum Fächer Δ assoziierte torische Varietät. (vgl. [CLS11], 3.1.8)

6 Geometrische Eigenschaften torischer Varietäten

In diesem Kapitel werden wir einige grundlegende Eigenschaften von torischen Varietäten beweisen. Sei im gesamten Kapitel K wieder ein beliebiger Körper. Aus dem Lemma von Gordan, das wir in Kapitel 3 bewiesen haben, folgt dann:

Proposition 6.1. *Sei Δ ein Fächer in N; dann ist die zugehörige torische Varietät X_Δ ein K-Schema von endlichem Typ.*

Beweis. Zunächst ist für jeden Kegel $\sigma \in \Delta$ nach Gordan's Lemma das Monoid

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$$

endlich erzeugt. Daher ist $K[S_\sigma]$ eine endlich erzeugte K-Algebra und damit per Definition eine K-Algebra von endlichem Typ. Also ist das zugehörige K-Schema $X_\sigma = Spec(K[S_\sigma]) \to Spec(K)$ von endlichem Typ. Da Δ nur endlich viele Kegel enthält, ist das K-Schema $X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} X_\sigma$ quasi-kompakt und damit von endlichem Typ. $\square$

Proposition 6.2. *Sei σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel und $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$. Dann ist das affine Schema $X_\sigma := Spec(K[S_\sigma])$ normal. Insbesondere ist für jeden Fächer Δ in N die torische Varietät X_Δ normal.*

Beweis. Wir folgen dem Beweis von (c)⇒(a) in [CLS11], Theorem 1.3.5.
Seien $\rho_1, ..., \rho_r$ die Kanten von σ und $v_{\rho_1}, ..., v_{\rho_r}$ die zugehörigen Kantenerzeuger (vgl. Lemma 3.12). Wir behaupten, es gilt

$$\sigma^\vee = \bigcap_{i=1}^{r} \rho_i^\vee.$$

Da $\rho_i \leq \sigma$ für alle i eine Seite von σ ist, gilt $\sigma^\vee \subset \rho_i^\vee$ für jedes i. Sei umgekehrt $u \in \rho_i^\vee$ für alle i und sei $v \in \sigma$. Da σ nach Lemma 3.12 von $v_{\rho_1}, ..., v_{\rho_r}$ erzeugt wird, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_{\rho_i}.$$

Dann gilt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle u, v_{\rho_i} \rangle \geq 0$$

und damit $u \in \sigma^\vee$.
Schneiden wir nun mit dem dualen Gitter M, so erhalten wir

$$S_\sigma = \bigcap_{i=1}^{r} S_{\rho_i},$$

womit auf dem Level der K-Algebren

$$K[S_\sigma] = \bigcap_{i=1}^{r} K[S_{\rho_i}]$$

als Unterringe von $K[M]$ folgt. Da Schnitte ganzabgeschlossener Unterringe eines Integritätsbereichs wieder ganzabgeschlossen sind, ist $K[S_\sigma]$ ganzabgeschlossen, wenn für jedes $i \in \{1, ...r\}$ der Ring $K[S_{\rho_i}]$ ganzabgeschlossen ist. Es genügt also, zu zeigen, dass $K[S_\rho]$ für jede Kante

$\rho \leq \sigma$ ein normaler Integritätsbereich ist. Sei u_ρ der Kantenerzeuger von ρ. Dann definiert u_ρ einen freien $\mathbb{Z}$-Untermodul vom Rang 1 von N und wir finden Vektoren $e_2, ..., e_n$, so dass die Menge $\{u_\rho = e_1, ..., e_n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von N ist. Dies folgt aus dem Elementarteilersatz und der Tatsache, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $N/\mathbb{Z}u_\rho$ torsionsfrei ist. Ist nämlich $x \in N$ mit $\lambda x \in \mathbb{Z}u_\rho$ für ein $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so folgt $x \in \mathbb{R}u_\rho \cap N = (\rho \cap N) \cup (-\rho \cap N) = \mathbb{Z}u_\rho$ nach Definition von u_ρ.
Daher können wir durch Anwendung eines Gitterautomorphismus $N \to N$ annehmen, dass $u_\rho \in \mathbb{Z}^n$ der erste Standardeinheitsvektor ist. In diesem Fall haben wir in einem Beispiel gesehen, dass dann

$$K[S_\rho] \cong K[x_1, x_2^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}]$$

gilt. Nun ist der Ring $K[x_1, ..., x_n]$ ein faktorieller Ring und daher ganzabgeschlossen, sodass auch die Lokalisierung $K[x_1, x_2^{\pm 1}, ..., x_n^{\pm 1}] = K[x_1, ..., x_n]_{x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ ganzabgeschlossen ist, denn für einen Integritätsbereich ist Ganzabgeschlossenheit eine lokale Eigenschaft. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass unsere torischen Varietäten separiert sind. Dazu benötigen wir einen Satz aus der algebraischen Geometrie:

Satz 6.3. *(vgl. [FK05], Lemma 4.16 auf S. 48/49)*
Sei K ein Körper und $(X, \mathcal{O}_X)$ ein K-Schema. Dann sind äquivalent:

(i) X ist separiert (als K-Schema).

(ii) X besitzt eine affine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, so dass für alle $i, j \in I$ auch $X_i \cap X_j$ affin ist und sodass der von den Einschränkungsabbildungen induzierte Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X(X_i) \otimes_K \mathcal{O}_X(X_j) \to \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j),$$

surjektiv ist.

Mithilfe dieses Satzes erhalten wir

Proposition 6.4. *Sei Δ ein Fächer in N. Dann ist die torische Varietät X_Δ (als K-Schema) separiert.*

Beweis. Aus dem Verklebungsprozess ist sofort ersichtlich, dass für je zwei Kegel $\sigma, \sigma' \in \Delta$

$$X_\sigma \cap X_{\sigma'} \cong X_{\sigma \cap \sigma'},$$

wieder affin ist. Nach dem vorherigen Satz genügt es also, zu zeigen, dass für alle $\sigma, \sigma' \in \Delta$ der Ringhomomorphismus

$$\delta : K[S_\sigma] \otimes_K K[S_{\sigma'}] \to K[S_\tau], \chi^m \otimes \chi^n \mapsto \chi^{m+n},$$

surjektiv ist, wobei hier $\tau = \sigma \cap \sigma'$ die gemeinsame Seite bezeichnet.
Nach Proposition 3.10 gilt aber $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$, d. h. jedes Element $y \in S_\tau$ ist von der Form $y = m + n$ für gewisse $m \in S_\sigma$, $n \in S_{\sigma'}$. Damit folgt sofort, dass der Ringhom. δ surjektiv ist. □

Um nachzuweisen, dass unsere torischen Varietäten irreduzibel sind, benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 6.5. *Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum mit einer offenen Überdeckung $(X_i)_{i \in I}$, sodass X_i für alle $i \in I$ irreduzibel ist. Gilt dann $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$, so ist X irreduzibel.*

Beweis. Sei zunächst U eine beliebige nicht-leere offene Teilmenge von X. Dann gibt es ein $i \in I$ mit $U \cap X_i \neq \emptyset$. Für jedes $j \in I$ sind dann $X_i \cap X_j$ und $X_i \cap U$ zwei nicht-leere offene Teilmengen von X_i. Da X_i irreduzibel ist, ist der Schnitt $X_i \cap X_j \cap U$ nicht leer. Insbesondere ist der Schnitt $X_j \cap U$ für alle $j \in I$ nicht leer.
Sind nun U und V zwei beliebige nicht-leere offene Teilmengen von X, so wähle $i \in I$ beliebig. Wie eben gesehen sind $X_i \cap U$ und $X_i \cap V$ zwei nicht-leere offene Teilmengen von X_i. Da X_i irreduzibel ist, ist der Schnitt $X_i \cap U \cap V$ nicht leer. Insbesondere ist also der Schnitt $U \cap V$ nicht leer. Demnach ist X irreduzibel. □

Proposition 6.6. *Sei Δ ein Fächer in einem Gitter N. Dann ist die zugehörige torische Varietät X_Δ irreduzibel und insbesondere zusammenhängend.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} X_\sigma$ eine offene Überdeckung. Nach obigem Lemma genügt es also, zu zeigen, dass für $\sigma, \sigma' \in \Delta$ die Menge $X_\sigma \cap X_{\sigma'}$ nicht leer ist. Nach dem Verklebungssatz gilt

$$X_\sigma \cap X_{\sigma'} = X_{\sigma \cap \sigma'}$$

und $X_{\sigma \cap \sigma'}$ ist nicht leer, da es einen Torus $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}^n_{m,K}$ als prinzipale offene Teilmenge enthält, denn alle Kegel in Δ sind streng konvex und $\sigma \cap \sigma'$ ist ein Kegel in Δ, sodass $\{0\} \leq \sigma \cap \sigma'$ eine Seite ist. Damit ist X_Δ irreduzibel. Schließlich ist jeder irreduzible topologische Raum zusammenhängend, sodass X_Δ auch zusammenhängend ist. □

Korollar 6.7. *Sei Δ ein Fächer in N und X_Δ die zugehörige torische Varietät. Dann liegt der Torus $\mathbb{T}$ dicht in X_Δ.*

Beweis. X_Δ ist irreduzibel und $\mathbb{T} \hookrightarrow X_\Delta$ ein offenes Unterschema. In einem irreduziblen topologischen Raum liegt jede nichtleere offene Teilmenge dicht, was die Behauptung beweist. □

7 Singularitäten

In diesem Kapitel wollen wir herausfinden, wie man anhand des Kegels σ erkennen kann, ob die resultierende torische Varietät X_σ singulär ist. Dazu konstruieren wir zunächst den sogenannten ausgezeichneten Punkt:

Bemerkung 7.1. *Ist σ ein rationaler polyedrischer Kegel im Vektorraum $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, so existiert ein ausgezeichneter Punkt x_σ von X_σ: Das zugehörige maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset K[S_\sigma]$ ist gegeben durch den Kern des surjektiven K-linearen Ringhomomorphismus*

$$\varphi : K[S_\sigma] \to K, \chi^m \mapsto \begin{cases} 1, & m \in \sigma^\perp \cap M \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Beachte, dass dies wirklich ein Ringhom. ist, da $\sigma^\perp \cap M = \sigma^\vee \cap \sigma^\perp \cap M$, und $\sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ nach Lemma 2.28 eine Seite von $\sigma^\vee$ ist. Sind also $m, m' \in S_\sigma$ mit $m + m' \in \sigma^\perp$, so gilt schon $m, m' \in \sigma^\perp$ nach Lemma 2.15.
Gilt $dim(\sigma) = dim(V)$, so ist $\sigma^\perp \cap M = \{0\}$ und damit wird $\mathfrak{m}$ in diesem Fall von der Menge $\{\chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus \{0\}\}$ erzeugt.

7.1 Singuläre affine torische Varietäten

Lemma 7.2. *Sei N ein Gitter und $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} =: V$ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel von maximaler Dimension, d. h. es gelte $span_{\mathbb{R}}(\sigma) = V$. Sei ferner $x_\sigma \in X_\sigma$ der ausgezeichnete Punkt und $\mathfrak{m} \subset K[S_\sigma]$ das zugehörige maximale Ideal von $K[S_\sigma]$. Bezeichne weiter mit $\mathscr{H}$ die Hilbertbasis von S_σ (vgl. Prop. 3.14). Dann gilt*

$$dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = |\mathscr{H}|.$$

Beweis. Da σ volle Dimension hat, wird nach der obigen Bemerkung das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset K[S_\sigma]$, das zum ausgezeichneten Punkt $x_\sigma \in X_\sigma$ gehört, von der Menge

$$\{\chi^m \mid m \in S_\sigma \setminus \{0\}\}$$

erzeugt. Da die Menge $\{\chi^m\}_{m \in S_\sigma}$ eine K-Basis von $K[S_\sigma]$ ist, erhalten wir wie im Beweis von [CLS11], Lemma 1.3.10

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{m \neq 0} K \cdot \chi^m = (\bigoplus_{m \text{ irreduzibel}} K \cdot \chi^m) \oplus (\bigoplus_{m \text{ reduzibel}} K \cdot \chi^m) = (\bigoplus_{m \in \mathscr{H}} K \cdot \chi^m) \oplus \mathfrak{m}^2$$

und daher

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \bigoplus_{m \in \mathscr{H}} K \cdot \chi^m,$$

also gilt

$$dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \sum_{m \in \mathscr{H}} dim_K(K \cdot \chi^m) = \sum_{m \in \mathscr{H}} 1 = |\mathscr{H}|.$$

□

Proposition 7.3. *Sei $N \cong \mathbb{Z}^n$ ein Gitter und σ ein streng konvexer rationaler polyedrischer Kegel im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) Das affine Schema X_σ ist regulär

(ii) σ wird von einem Teil einer $\mathbb{Z}$-Basis des Gitters N erzeugt.

In diesem Fall gilt $X_\sigma \cong \mathbb{A}^r_K \times_K \mathbb{G}^{n-r}_{m,K}$, wobei r die Dimension des Kegels σ ist.

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Beweis von [CLS11], Theorem 1.3.12.
Sei zunächst die zweite Eigenschaft erfüllt, d. h. die Erzeuger von σ können zu einer $\mathbb{Z}$-Basis von N ergänzt werden. Indem wir einen Gitterautomorphismus $N \to N$ anwenden, der die Erzeuger von σ mit den ersten r Vektoren $e_1, ..., e_r$ der Standardbasis für $\mathbb{Z}^n$ identifiziert, wobei hier $r = dim(\sigma)$ gilt, können wir annehmen, dass σ der Kegel ist, der von den Vektoren $e_1, ..., e_r$ erzeugt wird. Wir haben in einem Beispiel gesehen, dass dann $\sigma^\vee$ von den Vektoren $e_1, ..., e_r, \pm e_{r+1}, ..., e_n$ erzeugt wird, und dass das zugehörige affine Schema gegeben ist durch

$$X_\sigma \cong \mathbb{A}^r_K \times_K \mathbb{G}^{n-r}_{m,K}.$$

Nun ist $\mathbb{G}^{n-r}_m$ ein offenes Unterschema von $\mathbb{A}^{n-r}_K$. Damit ist $X_\sigma = \mathbb{A}^r_K \times_K \mathbb{G}^{n-r}_{m,K}$ nach den Eigenschaften des Faserproduktes ein offenes Unterschema von $\mathbb{A}^r_K \times_K \mathbb{A}^{n-r}_K \cong \mathbb{A}^n_K$. Nun ist aber $\mathbb{A}^n_K$ regulär und damit auch jedes offene Unterschema, sodass X_σ regulär ist.
Umgekehrt sei nun die torische Varietät X_σ ein reguläres Schema. Beachte, dass

$$n = dim(V) = dim(\mathbb{T}) = dim(X_\sigma)$$

gilt, denn der Torus $\mathbb{T}$ ist ein offenes Unterschema von X_σ und σ ist streng konvex, d. h. $\mathbb{R} \cdot \sigma^\vee$ hat Dimension n, da es den Dualraum aufspannt. Hier bezeichnen wir mit $\mathbb{T}$ natürlich den n-dimensionalen Torus.
Zunächst nehmen wir an, dass $n = dim(\sigma)$ gilt, d. h. σ spannt V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Sei dann $x_\sigma \in X_\sigma$ der ausgezeichnete Punkt mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subseteq K[S_\sigma]$. Da nun X_σ regulär ist, ist x_σ ein regulärer Punkt, sodass

$$dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = dim(\mathscr{O}_{X_\sigma,x_\sigma}) = dim(X_\sigma) = dim(\mathbb{T}) = n$$

gilt, wobei wir verwenden, dass X_σ irreduzibel ist. Andererseits ist nach Lemma 7.2

$$dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = |\mathscr{H}|,$$

wobei $\mathscr{H}$ die Hilbertbasis von $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ bezeichnet. Damit erhalten wir

$$n = |\mathscr{H}| \geq |\{\text{Kanten } \rho \subset \sigma^\vee\}| \geq n,$$

wobei die erste Ungleichung nach Proposition 3.14 gilt. Da σ streng konvex ist, gilt $dim(\sigma^\vee) = n$ (vgl. Prop. 2.31), sodass wir die zweite Ungleichung aus Lemma 3.12 erhalten. Es folgt, dass $\sigma^\vee$ genau n Kanten besitzt und $\mathscr{H}$ genau aus den eindeutigen irreduziblen Erzeugern dieser Kanten besteht. Wenn wir in Proposition 3.10 $\sigma' := -\sigma$ wählen, so sehen wir

$$M = S_{\{0\}} = S_\sigma + (-S_\sigma),$$

d. h. S_σ erzeugt M als $\mathbb{Z}$-Modul. Nach dem oben gesehenen bilden die n Erzeuger von $\sigma^\vee$ dann eine $\mathbb{Z}$-Basis für M. Durch Anwendung eines Gitterautomorphismus können wir $\sigma^\vee = Cone(e_1^*, ..., e_n^*)$ annehmen. Dann gilt aber $\sigma = Cone(e_1, ..., e_n)$, d. h. σ wird von einer $\mathbb{Z}$-Basis von N erzeugt, was die Behauptung zeigt.

Betrachte nun den Fall $dim(\sigma) = r < n = dim(V)$. Bezeichne mit

$$N_1 := \sigma \cap N + (-\sigma \cap N) \subset N$$

den kleinsten $\mathbb{Z}$-Untermodul des $\mathbb{Z}$-Moduls N, der $\sigma \cap N$ enhält. N_1 ist das Urbild des Torsionsuntermoduls von $N/\mathbb{Z}(\sigma \cap N)$ unter der Restklassenabbildung $N \to N/\mathbb{Z}(\sigma \cap N)$, sodass N/N_1 torsionsfrei ist. Da $\sigma \cap N$ als Monoid saturiert ist, ist N_1 ebenfalls saturiert, sodass der Quotientenmodul N/N_1 torsionsfrei ist. Nach dem Elementarteilersatz ist dann N/N_1 sogar ein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Wählen wir nun eine Basis $x_1 + N_1, ..., x_m + N_1$ mit $x_1, ..., x_m \in N$ und setzen wir $N_2 := span_\mathbb{Z}(x_1, ..., x_m)$, so gilt $N = N_1 \oplus N_2$ mit $rg_\mathbb{Z}(N_1) = dim(\sigma) = r$ und $rg_\mathbb{Z}(N_2) = n - r$. Der Kegel σ liegt in $N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ und in $N_1 \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, d. h. wir können σ auffassen als Kegel σ in N und als Kegel σ' in N_1, wobei dann $\sigma = \sigma' \oplus \{0\}$ gilt. Außerdem gilt für das duale Gitter

$$M = Hom(N, \mathbb{Z}) \cong Hom(N_1, \mathbb{Z}) \oplus Hom(N_2, \mathbb{Z})$$

als $\mathbb{Z}$-Moduln, d. h. wir erhalten eine Zerlegung $M = M_1 \oplus M_2$, so dass

$$S_\sigma = S_{\sigma'} \oplus S_{\{0\}} = ((\sigma')^\vee \cap M_1) \oplus M_2.$$

Auf der Ebene der K-Algebren schreibt sich dies als

$$K[S_\sigma] \cong K[S_{\sigma'}] \otimes_K K[M_2]$$

(vgl. Bem. 2.2). Nach Anwendung von $Spec(\cdot)$ liefert das

$$X_\sigma \cong X_{\sigma'} \times_K \mathbb{G}_{m,K}^{n-r}.$$

Wir behaupten, dass $X_{\sigma'}$ regulär ist. Dazu genügt es, die Regularität auf den abgeschlossenen Punkten nachzuweisen. Sei also $\mathfrak{m}' \in Max(K[S_{\sigma'}])$ und $\mathfrak{m} := (\mathfrak{m}', t_1 - 1, ..., t_{n-r} - 1) \subseteq K[S_{\sigma'}][t_1^{\pm 1}, ..., t_{n-r}^{\pm 1}]$, wobei wir letzteres als die affine Algebra von $X_\sigma = X_{\sigma'} \times_K \mathbb{G}_m^{n-r}$ auffassen. Sind die Restklassen von $x_1, ..., x_k \in \mathfrak{m}'$ eine $\kappa(\mathfrak{m}')$-Basis von $\mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2$, so bilden die Restklassen von $x_1, ..., x_k, t_1 - 1, ..., t_{n-r} - 1 \in \mathfrak{m}$ eine $\kappa(\mathfrak{m})$-Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Es folgt

$$dim_{\kappa(\mathfrak{m}')}(\mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2) = dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - (n-r).$$

Andererseits gilt nach der Dimensionsformel für Faserprodukte von K-Varietäten und der Irreduzibilität von $X_\sigma, X_{\sigma'}$ auch

$$dim(\mathscr{O}_{X_{\sigma'},\mathfrak{m}'}) = dim(X_{\sigma'}) = dim(X_\sigma) - dim(\mathbb{G}_m^{n-r}) = dim(X_\sigma) - (n-r) = dim(\mathscr{O}_{X_\sigma,\mathfrak{m}}) - (n-r).$$

Da X_σ regulär ist, gilt

$$dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = dim(\mathscr{O}_{X_\sigma,\mathfrak{m}})$$

und daher

$$dim_{\kappa(\mathfrak{m}'}(\mathfrak{m}'/(\mathfrak{m}')^2) = dim(\mathscr{O}_{X_{\sigma'},\mathfrak{m}'}).$$

Da σ' ein Kegel in N_1 von voller Dimension ist, können wir das bereits Gezeigte anwenden und wir erhalten, dass σ' in N_1 von einer $\mathbb{Z}$-Basis für N_1 erzeugt wird. Da N_1 ein direkter Summand von N ist, wird daher σ von einem Teil einer $\mathbb{Z}$-Basis von N erzeugt. □

Korollar 7.4. *Sei Δ ein Fächer in N. Die torische Varietät X_Δ ist genau dann ein reguläres Schema, wenn jeder Kegel $\sigma \in \Delta$ von einem Teil einer $\mathbb{Z}$-Basis von N erzeugt wird.*

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 7.3 und der Tatsache, dass Regularität eine lokale Eigenschaft ist. □

7.2 Beispiele für Singularitäten

Beispiel 7.5. *Sei $N = \mathbb{Z}^2$ und $\sigma = Cone(2e_1 - e_2, e_2) \subset \mathbb{R}^2 = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Die Vektoren $2e_1 - e_2, e_2$ bilden keine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}^2$, denn z. B. gilt $e_1 \notin span_{\mathbb{Z}}(2e_1 - e_2, e_2)$. Nach Satz 7.3 ist die zugehörige affine torische Varietät X_σ singulär. Dieser Umstand lässt sich auch mit dem Jacobi-Kriterium verifizieren: In Beispiel 4.4 haben wir gesehen, dass*

$$X_\sigma \cong Spec(K[x,y,z]/(y^2 - xz)) \cong V(y^2 - xz) \subseteq \mathbb{A}_K^3$$

ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{A}_K^3$ ist. Nach dem Jacobi-Kriterium für abgeschlossene Unterschemata dieser Form ist ein K-rationaler Punkt $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in X_\sigma(K)$ genau dann regulär, wenn $J_{y^2-xz}(\xi) := (\frac{d(y^2-xz)}{dx}(\xi), \frac{d(y^2-xz)}{dy}(\xi), \frac{d(y^2-xz)}{dz}(\xi)) \neq 0$ erfüllt ist. Hier gilt $J_{y^2-xz}(\xi) = (-\xi_3, 2\xi_2, -\xi_1)$, sodass $\xi = 0$ ein singulärer Punkt von X_σ ist (der einzige, falls $char(K) \neq 2$).

Beispiel 7.6. *(Zyklische Quotientensingularitäten)*
Das Folgende beruht auf dem Beispiel in [Ful93], S. 31 f.
Sei $N = \mathbb{Z}^2$, $m \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\sigma = Cone(e_2, me_1 - e_2)$. Den Fall $m = 2$ haben wir gerade betrachtet. Auch in diesem allgemeineren Fall liefert uns das Kriterium von oben, dass das affine Schema X_σ singulär ist. An dieser Stelle wollen wir eine andere Charakterisierung der torischen Varietät erarbeiten. Der duale Kegel $\sigma^\vee$ wird von den Vektoren e_1 und $e_1 + me_2$ erzeugt. Um zum Monoid S_σ zu gelangen, müssen wir wieder alle irreduziblen Elemente in $\sigma^\vee \cap M$ ergänzen.Eine direkte Rechnung zeigt, dass diese gegeben sind durch

$$e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2, ..., e_1 + me_2.$$

Setzen wir wieder $x := \chi^{e_1}$ und $y := \chi^{e_2}$, so erhalten wir

$$K[S_\sigma] = K[x, xy, xy^2, ..., xy^m].$$

Transformieren wir nun die Variablen mittels $x \mapsto u^m$, $y \mapsto \frac{v}{u}$, so gilt

$$K[S_\sigma] \cong K[u^m, u^{m-1}v, ..., uv^{m-1}, v^m] \subset K[u, v].$$

Das Schema $X_\sigma = Spec(K[S_\sigma])$ heißt auch der Kegel über der rationalen normalen Kurve vom Grad m.
Über die Inklusion $K[S_\sigma] \subset K[u, v]$ erhalten wir einen Morphismus affiner Schemata $\mathbb{A}^2_K \to X_\sigma$. Betrachte die Gruppe μ_m der m-ten Einheitswurzeln in K. μ_m operiert auf $K[u, v]$ via

$$\mu_m \times K[u, v] \to K[u, v], (\zeta, f) \mapsto f(\zeta u, \zeta v).$$

Offenbar erfüllt diese Abbildung die gewöhnlichen Eigenschaften einer Gruppenoperation.

Wir nehmen nun an, dass $char(K)$ kein Teiler von m ist und dass K alle m-ten Einheitswurzeln eines algebraischen Abschlusses von K enthält. Bekanntlich gilt dann $|\mu_m| = m$, und K enthält insbesondere eine primitive m-te Einheitswurzel.

Wir behaupten, dass $K[S_\sigma]$ genau die Menge der μ_m-invarianten Polynome ist, d. h. es gilt $K[u, v]^{\mu_m} = K[S_\sigma]$. Beachte, dass sowohl die linke als auch die rechte Seite ein Unterring von $K[u, v]$ ist und dass ein Polynom μ_m-invariant ist genau dann, wenn all seine homogenen Summanden invariant sind. Es genügt also im Folgenden, Monome zu betrachten.
Sei $f \in K[S_\sigma]$ ein Monom. Dann ist f von der Form $u^i v^{m-i}$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Für jedes $\zeta \in \mu_m$ gilt dann

$$(\zeta, f) = (\zeta, u^i v^{m-i}) \mapsto (\zeta u)^i (\zeta v)^{m-i} = \zeta^m u^i v^{m-i} = u^i v^{m-i} = f,$$

d. h. f ist invariant unter allen $\zeta \in \mu_m$, also $f \in K[u, v]^{\mu_m}$. Ist umgekehrt $f = u^i v^j \in K[u, v]^{\mu_m}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $\zeta \in \mu_m$

$$u^i v^j = (\zeta u)^i (\zeta v)^j = \zeta^{i+j} u^i v^j.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $\zeta^{i+j} = 1$. Da dies für alle m-ten Einheitswurzeln wahr ist, gilt es insbesondere für die primitiven m-ten Einheitswurzeln, sodass wir folgern können, dass m ein Teiler von $i + j$ ist, d. h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $i + j = km$. Dann ist aber $k = 0$ und $f = 1 \in K[S_\sigma]$ oder $k > 0$ und

$$f = u^i v^j = u^i v^{km-i} = u^i v^{m-i} v^{(k-1)m} \in K[S_\sigma].$$

Daher gilt in der Tat $K[S_\sigma] = K[u, v]^{\mu_m}$.
Das Schema $X_\sigma = Spec(K[u, v]^{\mu_m})$ heißt dann zyklische Quotientensingularität, und wir schreiben $X_\sigma \cong \mathbb{A}^2_K/\mu_m$.

Beispiel 7.7. *(beruht auf [Dol82], S. 35 ff.)*
Seien $q_0, ..., q_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $Q := (q_0, ..., q_r)$ und setze $|Q| := \sum_{i=1}^r q_i$. Sei weiter K ein Körper und $R := K[x_0, ..., x_r]$ der Polynomring in $r + 1$ Variablen über K.
Versehen wir nun R mit der Graduierung, die durch $deg(x_i) = q_i$, $i = 0, ..., r$, gegeben ist, so erhalten wir wie in Beispiel 4.4 den graduierten Ring

$$S(Q) := \bigoplus_{n \geq 0} R_n.$$

Wir bezeichnen nun mit $\mathbb{P}(Q) := Proj(S(Q))$ den gewichteten projektiven Raum. Gilt $q_0 = ... = q_r = 1$, so schreiben wir nur S statt $S(Q)$.

Wir nehmen nun an, dass $ggT(q_o, ..., q_r) = 1$ gilt, dass alle q_i teilerfremd zur Charakteristik von K sind und dass K alle q_i-ten Einheitswurzeln eines algebraischen Abschlusses von K enthält für $0 \leq i \leq r$.
Setze $\mu_Q := \mu_{q_1} \times ... \times \mu_{q_r}$ und betrachte die Operation von μ_Q auf S definiert durch

$$(\zeta_0, ..., \zeta_r) \cdot f(x_0, ..., x_r) := f(\zeta_0 x_0, ..., \zeta_r x_r).$$

Wie in 7.6 zeigt man dann $S(Q) = S^{\mu_Q}$, wenn $S(Q)$ via $x_i \mapsto x_i^{q_i}$ als K-Unteralgebra von S aufgefasst wird.
In diesem Sinne gilt

$$Proj(S(Q)) \cong Proj(S^{\mu_Q}) =: \mathbb{P}_K^r/\mu_Q.$$

Wir erhalten also wieder zyklische Quotientensingularitäten und sehen insbesondere, dass der gewichtete projektive Raum als Quotient des gewöhnlichen projektiven Raumes nach einer geeigneten Gruppenoperation aufgefasst werden kann.

7.3 Ausblick: Auflösung von Singularitäten

Sei $\varphi : N' \to N$ ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln. Wir bezeichnen mit demselben Symbol die induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \to N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Seien weiter Δ ein Fächer in N und Δ' ein Fächer in N', so dass es zu jedem Kegel $\sigma' \in \Delta'$ einen Kegel $\sigma \in \Delta$ gibt mit $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$. Betrachte außerdem den zu φ dualen $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus

$$\varphi^* : M \to M', u \mapsto u \circ \varphi.$$

Sind $\sigma \in \Delta$ und $\sigma' \in \Delta'$ mit $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$, so gilt $\varphi^*(S_\sigma) \subseteq S_{\sigma'}$, denn ist $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$, so gilt $u(\underbrace{\varphi(n')}_{\in\sigma}) \geq 0$ für alle $n' \in N'$, d. h. $u \circ \varphi \geq 0$ auf σ' und damit $\varphi^*(u) \in S_{\sigma'}$.
Wir erhalten also einen Monoidhomomorphismus

$$\varphi^*|_{S_\sigma} : S_\sigma \to S_{\sigma'}.$$

Dieser liefert einen Homomorphismus von K-Algebren

$$K[S_\sigma] \to K[S_{\sigma'}]$$

und damit einen Morphismus von K-Schemata

$$X_{\sigma'} \stackrel{\varphi_{*,\sigma'}}{\to} X_\sigma \hookrightarrow X_\Delta.$$

Diese Morphismen sind unabhängig von der Wahl von $\sigma \in \Delta$:
Sind $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ mit $\varphi(\sigma') \subset \sigma_1$ und $\varphi(\sigma') \subset \sigma_2$, so gilt auch $\varphi(\sigma') \subset \sigma_1 \cap \sigma_2 =: \tau$, wobei $\tau \in \Delta$ gilt, da Δ ein Fächer ist. Somit erhalten wir auf analoge Weise einen Morphismus von K-Schemata

$$X_{\sigma'} \to X_\tau \hookrightarrow X_{\sigma_i} \hookrightarrow X_\Delta$$

für $i = 1, 2$, d. h. der Morphismus

$$X_{\sigma'} \to X_{\sigma_i} \hookrightarrow X_\Delta$$

faktorisiert über X_τ für $i = 1, 2$. Da die hinteren Morphismen offene Immersionen sind, stimmen sie auch ihrem Schnitt X_τ überein, d. h. die Morphismen $X_{\sigma'} \to X_\Delta$ sind unabhängig von der

Wahl von $\sigma \in \Delta$ mit $\varphi(\sigma') \subset \sigma$. Damit sind die Voraussetzungen des Verklebungssatzes für Schemata erfüllt, und die Morphismen $X_{\sigma'} \to X_\Delta$ verkleben zu einem Morphismus

$$\varphi_* : X_{\Delta'} \to X_\Delta$$

von K-Schemata.
Wir behaupten, dass der so konstruierte Morphismus äquivariant unter den jeweiligen Torusoperationen ist.
Wählen wir $\sigma' := \{0\} \in \Delta'$, so gilt $\varphi(\sigma') = \{0\} =: \sigma \in \Delta$, d. h. wir erhalten einen Morphismus $\varphi_{*,\{0\}} : \mathbb{T}_{N'} \to \mathbb{T}_N$. Hier bezeichnen wir zur besseren Unterscheidbarkeit mit $\mathbb{T}_N$ den Torus in N und mit $\mathbb{T}_{N'}$ den in N'. Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}_{N'} \times_K X_{\Delta'} \arrow[r, "\mu_{\Delta'}"] \arrow[d, "\varphi_{*,\{0\}} \times \varphi_*"] & X_{\Delta'} \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \mathbb{T}_N \times_K X_\Delta \arrow[r, "\mu_\Delta"] & X_\Delta \end{tikzcd}$$

Auf dem offenen Unterschema $X_{\sigma'} \subset X_{\Delta'}$ mit $\varphi(\sigma') \subseteq \sigma$ für $\sigma \in \Delta$ entspricht es dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}_{N'} \times_K X_{\sigma'} \arrow[r, "\mu_{\sigma'}"] \arrow[d, "\varphi_{*,\{0\}} \times \varphi_{*,\sigma'}"] & X_{\sigma'} \arrow[d, "\varphi_{*,\sigma'}"] \\ \mathbb{T}_N \times_K X_\sigma \arrow[r, "\mu_\sigma"] & X_\sigma \end{tikzcd}$$

Dieses entspricht wiederum dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[M] \otimes_K K[S_{\sigma'}] & K[S_{\sigma'}] \arrow[l] \\ K[M] \otimes_K K[S_\sigma] \arrow[u] & K[S_\sigma] \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Da die Ringhomomorphismen explizit gegeben sind, lässt sich die Kommutativität dieses Diagramms ablesen. Somit ist auch das erste Diagramm kommutativ und $X_{\Delta'} \to X_\Delta$ ist ein $\mathbb{T}$-äquivarianter Morphismus, d. h. in dem Sinne mit den Gruppenoperationen verträglich wie in obigem Diagramm dargestellt. Nach der obigen Konstruktion schränkt er sich auf den Tori zu $\varphi_{*,\{0\}}$ ein. Gilt $N' = N$, so gilt $\varphi_{*,\{0\}} = id_{\mathbb{T}}$, und es folgt, dass φ_* eine birationale Äquivalenz ist, denn der Torus $\mathbb{T}$ liegt dicht in beiden irreduziblen Schemata.
Man kann nun zeigen, dass der Morphismus eigentlich ist, falls $\bigcup_{\sigma\in\Delta} \varphi^{-1}(\sigma) = \bigcup_{\sigma'\in\Delta'} \sigma'$ als Teilmengen von $N' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ gilt (siehe [Ful93], Proposition auf S.39). Schließlich kann man zu einem gegebenen Fächer Δ in N einen Fächer Δ' in $N' = N$ so konstruieren, dass alle $\sigma' \in \Delta'$ von einem Teil einer $\mathbb{Z}$-Basis für N erzeugt werden und damit $X_{\Delta'}$ gemäß Kor. 7.4 nicht singulär ist. Dazu wird eine sogenannte Verfeinerung des Fächers Δ verwendet:

Definition 7.8. *(Verfeinerung)*
Sei Δ ein Fächer in N. Ein Fächer Δ' in N heißt eine Verfeinerung von Δ, falls jeder Kegel $\sigma \in \Delta$ eine Vereinigung von Kegeln aus Δ' ist.

Für jede Verfeinerung Δ' von Δ sind offenbar die Voraussetzungen von [Ful93], Prop. auf S. 39, erfüllt, sodass der Morphismus $X_{\Delta'} \to X_\Delta$ eigentlich ist. Außerdem ist er wegen $N = N'$ wie oben erwähnt eine birationale Äquivalenz. Als Resultat erhält man dann den folgenden Satz:

Satz 7.9. *(siehe [Ful93], §2.6)*
Ist Δ ein Fächer in N und X_Δ die zugehörige torische Varietät, so existiert eine Verfeinerung Δ' von Δ, so dass die Varietät $X_{\Delta'}$ regulär und damit der Morphismus von Schemata $X_{\Delta'} \to X_\Delta$ eine Auflösung von Singularitäten ist.

Literatur

[Ful93] Fulton, William. Introduction to Toric Varieties. (AM-131). Princeton University Press, 1993.

[CLS11] Cox, D.; Little, J.; Schenck, H. Toric Varieties. Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011.

[Dol82] Dolgachev I. Weighted projective varieties. In: Carrell J.B. (eds) Group Actions and Vector Fields. Lecture Notes in Mathematics, vol 956. Springer, 1982, Berlin, Heidelberg.

[FK05] Fieseler, Karl-Heinz; Kaup, Ludger. Algebraische Geometrie. Grundlagen. Heldermann Verlag, 2005.

[Nac18] Nachbar, John. Finite-Dimensional Cones. Washington University, 2018.