Bachelorarbeit

Reguläre Ringe

Tristan Kurz

Datum der Abgabe:
04.10.2019

Betreuung: Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Fakultät für Mathematik

Universität Duisburg-Essen

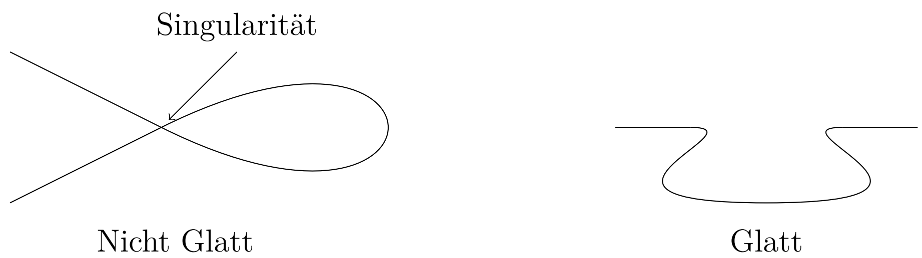
Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der gesamten Arbeit ist R ein kommutativer Ring mit Eins.

Motivation

In der algebraischen Geometrie wird jedem Ring R das affine Schema $Spec(R)$ zugeordnet. Dies ist ein geometrisches Objekt, welches anschaulich als Kurve, Fläche etc. gedeutet werden kann. Geht man von einem regulären Ring aus, so ist das zugehörige affine Schema glatt (d.h. es besitzt keine Singularitäten). Anschaulich bedeutet das, ähnlich wie in der Analysis, dass es in jedem Punkt einen wohldefinierten Tangentialraum gibt.



Dies bewegt uns zu folgenden Definitionen:

Definition 1.1 Sei R lokal noethersch, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal und $\kappa := R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Dann heißt R regulär, falls $dim(R) = dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Bemerkung Mit $dim(R)$ ist die Krulldimension des Ringes gemeint und mit $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ die Dimension des κ-Vektorraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.
Für einen nicht notwendigerweise lokalen Ring wird Regularität wie folgt definiert:

Definition 1.2 Es sei R noethersch. Dann heißt R regulär, falls die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ regulär im Sinne von Definition 1.1 ist.

Tatsächlich ist diese Definition aber problematisch, wie die folgende Bemerkung zeigt:

Bemerkung (i) Wenn R lokal noethersch ist, so gilt, dass $R_\mathfrak{m} \cong R$, d.h. ein lokaler Ring, der regulär im Sinne von Definition 1.2 ist, ist auch regulär im Sinne von Definition 1.1.
(ii) Nun besitzt ein lokaler Ring zwar nur ein maximales Ideal, kann jedoch viele weitere Primideale besitzen. Daher ist nicht klar, ob ein lokaler Ring, der regulär im Sinne von Definition 1.1 ist, auch regulär im Sinne von Definition 1.2 ist.
Ziel dieser Arbeit wird es sein zu zeigen, dass die beiden Definitionen von Regularität im Falle eines lokalen Ringes tatsächlich äquivalent sind. Das ist aufwändiger, als man zunächst denken könnte. Wir müssen dafür viele Methoden der kommutativen und insbesondere der homologischen Algebra entwickeln.

2 Die Krulldimension eines lokalen noetherschen Ringes

Wenn R ein lokaler und noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist, dann ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt. Sei zum Beispiel $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$ mit $x_1, ..., x_d \in R$. Dann folgt, dass $x_1 + \mathfrak{m}^2, ..., x_d + \mathfrak{m}^2$ ein Erzeugendensystem des κ-Vektorraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ bilden. Es gilt also $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq d < \infty$.
Genauer werden wir in diesem Abschnitt zeigen, dass in diesem Fall $dim(R) \leq dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ gilt. Insgesamt gilt dann für jeden lokalen noetherschen Ring, dass $dim(R) < \infty$.
Um den Satz zu zeigen, benötigen wir aber etwas an Vorbereitung:

Bemerkung Es sei $J \subseteq R$ ein Ideal und RS^{-1} die Lokalisierung von R. Dann ist $JRS^{-1} = \{\frac{a}{s} | a \in J, s \in S\}$.

Lemma 2.1 Es sei $S \subsetneq R$ multiplikativ abgeschlossen, RS^{-1} die Lokalisierung von R und $f : R \to RS^{-1}$ die kanonische Abbildung. Dann gilt für jedes Ideal $I \subsetneq RS^{-1}$ und $J := f^{-1}(I)$, dass $JRS^{-1} = I$.

Beweis. (vgl. [1], 1.2 Proposition 5)
Sei $\frac{a}{s} \in I$. Dann gilt $f(a) = \frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} \in I$, wobei $a \in R$ ist $\Rightarrow a \in J = f^{-1}(I) \Rightarrow$
$\frac{a}{s} \in JRS^{-1} \Rightarrow I \subseteq JRS^{-1}$. Da nun $JRS^{-1} \subseteq I$ offensichtlich gilt, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.2 Wenn R noethersch ist, so ist auch jede Lokalisierung von R noethersch.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus dem vorherigen Lemma. □

Definition 2.3 Es sei R noethersch, $I \subsetneq R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann heißt $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine I-Filtration, wenn gilt:
(i) $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine absteigende Kette von Untermoduln von M, d.h. $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq ...$
(ii) $I^i M_j \subseteq M_{i+j}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

Definition 2.4 Eine I-Filtration $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt I-stabil, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $M_{i+1} = IM_i$ $\forall i \geq k$.

Bemerkung (i) Die vorherige Definition ist äquivalent zu: $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $M_{k+i} = I^i M_k$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
(ii) Definiere $R_* = \oplus_{i\geq 0} I^i$. Dann ist dies ein Ring mit komponentenweiser Addition und $I^i \times I^j \to I^{i+j}$ als Multiplikation. Definiere $M_* = \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Dann ist M_* ein R_*-Modul.
(iii) Wenn R noethersch ist, so ist auch R_* noethersch, da jedes Ideal von R noethersch ist und die direkte Summe von noetherschen R-Moduln auch wieder noethersch ist.

Lemma 2.5 Es sei R noethersch, $I \subseteq R$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter R-Modul und R_*, M_* seien wie vorher. Dann sind äquivalent:

(i) Die I-Filtration $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist I-stabil.
(ii) M_* ist ein endlich erzeugter R_*-Modul.

Beweis. (vgl. [1], 2.3 Lemma 3)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei dazu $k \in \mathbb{N}$, sodass $M_{k+i} = I^i M_k \ \forall i \in \mathbb{N}$. Dann wird M_* als R_*-Modul erzeugt von der Untergruppe $\oplus_{i\leq k} M_i \subseteq M_*$, da $I^i M_k = M_{k+i} \subseteq M_k \subseteq \oplus_{i\leq k} M_i$. Nun ist M ein endlich erzeugter R-Modul und R noethersch $\Rightarrow M$ noethersch $\Rightarrow M_i$ ist endlich erzeugt $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \oplus_{i\leq k} M_i$ ist endlich erzeugt $\Rightarrow M_*$ ist endlich erzeugt.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $x_1, ..., x_n$ ein Erzeugendensystem von M_*. Indem wir x_v durch seine homogenen Komponenten ersetzen, können wir alle x_v als homogen annehmen, etwa $x_v \in M_{\sigma(v)}$ mit $\sigma(v) \in \mathbb{N}$ für $1 \leq v \leq n$. Jetzt betrachten wir $\max\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\}$ und $i \in \mathbb{N}$, sodass $i \geq \max\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\}$. Weil $\{x_1, ..., x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M_* ist, folgt, dass $span_{R_*}(x_1, ..., x_n) \supseteq M_{i+1}$. Da $x_1, ..., x_n \in M_i$, folgt zusammen mit der Definition von $span_{R_*}$, dass $M_{i+1} \subseteq IM_i$. Nach Voraussetzung gilt aber auch: $IM_i \subseteq M_{i+1}$ $\Rightarrow IM_i = M_{i+1} \ \forall i \geq max\{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \Rightarrow (M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist I-stabil. □

Lemma 2.6 (Artin-Rees)
Es sei R noethersch, $I \subseteq R$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter R-Modul und $U \subseteq M$ ein Untermodul. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $(I^i M) \cap U = I^{i-k}(I^k M \cap U) \ \forall i \geq k$.

Beweis. (vgl. [1], 2.3 Lemma 1)
Wir definieren $M_i := I^i M$. Dann erhalten wir eine I-Filtration $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die per Definition I-stabil ist. Die Filtration $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ induziert eine Filtration $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von U, wobei $U_i := M_i \cap U$. Daraus folgt, dass U_* ein R_*-Untermodul von M_* ist. Da M_* endlich erzeugt und R_* noethersch ist, ist auch U_* endlich erzeugt. Dann ist die Filtration $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 2.5 I-stabil, d.h. es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $I^i U_k = U_{k+i}$ oder genauer:
$I^i U_k = I^i(M_k \cap U) = I^i(I^k M \cap U) = I^{k+i} M \cap U = U_{k+i}$. Insgesamt erhalten wir damit $I^i(I^k M \cap U) = I^{k+i} M \cap U$. □

Mit $Jac(R)$ bezeichnen wir im Folgenden das Jacobson-Radikal von R, d.h. den Durchschnitt aller maximalen Ideale von R.

Satz 2.7 (Krull'scher Durchschnittssatz)
Es sei R noethersch, $I \subseteq R$ ein Ideal, sodass $I \subseteq Jac(R)$, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt $\cap_{n\in\mathbb{N}} I^n M = 0$.

Beweis. (vgl. [1], 2.3 Theorem 2)
Wir definieren einen R-Untermodul von M als $M' := \cap_{n\in\mathbb{N}} I^n M$. Dann folgt mit Artin-Rees, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $M' = I^i M \cap M' = I^{i-k}(I^k M \cap M') = I^{i-k} M'$ für $i \geq k$. Da nun M' auch endlich erzeugt und im Fall $i > k$ $I^{i-k} \subseteq I \subseteq Jac(R)$ ein Ideal ist, folgt aus dem Lemma von Nakayama, dass $M' = 0$ gelten muss. □

Definition 2.8 Ein Ring R heißt artin'sch, falls jede absteigende Kette von Idealen stationär wird.

Mit $rad(R)$ bezeichnen wir im Folgenden das Nilradikal von R, d.h. $rad(R) = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : r^n = 0\ \}$.

Lemma 2.9 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Dann sind äquivalent:
(i) $dim(R) = 0$.
(ii) $rad(R) = \mathfrak{m}$.
(iii) $\exists q \geq 1 : \mathfrak{m}^q = 0$.
(iv) R ist artin'sch.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Lemma 5.11)
$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Da R lokal ist, gilt: $dim(R) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m}$ ist das einzige Primideal von R $\Leftrightarrow$ $rad(R) = \mathfrak{m}$, da $rad(R)$ der Durchschnitt aller Primideale von R ist.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Es sei $a_1, ..., a_s \in R$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m} \Rightarrow \exists t \geq 1 : a_i^t = 0$ für $1 \leq i \leq s \Rightarrow \mathfrak{m}^{ts} = 0$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei nun $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Kette von Idealen von R. Für jedes $r \geq 0$ ist $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ ein Vektorraum über dem Körper $\kappa := R/\mathfrak{m}$. Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ ein endlich erzeugter κ-Vektorraum. Dann bilden $I'_n := (I_n \cap \mathfrak{m}^r)/(I_n \cap \mathfrak{m}^{r+1})$ eine absteigende Kette von Untervektorräumen von $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$, die wegen $dim(\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}) < \infty$ stationär wird. Damit existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I'_{n_0} = I'_{n_0+k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Zahl n_0 hängt zunächst von r ab. Indem wir das Maximum der $n_0(r)$ für $r \leq q$ bilden und wiederum mit n_0 bezeichnen, erhalten wir, dass für alle $r \leq q$ und $n \geq n_0$ $I_n \cap \mathfrak{m}^r \subseteq I_{n+1} + (I_n \cap \mathfrak{m}^{r+1})$. Damit gilt dann für alle $n \geq n_0$: $I_n \subseteq I_{n+1} + (I_n \cap \mathfrak{m}) \subseteq I_{n+1} + (I_n \cap \mathfrak{m}^2) \subseteq ... \subseteq I_{n+1} + (I_n \cap \mathfrak{m}^q) = I_{n+1}$, da nach Voraussetzung $\mathfrak{m}^q = 0$. Es folgt insgesamt, dass $I_n \subseteq I_{n+1}$ und somit $I_n = I_{n+1}$. Daraus folgt, dass R artin'sch ist.
$(iv) \Rightarrow (ii)$: $(\mathfrak{m}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine absteigende Kette von Idealen, die nach Voraussetzung stationär wird $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{m}^q = \mathfrak{m}^{q+1}$. Mit dem Lemma von Nakayama folgt $\mathfrak{m}^q = 0$ und damit, dass $\mathfrak{m} \subseteq rad(R)$. Dann muss aber $\mathfrak{m} = rad(R)$ gelten, da $rad(R) \subsetneq R$ und $\mathfrak{m}$ maximal ist. □

Bemerkung Ein Primideal $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ heißt minimal bezüglich eines Ideals $I \subseteq R$, wenn $I \subseteq \mathfrak{p}$ und, wenn kein $\mathfrak{q} \in Spec(R)$ existiert mit $I \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$.

Satz 2.10 (Krull'scher Hauptidealsatz)
Es sei R ein noetherscher Ring, $r \in R \setminus R^\times$ und $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ ein minimales Primideal bezüglich (r). Dann gilt $ht(\mathfrak{p}) \leq 1$.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Theorem 5.12)
Schritt 1: Sei $\phi : R \to R_\mathfrak{p}$, $a \mapsto \frac{a}{1}$, und $Spec(\phi) : Spec(R_\mathfrak{p}) \to Spec(R)$, $\mathfrak{q} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{q})$.
Dann ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ das eindeutig bestimmte minimale Primideal, welches $r' := \frac{r}{1}$ enthält, denn:

Angenommen es existiert ein $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ mit $r' \in \mathfrak{p}'$. Dann ist $r \in \phi^{-1}(\mathfrak{p}') \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ und es folgt, dass $Spec(\phi)(\mathfrak{p}') = \phi^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) = Spec(\phi)(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ wegen Minimalität von $\mathfrak{p} \Rightarrow \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, da $Spec(\phi)$ injektiv ist.
Schritt 2: Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 1: Angenommen $r = 0 \Rightarrow (r) = 0 \Rightarrow \mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal
$\Rightarrow ht(\mathfrak{p}) = 0 \leq 1$.
Fall 2: Angenommen r ist ein Nullteiler $\Rightarrow \exists b \in R$: $rb = 0 \in \mathfrak{q}$ $\forall \mathfrak{q} \in Spec(R) \Rightarrow (r) \subseteq \mathfrak{q}$ $\forall \mathfrak{q} \in Spec(R) \Rightarrow \mathfrak{p}$ ist ein minimales Primideal $\Rightarrow ht(\mathfrak{p}) = 0 \leq 1$.
Wir nehmen also o.B.d.A an, dass $r \neq 0$ und r kein Nullteiler ist.
Schritt 3: $R_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ und es gilt, dass $dim(R_\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p})$. Es genügt also zu zeigen, dass $ht(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \leq 1$ ist.
Wir nehmen also o.B.d.A an, dass R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist.
Schritt 4: Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette in R mit $ht(\mathfrak{p}) = n$. Dann ist $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primideal und somit $R/\mathfrak{p}_0$ ein Integritätsbereich, in dem
$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n/\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0$ eine Primidealkette derselben Länge bildet.
Es genügt daher zu zeigen, dass $ht(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0) \leq 1$ in $R/\mathfrak{p}_0$ ist. Da R lokal ist, ist auch $R/\mathfrak{p}_0$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0$.
Wir nehmen also o.B.d.A an, dass R ein lokaler Integritätsbereich mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist, welches nach Schritt 1 das eindeutig bestimmte minimale Primideal bezüglich (r) ist.
Damit ist also $\mathfrak{p} + (r)$ das einzige Primideal von $R/(r) \Rightarrow dim(R/(r)) = 0$. Nach Lemma 2.9 ist $R/(r)$ artin'sch.
Sei nun $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ ein Primideal. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass $\mathfrak{q} = 0$ gilt:
Dazu betrachten wir die absteigende Kette von Idealen $\mathfrak{q}_n := \mathfrak{q}^n R_r \cap R$ in R. Hier verwenden wir, dass die Lokalisierungsabbildung $R \to R_r$ injektiv ist, da r nach Schritt 2 kein Nullteiler ist. Sei ferner $\pi : R \to R/(r)$ die Restklassenabbildung. Da $R/(r)$ artin'sch ist, wird $\pi(\mathfrak{q}_n)$ stationär in $R/(r) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \; \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + (r)$.
Sei also $n \geq n_0$ und $x \in \mathfrak{q}_n \Rightarrow \exists y \in R : x - ry \in \mathfrak{q}_{n+1} \Rightarrow ry \in x + \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_n \supseteq \mathfrak{q}_{n+1}$.
Weiter gilt auch, dass $ry \in \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}^n R_r \cap R \Rightarrow \frac{ry}{1} = \frac{r'}{r^m}$ mit $r' \in \mathfrak{q}^n \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{r'}{r^{m+1}} \Rightarrow y \in \mathfrak{q}^n R_r \cap R = \mathfrak{q}_n$ und damit insgesamt, dass $\mathfrak{q}_{n+1} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_n$, da $\mathfrak{q}_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}_n$, und $\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + r\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n$
$\Rightarrow \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n$.
Mit dem Lemma von Nakayama folgt damit, dass $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1}$ ist.
Behauptung: $\mathfrak{q}_n R_r = \mathfrak{q}^n R_r$
$\subseteq$: Sei $a \in \mathfrak{q}_n R_r \Rightarrow a = \frac{d}{r^m} \cdot \frac{e}{r^k}$ mit $d \in \mathfrak{q}^n$, $e \in R \Rightarrow a = \frac{de}{r^{m+k}}$ mit $de \in \mathfrak{q}^n$, da $\mathfrak{q}^n$ ein Ideal ist $\Rightarrow a \in \mathfrak{q}^n R_r$.
$\supseteq$: Sei $a \in \mathfrak{q}^n R_r \Rightarrow h = \frac{c}{r^m}$ mit $c \in \mathfrak{q}^n \Rightarrow h = \frac{c}{1} \cdot \frac{1}{r^m} \in \mathfrak{q}_n R_r$.
Dies zeigt die Behauptung.
Mit Lemma 2.2 und Satz 2.7 folgt $\mathfrak{q}^{n_0} R_r = \cap_{n \geq n_0} \mathfrak{q}^n R_r = 0 \Rightarrow \mathfrak{q}^{n_0} = 0$, da $R_r \neq \{0\}$.

Dann gilt für ein $a \in \mathfrak{q}$, dass $a^{n_0} \in \mathfrak{q}^{n_0} = 0$, und somit, dass $a = 0$ gelten muss, da $\mathfrak{q}$ prim ist. Dadurch erhalten wir dann das gewünschte Resultat $\mathfrak{q} = 0$. □

Lemma 2.11 Sei R ein noetherscher Ring, $r \in R$, $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Primidealkette in R mit $r \in \mathfrak{p}_n$ und $n \geq 1$. Dann existiert eine Primidealkette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n$ und $r \in \mathfrak{q}_1$.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Lemma 5.13)
Wir beweisen das Lemma per Induktion nach $n \geq 1$:
Induktionsanfang: n=1: Dann ist $\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$ offensichtlich die Primidealkette der Länge 0, die die gewünschte Eigenschaft besitzt.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \geq 2$ und für eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1}$ mit $r \in \mathfrak{p}_{n-1}$ gelte, dass eine Primidealkette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$ existiert mit $\mathfrak{q}_{n-1} = \mathfrak{p}_{n-1}$ und $r \in \mathfrak{q}_1$.
Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$: Für $r \in \mathfrak{p}_n$ untescheiden wir die folgenden zwei Fälle:
Fall 1: Es sei $r \in \mathfrak{p}_{n-1}$. Dann können wir die Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{p}_0, ..., \mathfrak{p}_{n-1}$ anwenden. Dieser Fall ist also trivial. Kommen wir nun zum eigentlich interessanten Fall.
Fall 2: Sei $r \notin \mathfrak{p}_{n-1}$.
Wegen des Lemmas von Zorn können wir ein $\mathfrak{q}_{n-1}$ als minimales Primideal bezüglich $(r) + \mathfrak{p}_{n-2}$ wählen, sodass $\mathfrak{q}_{n-1} \subseteq \mathfrak{p}_n$.
Nach Konstruktion gilt, dass $\mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$ und $r \in \mathfrak{q}_{n-1}$.
Dann erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung eine Primidealkette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$ mit $r \in \mathfrak{q}_1$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{q}_{n-1} \neq \mathfrak{p}_n$. Dazu betrachten wir die Restklassenabbildung $\pi : R \to R/\mathfrak{p}_{n-2}$. $\pi(\mathfrak{q}_{n-1})$ ist damit ein Primideal in $R/\mathfrak{p}_{n-2}$, welches nach Konstruktion minimal bezüglich $(r) + \mathfrak{p}_{n-2}$ ist. Da $R/\mathfrak{p}_{n-2}$ ein Integritätsbereich und somit $0 = \pi(\mathfrak{p}_{n-2}) \subsetneq \pi(\mathfrak{q}_{n-1})$ prim ist, gilt $ht(\pi(\mathfrak{q}_{n-1})) \geq 1$. Mit Satz 2.10 folgt dann, dass $ht(\pi(\mathfrak{q}_{n-1})) = 1$.
Nun gilt nach der Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}_n$ und somit $ht(\pi(\mathfrak{p}_n)) \geq 2$
$\Rightarrow \pi(\mathfrak{q}_{n-1}) \neq \pi(\mathfrak{p}_n) \Rightarrow \mathfrak{q}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}_n$. □

Korollar 2.12 Sei R ein noetherscher Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal, welches von $d \in \mathbb{N}$ Elementen erzeugt wird, und sei $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ minimal bezüglich I. Dann gilt $ht(\mathfrak{p}) \leq d$.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Korollar 5.14)
Wir beweisen das Korollar per Induktion nach $d \geq 1$:
Induktionsanfang: d=1: vgl. Satz 2.10
Induktionsvoraussetzung: Sei $d \geq 2$ und es gelte $ht(\mathfrak{p}) \leq d - 1$ für jedes von $d - 1$ Elementen erzeugte Ideal $I \subseteq R$.
Induktionsschritt: $d - 1 \mapsto d$:
Es sei $I = (r_1, ..., r_d)$ mit $r_1, ..., r_d \in R$. Dann ist $I/(r_d)$ ein Ideal von $R/(r_d)$, welches von $d - 1$ Elementen erzeugt wird. Sei dazu die Restklassenabbildung gegeben durch

$\pi : R \to R/(r_d)$. Da $r_d \in I \subseteq \mathfrak{p}$, ist $\pi(\mathfrak{p})$ prim in $R/(r_d)$ und nach Voraussetzung minimal bezüglich $I/(r_d)$. Jetzt können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, dass $ht(\pi(\mathfrak{p})) \leq d - 1$.
Sei nun $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen mit $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ und $n \geq 1$. Nach Voraussetzung gilt $r_d \in \mathfrak{p}_n$, d.h wir können Lemma 2.11 anwenden und erhalten damit eine Primidealkette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n$ und $r_d \in \mathfrak{q}_1$. Dann ist $\pi(\mathfrak{q}_1) \subsetneq ... \subsetneq \pi(\mathfrak{q}_n)$ eine Kette von Primidealen in $R/(r_d)$.
Da $ht(\pi(\mathfrak{p})) \leq d - 1$ ist, folgt, dass $n \leq d$ und damit, dass $ht(\mathfrak{p}) \leq d$. □

Jetzt können wir endlich das Endresultat dieses Abschnittes beweisen.

Satz 2.13 Wenn $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring ist, dann gilt $dim(R) \leq dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Korollar 5.14)
Sei $e = dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Mit dem Lemma von Nakayama folgt dann ,dass $\mathfrak{m}$ von e Elementen erzeugt wird. Zudem ist $\mathfrak{m}$ minimal bezüglich sich selbst und dann folgt mit Korollar 2.12, dass $dim(R) = ht(\mathfrak{m}) \leq e$. □

Bemerkung Dass R lokal ist, ist wesentlich. Es gibt nicht lokale noethersche Ringe unendlicher Krulldimension.
Nagata gab dazu das folgende Beispiel:
Sei K ein Körper und $R := K[x_1, x_2, ...]$ der Polynomring über K in abzählbar vielen Variablen. Dann ist $\mathfrak{p}_i := (x_{2^{i-1}}, x_{2^{i-1}+1}, ..., x_{2^i-1})$ für $i \geq 1$ ein Primideal. Wir definieren als multiplikativ abgeschlossene Menge $S := R \setminus \cup_{i \geq 1} \mathfrak{p}_i$. Dann existiert für jedes $i \geq 1$ eine Primidealkette $(x_{2^{i-1}}) \subsetneq (x_{2^{i-1}}, x_{2^{i-1}+1}) \subsetneq ... \subsetneq (x_{2^{i-1}}, x_{2^{i-1}+1}, ..., x_{2^i-1})$ und offensichtlich ist das Supremum dieser Primidealketten unendlich, also gilt $dim(RS^{-1}) = \infty$, wobei RS^{-1} ein noetherscher Ring ist (vgl. [3] oder alternativ [8]).

3 Eigenschaften regulärer Ringe

Im Folgenden Abschnitt werden wir ein paar grundlegende Eigeschaften regulärer Ringe zeigen.

3.1 Reguläre Ringe sind Integritätsbereiche

Lemma 3.1 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch, $x \in \mathfrak{m}$ und $dim(R) = n$. Dann gilt $dim(R/(x)) \geq n - 1$.

Beweis. (vgl. [7], 2.5.2 Theorem 5.15)
Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$ eine Primidealkette in R. Es gilt $x \in \mathfrak{p}_n$ und aus Lemma 2.11 folgt, dass eine Primidealkette $\mathfrak{q}_1 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n$ und $x \in \mathfrak{q}_1$ existiert. Wir betrachten

nun die Restklassenabbildung $\pi : R \to R/(x)$ und folgern, dass $\pi(\mathfrak{q}_1) \subsetneq ... \subsetneq \pi(\mathfrak{q}_n)$ eine Primidealkette in $R/(x)$ ist. Damit folgt sofort, dass $dim(R/(x)) \geq n-1$. □

Lemma 3.2 Sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär lokal, wobei $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$ und d die minimale Anzahl von Erzeugern von $\mathfrak{m}$ ist. Dann ist auch $R/(x_1, ..., x_i)$ regulär lokal für $1 \leq i \leq d$.

Beweis. Schritt 1: Dass $R_i := R/(x_1, ..., x_i)$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{n}_i := \mathfrak{m}/(x_1, ..., x_i)$ ist, ist klar.
Schritt 2: Wir zeigen nun per Induktion nach $i \geq 1$, dass R_i regulär ist:
Induktionsanfang: i=1: Nach Satz 2.13 gilt $dim(R_1) \leq dim_{R_1/\mathfrak{n}_1}(\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_1^2) = d-1$, denn angenommen $dim_{R_1/\mathfrak{n}_1}(\mathfrak{n}_1/\mathfrak{n}_1^2) < d-1$, also o.B.d.A $\mathfrak{n}_1 = (x_2, ..., x_{d-1})$. Dann folgt mit dem Lemma von Nakayama, dass $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_{d-1})$, was ein Widerspruch zur minimalen Anzahl d der Erzeuger von $\mathfrak{m}$ ist.
Mit Lemma 3.1 gilt auch $dim(R_1) \geq d-1$ und damit ist R_1 regulär.
Induktionsvoraussetzung: Für $i > 1$ sei R_{i-1} regulär.
Induktionsschritt: $i-1 \mapsto i$: Da $R_i \cong R_{i-1}/(x_i)$ ist und R_{i-1} nach der Induktionsvoraussetzung regulär ist, folgt mit denselben Argumenten wie aus dem Induktionsanfang, dass R_i regulär ist. □

Bemerkung Aus dem Beweis von Lemma 3.2 folgt damit unter anderem auch, dass $dim(R_i) = dim_{R_i/\mathfrak{n}_i}(\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_i^2) = d-i$.

Lemma 3.3 Es seien $I_1, ..., I_n, J \in R$ Ideale, sodass $J \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$. Wenn maximal zwei der I_j, $1 \leq j \leq n$, nicht prim sind, dann gilt: $\exists k \in \{1, ..., n\} : J \subseteq I_k$.

Beweis. (vgl. [4], Lemma 3.3)
Wir beweisen das Lemma per Induktion nach $n \geq 1$:
$n = 1 :$ Der Fall ist trivial.
$n = 2 :$ Seien I_1, I_2 Ideale und $J \subseteq I_1 \cup I_2$. Angenommen es existieren $x, y \in J$ mit $x \notin I_2$ und $y \notin I_1$. Dann sind auch $x + y \notin I_1$ und $x + y \notin I_2$, aber es gilt $x + y \in J$, da J ein Ideal ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $J \subseteq I_1 \cup I_2$ und damit folgt, dass $J \subseteq I_1$ oder $J \subseteq I_2$.
Nun sei $n > 2$ und die Aussage für $n-1$ wahr.
Angenommen die Aussage ist für n falsch. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass J keine Teilmenge von $\cup_{i \neq j} I_j$ ist für $1 \leq i \leq n$, d.h. wir finden ein $x_i \in J$ mit $x_i \notin \cup_{i \neq j} I_j$. Wegen $J \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$ gilt dann $x_i \in I_i$. Nun betrachten wir das Element
$x_1 + x_2 \cdot ... \cdot x_n \in J$, wobei wir o.B.d.A I_1 als prim annehmen.
Dann gilt: $x_1 + x_2 \cdot ... \cdot x_n \notin I_i$ für $i \neq 1$ und auch $x_1 + x_2 \cdot ... \cdot x_n \notin I_1$, denn angenommen $x_1 + x_2 \cdot ... \cdot x_n \in I_1 \Rightarrow x_2 \cdot ... \cdot x_n \in I_1 \Rightarrow \exists l \in \{2, ..., n\}$ mit $x_l \in I_1$, was ein Widerspruch ist. Damit gilt aber $x_1 + x_2 \cdot ... \cdot x_n \in J \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher war unsere Annahme falsch und die Aussage ist für n wahr. □

Jetzt können wir die erste wichtige Eigenschaft beweisen:

Satz 3.4 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär lokal. Dann ist R ein Integritätsbereich.

Beweis. (vgl. [4], Korollar 10.14)
Wir beweisen den Satz per Induktion nach $dim(R) \geq 0$:
$dim(R) = 0$: Dann ist R nach dem Lemma von Nakayama ein Körper, also insbesondere ein Integritätsbereich.
Induktionsvoraussetzung: Sei $d \geq 1$ und für einen lokalen regulären Ring mit Krulldimension $d-1$ gelte, dass dieser ein Integritätsbereich ist.
Induktionsschritt: $d-1 \mapsto d$:
Nach dem Lemma von Nakayama gilt $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$ und da R noethersch ist, besitzt R nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$.
Es gilt $\mathfrak{m} \neq \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j \cup \mathfrak{m}^2$, denn angenommen es würde $\mathfrak{m} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j \cup \mathfrak{m}^2$ gelten. Dann folgt aus Lemma 3.3, dass $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ oder $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_k$ für ein $k \in \{1, ..., n\}$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Also existiert ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $x \notin \mathfrak{m}^2$ und $x \notin \mathfrak{p}_k$ für $1 \leq k \leq n$.
Wir definieren nun $S := R/(x)$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}/(x)$. Dann gilt $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \cong (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)/(x + \mathfrak{m}^2)$ und daher $dim(S) \leq dim_{S/\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - 1 = d - 1$ nach Satz 2.13 und da $x + \mathfrak{m}^2 \neq 0$. Nach Lemma 3.1 gilt aber auch $dim(S) \geq d - 1$ und daher $dim(S) = d - 1$, also ist S regulär. Dann gilt nach der Induktionsvoraussetzung, dass S ein Integritätsbereich ist und somit ist (x) ein Primideal. Nach der Voraussetzung ist (x) aber nicht minimal, d.h. es existiert ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $\mathfrak{p}_k \subsetneq (x)$.
Sei $y \in \mathfrak{p}_k \Rightarrow y = ax$ für ein $a \in R$ und, da $x \notin \mathfrak{p}_k$, folgt, dass $a \in \mathfrak{p}_k \Rightarrow \mathfrak{p}_k = x\mathfrak{p}_k$ $\Rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_k$ und dann folgt aus dem Lemma von Nakayama, dass $\mathfrak{p}_k = 0 \Rightarrow$ R ist ein Integritätsbereich. □

Bemerkung Aus Lemma 3.2 und Satz 3.4 folgt, dass für einen regulär lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ mit $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$, wobei d die minimale Anzahl von Erzeugern von $\mathfrak{m}$ ist, $d = dim(R)$ gilt und die Ideale $(x_1, ..., x_i)$ für $1 \leq i \leq d$ prim sind.

3.2 Regularität von Polynomalgebren

Weiter unten zeigen wir, dass zusammen mit einem Ring R auch der Polynomring R[t] regulär ist. Induktiv folgt daraus der folgende Satz, den man aber auch sehr leicht direkt beweisen kann. Wir verwenden im Folgenden an mehreren Stellen das Hauptresultat dieser Arbeit in Satz 6.6 und Korollar 6.7. Dadurch ergibt sich aber kein Zirkelschluss.

Satz 3.5 Wenn K ein Körper ist, dann ist $K[t_1, ..., t_n]$ regulär.

Bemerkung Körper sind reguläre lokale Ringe der Dimension 0.

Beweis. (vgl. [5], Korollar 2.3.4)

Der Einfachheit halber setzen wir $R := K[t_1, ..., t_n]$. Dann gilt $dim(R) = n$.
Nach Resultaten aus der Algebra 2 gilt:
$R_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R_\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{m} =: \kappa$ und $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}R_\mathfrak{m})^2 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ für alle $\mathfrak{m} \in Max(R)$. Nach Korollar 6.7 und Satz 2.13 genügt es wegen $dim(R_\mathfrak{m}) = dim(R) = n$ (vgl. [7], 2.5.3 Proposition 5.23 (b)) zu zeigen, dass $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq n$ für $\mathfrak{m} \in Max(R)$:
Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach $n \geq 0$:
Induktionsanfang: n=0: Dann ist $R = K$ ein Körper und somit regulär.
Induktionsvoraussetzung: Wir setzen $\kappa(\mathfrak{n}) := K[t_1, ..., t_{n-1}]/\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{n} \in Max(K[t_1, ..., t_{n-1}])$. Es gelte $dim_{\kappa(\mathfrak{n})}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) \leq n - 1$.
Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$:
Sei $\alpha_i := t_i + \mathfrak{m} \in \kappa$ und I eine beliebige Indexmenge in den natürlichen Zahlen. Dann ist $\kappa = K[\alpha_1, ..., \alpha_n]$, denn für $f(t_1, ..., t_n) \in R$ gilt $f(t_1, ..., t_n) + \mathfrak{m} = f(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.
Sei $\mathfrak{n} := ker(K[t_1, ..., t_{n-1}] \hookrightarrow K[t_1, ..., t_n] \to \kappa)$. Da $dim(\kappa) = 0$ und κ eine K-Algebra vom endlichen Typ ist, folgt durch Noether Normalisierung, dass $\kappa|K$ endlich ist $\Rightarrow \kappa(\mathfrak{n})|K$ ist endlich und als Unterring von κ ein Integritätsbereich $\Rightarrow \kappa(\mathfrak{n})|K$ ist ganz $\Rightarrow \kappa(\mathfrak{n})$ ist ein Körper, da K ein Körper ist, also ist $\mathfrak{n} \in Max(K[t_1, ..., t_{n-1}])$. Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir jetzt, dass $\mathfrak{n} = (f_1, ..., f_{n-1})$ mit $f_i \in K[t_1, ...t_{n-1}]$ für $1 \leq i \leq n-1$. Sei nun $\mu \in \kappa(\mathfrak{n})[t_n]$ das Minimalpolynom von $\alpha_n \in \kappa$ über $\kappa(\mathfrak{n})$, d.h. $(\mu) = ker(\kappa(\mathfrak{n})[t_n] \to \kappa,\ t_n \mapsto \alpha_n)$. Per Definition von $\mathfrak{n}$ ist $\kappa(\mathfrak{n}) = K[\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}] \Rightarrow \exists g_i \in K[t_1, ..., t_{n-1}]$ mit $\mu = \sum_{i\in I} g_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})t_n^i$.
Setze $f_n := \sum_{i\in I} g_i(t_1, ..., t_{n-1})t_n^i \in R \Rightarrow f_n(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \mu(\alpha_n) = 0 \Rightarrow f_n \in \mathfrak{m}$.
Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass $\mathfrak{m} = (f_1, ..., f_n)$ und sind dann fertig:
$f \in \mathfrak{m} \Rightarrow f(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, t_n) \in (\mu)$, d.h. $f(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, t_n) = h \cdot \mu$ für ein $h \in \kappa(\mathfrak{n})[t_n]$. Dann ist $h = \sum_{i\in I} h_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})t_n^i$, $h_i \in K[t_1, ..., t_{n-1}]$.
Ferner gilt $f - (\sum_{i\in I} h_i(t_1, ..., t_{n-1})t_n^i)f_n = \sum_{i\in I} s_i(t_1, ..., t_{n-1})t_n^i \in R = K[t_1, ..., t_{n-1}][t_n]$ und dann ist $\sum_{i\in I} s_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})t_n^i =$
$f(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, t_n) - (\sum_{i\in I} h_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})t_n^i) \cdot f_n(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, t_n) =$
$f(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, t_n) - h \cdot \mu = h \cdot \mu - h \cdot \mu = 0$ in $\kappa(\mathfrak{n})[t_n]$
$\Rightarrow \forall i : s_i(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) = 0$
$\Rightarrow \forall i : s_i(t_1, ..., t_{n-1}) \in \mathfrak{n} = (f_1, ..., f_n)$
$\Rightarrow f = \sum_{i\in I} s_i(t_1, ..., t_{n-1})t_n^i + (\sum_{i\in I} h_i(t_1, ..., t_{n-1})t_n^i)f_n \in (f_1, ..., f_n)$.
Insgesamt erhalten wir dann, dass aus $f \in \mathfrak{m}$ folgt, dass $f \in (f_1, ..., f_n)$ ist und damit gilt $\mathfrak{m} \subseteq (f_1, ..., f_n)$. Also ist $\mathfrak{m} = (f_1, ..., f_n)$. □

Satz 3.6 Wenn R regulär ist, dann ist auch R[t] regulär.

Beweis. (vgl.[10], Theorem 19.5)
Nach Korollar 6.7 genügt es, nur maximale Ideale zu betrachten. Sei also $\mathfrak{m} \in Max(R[t])$. Dann ist $\mathfrak{p} := \mathfrak{m} \cap R$ ein Primideal in R. $R_\mathfrak{p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ und es gilt $R_\mathfrak{p}[t]_{\mathfrak{m}'} \cong R[t]_\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}R_{\mathfrak{p}[t]}$, wie man leicht nachprüft. Sei also o.B.d.A R

ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$.
Da $R/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, ist $R[t]/\mathfrak{p}R[t] \cong (R/\mathfrak{p})[t]$ ein Hauptidealring. Damit existiert ein normiertes Polynom $f \in R[t]$, sodass $f + \mathfrak{p}R[t] \in (R/\mathfrak{p})[t]$ irreduzibel ist und $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}R[t]$ erzeugt. Es folgt, dass $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p}, f)$ gilt.
Nach Satz 2.13 gilt:

$$\begin{aligned} dim(R[t]_\mathfrak{m}) = ht(\mathfrak{m}) &\leq dim_{R[t]_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}R[t]_\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}R[t]_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2R[t]_\mathfrak{m}) \\ &\leq 1 + dim_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) = 1 + dim(R) = 1 + ht(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

Sei $d := ht(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette in R. Dann ist $\mathfrak{p}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p} \subsetneq (\mathfrak{p}, f) = \mathfrak{m}$ eine Primidealkette in $R[t]$ und es folgt, dass $ht(\mathfrak{m}) \geq d + 1$. Damit ist $R[t]$ regulär. □

3.3 Reguläre Ringe sind faktoriell

Lemma 3.7 Es sei R ein noetherscher Integritätsberich. Dann sind äquivalent:
(i) R ist faktoriell.
(ii) Für alle $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, die minimal bezüglich eines Hauptideals sind, gilt: $\mathfrak{p}$ ist selbst ein Hauptideal.

Beweis. (vgl. [4], Proposition 3.11a und 3.11b)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $r \in R$, $r \neq 0$ und $r \notin R^\times$. Dann existieren Primelemente $p_1, ..., p_m$ mit $r = p_1 \cdot ... \cdot p_m$.
Ferner sei $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ minimal bezüglich (r). Da $r = p_1 \cdot ... \cdot p_m \in \mathfrak{p}$, existiert ein $1 \leq i \leq m$ mit $(p_i) \subseteq \mathfrak{p}$. Wegen $r \in (p_i) \subseteq \mathfrak{p}$ folgt aus der Minimalität von $\mathfrak{p}$, dass $(p_i) = \mathfrak{p}$, denn es gilt auch $(p_i) \in Spec(R)$. Also ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Da R noethersch ist, wird jede aufsteigende Kette von Hauptidealen stationär. Nun wollen wir zeigen, dass jedes Element $r \in R$ mit $r \neq 0$ und $r \notin R^\times$ ein Produkt aus irreduziblen Elementen ist.
Angenommen unsere Behauptung gilt nicht. Sei also $r_1 \in R$ nicht irreduzibel. Dann lässt sich r_1 schreiben als $r_1 = ab$ mit $a, b \in R$, $a, b \neq 0$, $a, b \notin R^\times$. Die Elemente a und b können nicht beide Produkte irreduzibler Elemente sein, da dies sonst auch für $r_1 = ab$ der Fall wäre. Sei also o.B.d.A $r_2 := b$ kein solches Produkt. Dann gilt $(r_1) \subsetneq (r_2)$, und wiederholt man induktiv dasselbe Argument, so erhält man eine Kette von Hauptidealen, die nicht stationär wird, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.
Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass jedes irreduzible Element $r \in R$ prim ist.
Sei $\mathfrak{p}$ minimal bezüglich $(r) \subseteq R \Rightarrow \mathfrak{p} = (p)$ für ein Primelement $p \in R \Rightarrow r = fp$ und da r irreduzibel ist, folgt $f \in R^\times$, also $(r) = (p)$. Damit folgt, dass jedes irreduzible Element prim ist und somit kann jedes Element aus R als Produkt von Primfaktoren dargestellt werden. □

Korollar 3.8 Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Dann ist R faktoriell, wenn alle Primideale der Höhe 1 Hauptideale sind.

Beweis. Als erstes wollen wir zeigen, dass jedes Primideal der Höhe 1 minimal bezüglich eines Hauptideals ist. Dazu wählen wir ein beliebiges $r \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Angenommen $\mathfrak{p}$ ist nicht minimal bezüglich (r). Dann existiert ein $\mathfrak{q} \in Spec(R)$ mit $(r) \subseteq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ und es folgt, dass $ht(\mathfrak{p}) \geq 2$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, d.h. unsere Annahme war richtig.
Dieses Argument zusammen mit Satz 2.10 zeigt, dass die Primideale der Höhe kleiner oder gleich 1 genau die Primideale sind, die minimal bzgl. eines Hauptideals sind und dann folgt aus Lemma 3.7 die Behauptung. □

Lemma 3.9 Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, $x \in R$ ein Primelement und $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $x \notin \mathfrak{p}$
(ii) $\exists q \in \mathfrak{p}$: $qR_x = \mathfrak{p}R_x$
Dann gilt: $\mathfrak{p} = (q)$ in R. Ist R_x faktoriell, so auch R.

Beweis. (vgl.[4], Lemma 19.20)
Setze $X := \{q'R \mid q' \in \mathfrak{p},\, q'R_x = \mathfrak{p}R_x\}$. Dann ist X eine nach Voraussetzung nicht-leere Menge von Idealen im noetherschen Ring R, besitzt also ein maximales Element qR mit $qR_x = \mathfrak{p}R_x$ und $q \in \mathfrak{p}$.
Sei o.B.d.A $q \notin xR$, denn angenommen $q \in xR$:
Dann unterscheiden wir zwischen den folgenden zwei Fällen.
Fall 1: Sei $q = 0 \Rightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_x \cap R = qR_x \cap R = 0$ ist ein Hauptideal.
Fall 2: Sei $q \neq 0$, also $q = r_0 x \in \mathfrak{p} \Rightarrow qR \subseteq r_0 R$ und $\mathfrak{p}R_x = qR_x = r_0 x R_x = r_0 R_x$
$\Rightarrow qR = r_0 R$ wegen der Maximalität von qR. Nun ersetzen wir q durch r_0 und machen dasselbe mit r_0. Sei also $r_0 = r_1 x \Rightarrow r_0 R \subseteq r_1 R$ und wegen der Maximalität folgt wieder $r_0 R = r_1 R$ und insgesamt gilt $q = r_0 x = r_1 x^2$.
Führen wir das induktiv weiter, gilt $q = r_0 x = r_1 x^2 = ... = r_n x^{n+1} \Rightarrow q \in x^{n+1}R$. Nach endlich vielen Schritten muss dann $r_n \notin xR$ gelten, da anderenfalls $q \in \cap_{n \geq 0} x^{n+1}R = 0$ nach dem Krull'schen Durchschnittssatz gelten würde (vgl. Satz 2.7), im Widerspruch zu $q \neq 0$. Indem wir q durch r_n ersetzen, können wir daher $q \notin xR$ annehmen.
Jetzt behaupten wir, dass $\mathfrak{p} = qR$ gilt.
$\supseteq$: Diese Richtung ist trivial.
$\subseteq$: Sei dazu $b \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}R_x = qR_x \Rightarrow b = \frac{qa}{x^n}$ für ein $a \in R$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n b = qa \in xR$.
Da $q \notin xR$ und x prim ist folgt, dass $a \in xR$, also $a = s_1 x$ für ein $s_1 \in R \Rightarrow x^n b = q s_1 x$
$\Rightarrow x^{n-1} b = q s_1$ und wie gerade folgt wieder $s_1 \in xR$, also $x^{n-1}b = q s_2 x$ für ein $s_2 \in R$ und somit $x^{n-2} b = q s_2$. Nach n Schritten erhalten wir, dass $b = q s_n \in qR$ und somit die Behauptung.
Nun sei R_x faktoriell.

Die Primideale aus R der Höhe 1 sind genau die Primideale der Höhe 1, die x nicht enthalten, und (x) selbst. Aus Korollar 3.8 und Lemma 3.9 folgt, dass diese Primideale Hauptideale sind und dann folgt mit Korollar 3.8, dass R faktoriell ist. □

Lemma 3.10 Sei $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge, M ein R-Modul und $MS^{-1} = M \otimes_R RS^{-1}$ die Lokalisierung von M an S. Dann ist die Abbildung
$\Phi : MS^{-1} \to MRS^{-1} = \{\frac{x}{s} \mid x \in M, s \in S\}$, $x \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s}$, ein Isomorphismus.

Beweis. (vgl. [1], 4.3 Proposition 3)
Um das Lemma zu zeigen, geben wir einfach eine zu Φ inverse Abbildung
$\Psi : MRS^{-1} \to MS^{-1}$, $\frac{x}{s} \mapsto x \otimes \frac{1}{s}$, an. Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass Ψ wohldefiniert ist:
Sei dazu $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ für $x, x' \in M, s, s' \in S$ und $(xs' - x's)t = 0$ für ein $t \in S$.
$\Psi((xs' - x's)t) = \Psi((\frac{xs'-x's}{ss'})ss't) = (x \otimes \frac{1}{s} - x' \otimes \frac{1}{s'})ss't = (xs' \otimes 1 - x's \otimes 1)t = ((xs' - sx')t) \otimes 1 = 0$ und, da $ss't$ eine Einheit in RS^{-1} ist, folgt, dass Ψ wohldefiniert ist. □

Definition 3.11 Ein R-Modul M heißt stabil-frei, wenn ein freier R-Modul F existiert, sodass $M \oplus F$ frei ist.

Lemma 3.12 Es sei P ein projektiver R-Modul und es existiere eine exakte Sequenz $0 \to F_n \to F_{n-1} \to ... \to F_0 \to P \to 0$, sodass für $0 \leq i \leq n$ die F_i endlich erzeugt und frei sind. Dann ist P stabil-frei.

Beweis. (vgl.[4], Proposition 19.16, vgl.[2], Lemma 13.6)
Wir beweisen das Lemma per Induktion nach $n \geq 0$. Für $n = 0$ ist $P \cong F_0$. Dieser Fall ist also trivial. Wenn $n = 1$ gilt, erhalten wir wie in Lemma 4.16, dass $F_0 \cong P \oplus ker(F_0 \to P) = P \oplus im(F_1 \to F_0) \cong P \oplus F_1$. Dieser Fall ist somit auch klar. Sei also $n > 1$. Dann ist mit Lemma 6.3 $ker(F_0 \to P)$ projektiv. Wir erhalten eine exakte Sequenz $0 \to F_n \to ... \to F_1 \to ker(F_0 \to P) \to 0$ der Länge $n - 1$. Damit ist nach der Induktionsvoraussetzung $ker(F_0 \to P)$ stabil-frei, d.h. es existiert ein freier R-Modul F, sodass $ker(F_0 \to P) \oplus F$ frei ist. Mit denselben Argumenten wie in Lemma 4.16 ist $F_0 \cong P \oplus ker(F_0 \to P)$ und somit $F_0 \oplus F \cong P \oplus ker(F_0 \to P) \oplus F$. □

Lemma 3.13 Es sei M ein R-Modul, sodass $M \oplus R^{n-1} \cong R^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $M \cong R$.

Beweis. (vgl.[4], Lemma 19.18)

□

Satz 3.14 Jeder reguläre lokale Ring ist faktoriell.

Beweis. (vgl. [4], Theorem 19.19 und [2], Theorem 13.1)
Es sei $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$ mit $d = dim(R)$ und $x \in \{x_1, ..., x_n\}$. Wie wir in Lemma 3.2 gesehen haben, ist dann $R/(x)$ wieder regulär lokal und damit nach Satz 3.4 ein Integritätsbereich, d.h. x ist ein Primelement.
Nach Lemma 3.9 genügt es zu zeigen, dass R_x faktoriell ist, d.h nach Korollar 3.8 muss jedes $Q \in Spec(R_x)$ mit $ht(Q) = 1$ ein Hauptideal sein.
Sei $\mathfrak{n} \in Max(R_x)$ beliebig. Dann gilt $x \notin \mathfrak{n} \cap R$. Jetzt betrachten wir die multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen $T := R \setminus (\mathfrak{n} \cap R) \subseteq R$, $S := \{x^n \mid n \geq 0\} \subseteq R$ und
$S_1 := \{x^{-n} \mid n \geq 0\} \subseteq R_x$, und sei $f : R \to R_x$ die kanonische Abbildung. Es gilt dann $S \cdot T = T$ und $S_1 \cdot f(T) = R_x \setminus \mathfrak{n}$. Wegen Transitivität von Lokalisierungen und wegen $S_1 \subseteq R_x^\times$ erhalten wir dann, dass
$R_{\mathfrak{n}\cap R} = RT^{-1} \cong (RS^{-1})f(T)^{-1} = R_x f(T)^{-1} \cong (R_x S_1^{-1})f(T)^{-1} \cong (R_x)_\mathfrak{n}$.
Nach Satz 6.6 ist $R_{\mathfrak{n}\cap R}$ wieder regulär lokal und es gilt
$dim(R_{\mathfrak{n}\cap R}) = ht(\mathfrak{n} \cap R) < ht(\mathfrak{m}) = dim(R)$, da $x \notin \mathfrak{n} \cap R$.
Jetzt wollen wir per Induktion nach d beweisen, dass R_x faktoriell ist:
$d = 0$: Dann ist R ein Körper, also unter anderem faktoriell.
$d = 1$: Dann sind $(0) \subsetneq (x) = \mathfrak{m}$ die einzigen Primideale von $R \Rightarrow \mathfrak{m}$ ist das einzige Primideal der Höhe eins und ein Hauptideal. Nach 3.8 ist R damit faktoriell.
Induktionsvoraussetzung: Sei $d > 1$ und für alle Ringe S mit $dim(S) < d$ gelte die gewünschte Eigenschaft.
Wir definieren $\mathfrak{p} := Q \cap R \in Spec(R)$. Dann ist nach 2.1 und 3.10 $Q = \mathfrak{p}R_x = \mathfrak{p}_x$. Da R regulär ist, folgt mit Satz 6.5, dass $gldim(R) < \infty$, d.h. es existiert eine exakte Sequenz $0 \to F_n \to ... \to F_0 \to \mathfrak{p} \to 0$, sodass alle F_i endlich erzeugt und frei sind. Tensorieren wir diese Sequenz mit R_x, wenden 3.10 an und beachten, dass $f : R \to R_x$ ein flacher Ringhomomorphismus ist, erhalten wir eine exakte Sequenz $0 \to F_n R_x \to ... \to F_0 R_x \to Q \to 0$ mit freien und endlich erzeugten R_x-Moduln $F_i R_x$ für $0 \leq i \leq n$.
Nach der Induktionsvoraussetzung gilt, dass $(R_x)_\mathfrak{n}$ faktoriell ist, also ist $Q_\mathfrak{n}$ ein Hauptideal und damit ein freier $(R_x)_\mathfrak{n}-$Modul. Da $\mathfrak{n} \in R_x$ beliebig war und Q endlich erzeugt ist folgt daraus, dass Q projektiv ist. Nach Lemma 3.12 ist Q stabil-frei und nach Lemma 3.13 ist Q frei. Es gilt $rg_{R_x}(Q) = rg_{(R_x)_\mathfrak{n}}(Q_\mathfrak{n}) = 1$. Damit ist Q ein Hauptideal, also ist R_x faktoriell.

□

4 Homologische Algebra

Das folgende Kapitel wird dazu benötigt unser Hauptresultat in Kapitel 6 zu zeigen. In diesem Kapitel werden wir verschiedene Komplexe betrachten. Ein Kettenkomplex $M_* : ... \to M_{n+1} \stackrel{d_{n+1}}{\to} M_n \stackrel{d_n}{\to} M_{n-1} \stackrel{d_{n-1}}{\to} ...$ ist eine Sequenz von R-Moduln zusammen mit R-linearen Abbildungen, für die $d_n \circ d_{n+1} = 0$ gilt. Diese Voraussetzung erlaubt uns

den R-Modul $H_n(M_*) := ker(d_n)/im(d_{n+1})$ zu betrachten, welcher als n-te Homologie des Kettenkomplexes bezeichnet wird. Diese Komplexe spielen später eine zentrale Rolle, wenn wir projektive Auflösungen betrachten werden.
Auf der anderen Seite werden wir auch Kokettenkomplexe betrachten. Ein Kokettenkomplex $M^* : ... \to M^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} M^n \overset{d^n}{\to} M^{n+1} \overset{d^{n+1}}{\to} ...$ ist ebenfalls eine Sequenz von R-Moduln zusammen mit R-linearen Abbildungen, für die $d^n \circ d^{n-1} = 0$ gilt. Diese Voraussetzung erlaubt uns dann wiederum den R-Modul $H^n(M^*) := ker(d^n)/im(d^{n-1})$ zu betrachten, welcher als n-te Kohomologie bezeichnet wird. Diese Komplexe werden später eine zentrale Rolle spielen, wenn wir injektive Auflösungen betrachten.

Definition 4.1 (i) Ein R-Modul I heißt injektiv, wenn für jeden injektiven R-Modulhomomorphismus $\phi : E' \to E$ die Abbildung $Hom_R(E, I) \to Hom_R(E', I)$, $f \mapsto f \circ \phi$, surjektiv ist.
(ii) Ein R-Modul P heißt projektiv, wenn für jeden surjektiven R-Modulhomomorphismus $\phi : M \to M'$ die Abbildung $Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, M')$, $f \mapsto \phi \circ f$, surjektiv ist.

Lemma 4.2 Für einen R-Modul M sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) M ist injektiv.
(ii) $Hom_R(R, M) \to Hom_R(I, M)$ ist surjektiv für alle Ideale $I \subseteq R$.

Beweis. (vgl. [1], 5.3 Proposition 5)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $I \subseteq R$ ein Ideal $\Rightarrow I \hookrightarrow R$ ist injektiv $\Rightarrow Hom_R(R, M) \to Hom_R(I, M)$ ist surjektiv, da M nach Voraussetzung injektiv ist.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $N' \hookrightarrow N$ eine injektiver Homomorphismus von R-Moduln und $f' : N' \to M$ ein weiterer Homomorphismus.
Wir betrachten alle Paare (f^*, N^*), wobei $N^* \subseteq N$ ein Untermodul mit der Eigenschaft $N' \subseteq N^*$, und $f^* : N^* \to M$ ein Homomorphismus mit der Eigenschft $f^*_{|N'} = f'$ ist.
Dazu definieren wir die Relation $(f^*, N^*) \leq (f^{*\prime}, N^{*\prime}) :\Leftrightarrow N^* \subseteq N^{*\prime}$ und ${f^{*\prime}}_{|N^*} = f^*$. Nun setzen wir $X := \{(f^*, N^*) \mid N^* \subseteq N,\ f^* : N^* \to M,\ f^*_{|N'} = f'\}$ und wegen $(f', N') \in X$ gilt $X \neq \emptyset$. Jetzt wählen wir eine Menge $Y \in X$, die bzgl. $\leq$ total geordnet ist. Dann ist offensichtlich das Paar (f_J, J) mit $J := \cup_{N^* \in Y} N^*$ eine obere Schranke von Y, die in X liegt, da Y total geordnet ist. Hierbei ist $f_J : J \to M$ die eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung mit $f_{J_{|N^*}} = f^*$ für alle $(f^*, N^*) \in Y$.
Aus dem Lemma von Zorn folgt dann, dass X ein maximales Element $(\hat{f}, \hat{N})$ besitzt.
Jetzt wollen wir zeigen, dass $\hat{N} = N$ gilt.
Angenommen es existiert ein $y \in N \setminus \hat{N}$. Dann setzen wir $I := \{r \in R | ry \in \hat{N}\} \subseteq R$. Nun ist I offensichtlich ein Ideal in R, für das gilt $\hat{N} \cap Ry = Iy$. Nach Voraussetzung existiert jetzt zu der R-linearen Abbildung $I \to M$, $r \mapsto \hat{f}(ry)$, eine R-lineare Abbildung $g^* : R \to M$ mit $g^*(r) = \hat{f}(ry)$ für alle $r \in I$. Jetzt sei $x := g^*(1) \Rightarrow \hat{f}(ry) = g^*(r) = rx$ $\forall r \in I$. Wenn nun ein $r \in R$ die Bedingung $ry = 0$ erfüllt, so gilt $r \in I$, da $0 \in \hat{N}$. Damit

folgt dann, dass $rx = 0$ gilt.
Durch einfaches Nachrechnen folgt, dass $g : Ry \to M$, $ry \mapsto rx$, eine wohldefinierte R-lineare Abbildung ist, für die $g_{|\hat{N} \cap Ry}(ry) = \hat{f}(ry)$ gilt.
Dann erhalten wir ebenfalls durch einfaches Nachrechnen eine R-lineare und wohldefinierte Abbildung $f : \hat{N} + Ry \to M$, $z + ry \mapsto \hat{f}(z) + g(ry)$. Also haben wir eine erweiterte R-lineare Abbildung f von $\hat{f}$ gefunden, aber es gilt $\hat{N} \subsetneq \hat{N} + Ry$, was ein Widerspruch zur Maximalität von $\hat{N}$ ist und somit folgt $N = \hat{N}$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass zu der R-linearen Abbildung $f' : N' \to M$ eine R-lineare Abbildung $f : N \to M$ existiert mit $f_{|N'} = f'$. Nun waren N, N' beliebig gewählt und $N' \hookrightarrow N$ injektiv $\Rightarrow Hom_R(N, M) \to Hom_R(N', M)$ ist surjektiv $\Rightarrow M$ ist injektiv. □

Definition 4.3 (i) Es sei M ein R-Modul. Dann ist eine injektive Auflösung I^* von M eine exakte Sequenz der Form $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \ldots$, wobei I^i, $i \in \mathbb{N}$, injektive R-Moduln sind. Gilt $I^k = 0$ für alle $k > n$ und $I^n \neq 0$, so sagen wir, die Auflösung habe die Länge n.
(ii) Die injektive Dimension von M ist definiert als
$id(M) := \inf\{n \in \mathbb{N}|$ M besitzt eine injektive Auflösung der Länge n $\}$, d.h. die kürzeste injektive Auflösung, die M besitzt hat die Form $0 \to M \to I^0 \to \ldots \to I^n \to 0$. Für alle $k > n$ ist also $I^k = 0$ und wir sagen, dass $id(M) = \infty$, falls keine solche Auflösung existiert.

Natürlich ist für Definition 4.3 (ii) zunächst zu zeigen, dass jeder R-Modul eine injektive Auflösung besitzt. Dazu verwenden wir den folgenden Satz ohne Beweis:

Satz 4.4 Jeder R-Modul M besitzt eine injektive Auflösung.

Beweis. (vgl. [1], 5.3 Proposition 3)

□

Definition 4.5 (i) Es sei M ein R-Modul. Dann ist eine projektive Auflösung P_* von M eine exakte Sequenz der Form $\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$, wobei P_i, $i \in \mathbb{N}$, projektive R-Moduln sind. Gilt $P_k = 0$ für alle $k > n$ und $P_n \neq 0$, so sagen wir, die Auflösung habe die Länge n.
(ii) Die projektive Dimension von M ist definiert als
$pd(M) := \inf\{n \in \mathbb{N}|$ M besitzt eine projektive Auflösung der Länge n $\}$, d.h. die kürzeste projektive Auflösung, die M besitzt hat die Form
$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$. Für alle $k > n$ ist also $P_k = 0$ und wir sagen, dass $pd(M) = \infty$, falls keine solche Auflösung existiert.

Satz 4.6 Jeder R-Modul M besitzt eine freie und damit projektive Auflösung.

Beweis. (vgl. [1], 5.1 Proposition 8)
Wir wählen ein Erzeugendensystem $(x_i)_{i \in I}$ von M und definieren $P_0 := R^{(I)}$. Dann ist die Abbildung $f : P_0 \to M$, $(r_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} r_i x_i$, surjektiv. Als nächstes wählen wir ein Erzeugendensystem von $ker(f)$ und wiederholen das ganze. Induktiv erhält man dann eine Auflösung P_* mit freien, also insbesondere projektiven, R-Moduln.

□

Definition 4.7 Seien M, N R-Moduln, P_* eine projektive Auflösung und I^* eine injektive Auflösung von M. Dann heißt $Ext_R^n(M, N) = H^n(Hom_R(P_*, N)) \cong H^n(Hom_R(M, I^*))$ die n-te Ext-Gruppe der R-Moduln M und N.

Bemerkung Wir haben in dieser Definition ohne Beweis verwendet, dass
$H^n(Hom_R(P_*, N)) \cong H^n(Hom_R(M, I^*))$ (vgl. [1], 5.4 Proposition 2).

Satz 4.8 Es seien M, N R-Moduln.
(i) Jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ induziert eine lange exakte Sequenz der Form $0 \to Hom_R(M'', N) \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M', N) \to Ext_R^1(M'', N) \to Ext_R^1(M, N) \to ...$
(ii) Jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ induziert eine lange exakte Sequenz der Form $0 \to Hom_R(M, N') \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, N'') \to Ext_R^1(M, N') \to Ext_R^1(M, N) \to ...$

Beweis. (vgl. [1], 5.4 Proposition 4)

□

Bemerkung (i) Aus dem Isomorphiesatz folgt, dass $Ext_R^0(M, N) \cong Hom_R(M, N)$
(vgl. [1], 5.4 Bemerkung 3)
(ii) Der Funktor $Hom_R(M, -)$ ist linksexakt im Sinne, dass eine kurze exakte Sequenz
$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ zu einer exakten Sequenz
$0 \to Hom_R(M, N') \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, N'')$ wird (vgl. [4], 2.2 Eigenschaft 4).
(iii) Der Funktor $Hom_R(-, N)$ ist linksexakt im Sinne, dass eine kurze exakte Sequenz
$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ zu einer exakten Sequenz
$0 \to Hom_R(M'', N) \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M', N)$ wird (vgl. [4], 2.2 Eigenschaft 4).

Lemma 4.9 Es sei M ein R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(i) $id(M) \leq n$.
(ii) $Ext_R^{n+1}(R/I, M) = 0$ für alle Ideale $I \subseteq R$.

Lemma 4.10 Es sei $n \geq 0$. Dann sind äquivalent:
(i) $pd(M) \leq n$ für alle R-Moduln M.
(ii) $pd(M) \leq n$ für alle endlich erzeugten R-Moduln M.
(iii) $id(N) \leq n$ für alle R-Moduln N.

(iv) $Ext_R^{n+1}(M, N) = 0$ für alle R-Moduln M, N.

Beweis. (vgl.[10], §19 Lemma 2)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Diese Richtung ist trivial.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann ist R/I ein endlich erzeugter R-Modul $\Rightarrow$ $Ext_R^{n+1}(R/I, N) = 0$, da nach Voraussetzung $pd(R/I) \leq n$. Aus Lemma 4.9 folgt dann $id(N) \leq n$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Diese Richtung ist trivial.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei P_* eine projektive Auflösung von M und setze $K_i := im(P_i \to P_{i-1}) \Rightarrow$ $... \to P_n \to ... \to P_i \to K_i \to 0$ ist eine projektive Auflösung von K_i.
Nun wollen wir zeigen, dass $Ext_R^n(M, N) \cong Ext_R^{n-i}(K_i, N)$ für alle $n > i$ gilt.
Dies zeigen wir per Induktion nach $i \geq 1$:
$i = 1$: Dafür definieren wir $K_1 := im(P_1 \to P_0)$ und erhalten somit eine kurze exakte Sequenz $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$. Nach Satz 4.8 induziert diese Sequenz eine lange exakte Sequenz $0 \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(P_0, N) \to Hom_R(K_1, N) \to Ext_R^1(M, N) \to$ $Ext_R^1(P_0, N) \to Ext_R^1(K_1, N) \to ... \to Ext_R^n(M, N) \to Ext_R^n(P_0, N) \to Ext_R^n(K_1, N)$. Da P_0 projektiv ist, gilt für $k > 1$ $Ext_R^k(P_0, N) = 0$ (dies liegt daran, dass $0 \to P_0 \to 0$ eine projektive Auflösung von P_0 ist). Es folgt: $0 \to Ext_R^{n-1}(K_1, N) \to Ext_R^n(M, N) \to 0$ ist exakt $\forall n > 1$ und damit $Ext_R^{n-1}(K_1, N) \cong Ext_R^n(M, N)$ $\forall n > 1$.
$i = 2$: Jetzt betrachten wir K_1 statt M und definieren $K_2 := im(P_2 \to P_1)$. Dann erhalten wir wieder eine kurze exakte Sequenz $0 \to K_2 \to P_1 \to K_1 \to 0$ und analog zu gerade folgt $Ext_R^{n-1}(K_2, N) \cong Ext_R^n(K_1, N)$ $\forall n > 1$ und damit $Ext_R^{n-2}(K_2, N) \cong Ext_R^{n-1}(K_1, N) \cong$ $Ext_R^n(M, N)$ $\forall n > 2$.
Sei nun $i \geq 3$:
Induktionsvoraussetzung: $Ext_R^{n-(i-1)}(K_{i-1}, N) \cong Ext_R^n(M, N)$ $\forall n > i - 1$
Induktionsschritt: $i - 1 \mapsto i$:
Wir definieren $K_i := im(P_i \to P_{i-1})$. Dann ist $0 \to K_i \to P_{i-1} \to K_{i-1} \to 0$ kurz exakt und wieder mit denselben Argumenten wie gerade gilt:
$Ext_R^{n-1}(K_i, N) \cong Ext_R^n(K_{i-1}, N)$ $\forall n > 1 \Rightarrow Ext_R^{n-2}(K_i, N) \cong Ext_R^{n-1}(K_{i-1}, N)$ $\forall n > 2$ $\Rightarrow ... \Rightarrow Ext_R^{n-i}(K_i, N) \cong Ext_R^{n-(i-1)}(K_{i-1}, N) \cong Ext_R^n(M, N)$ $\forall n > i$ nach der Induktionsvoraussetzung.
Jetzt machen wir weiter im eigentlichen Beweis.
Nach Voraussetzung gilt $Ext_R^{n+1}(M, N) = 0 \Rightarrow Ext_R^1(K_n, N) = 0$ $\forall$ R-Moduln N. Sei nun $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln $\Rightarrow$
$0 \to Hom_R(K_n, N') \to Hom_R(K_n, N) \to Hom_R(K_n, N'') \to Ext_R^1(K_n, N')$
$\to Ext_R^1(K_n, N) \to ...$ ist exakt, wobei $Ext_R^1(K_n, N') = 0$ gilt. Damit folgt, dass $Hom_R(K_n, N) \to Hom_R(K_n, N'')$ surjektiv ist für alle surjektiven Abbildungen $N \to N''$. Also ist K_n projektiv. Dann ist $0 \to K_n \to P_{n-1} \to ... \to P_0 \to 0$ eine projektive Auflösung von M, also gilt $pd(M) \leq n$. □

Beweis. von Lemma 4.9 (vgl. [10], §18 Lemma 1)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Diese Richtung ist trivial.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Dies wollen wir per Induktion nach $n \geq 0$ zeigen.
Induktionsanfang: $n = 0$:
Dazu betrachten wir die kurze exakte Sequenz $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ und erhalten dann mit Satz 4.8 eine lange exakte Sequenz $0 \to Hom_R(R/I, M) \to Hom_R(R, M) \to Hom_R(I, M) \to Ext^1_R(R/I, M) \to ....$ Nach der Voraussetzung gilt: $Ext^1_R(R/I, M) = 0$ $\Rightarrow Hom_R(R, M) \to Hom_R(I, M)$ ist surjektiv und dann gilt nach Lemma 4.2, dass M injektiv ist $\Rightarrow id(M) = 0$, da $0 \to M \to 0$ eine injektive Auflösung von M ist.
Induktionsvoraussetung: Es gelte [für alle Ideale $I \subseteq R$: $Ext^n_R(R/I, M) = 0$ $\Rightarrow id(M) \leq n - 1$].
Induktionsschritt: $n - 1 \mapsto n$:
Wir wählen eine exakte Sequenz $0 \to M \to Q^0 \to ... \to Q^{n-1}$ mit Q^i injektiv für $0 \leq i \leq n-1$. Dann setzen wir $C^i := Q^i/im(Q^{i-1} \to Q^i) = coker(Q^{i-1} \to Q^i)$ und erhalten eine exakte Sequenz $0 \to M \to Q^0 \to ... \to Q^{n-1} \to C^{n-1} \to 0$.
Nun wollen wir zeigen, dass $Ext^{n+1}_R(R/I, M) \cong Ext^{n-i}_R(R/I, C^i)$ für $0 \leq i \leq n-1$, für alle $n > i$ und $Q^{-1} := M$.
$i = 0$: $0 \to M \to Q^0 \to C^0 \to 0$ ist kurz exakt und dann folgt mit Satz 4.8
$Ext^{n+1}_R(R/I, M) \cong Ext^n_R(R/I, C^0)\ \forall n > 0$.
$i = 1$: $0 \to C^0 \to Q^1 \to C^1 \to 0$ kurz exakt und dann folgt wieder mit Satz 4.8: $Ext^{n+1}_R(R/I, C^0) \cong Ext^n_R(R/I, C^1)\ \forall n > 0$, also $Ext^{n-1}_R(R/I, C^1) \cong Ext^n_R(R/I, C^0) \cong Ext^{n+1}_R(R/I, M)\ \forall n > 1$.
Den restlichen Beweis der Behauptung führt man analog zum Beweis von
$Ext^n_R(M, N) \cong Ext^{n-i}_R(K_i, N)$ in Lemma 4.8 fort.
Jetzt machen wir weiter im eigentlichen Beweis.
Nach der Voraussetzung gilt $0 = Ext^{n+1}_R(R/I, M) \cong Ext^1_R(R/I, C^{n-1})$ und dann folgt aus dem Induktionsanfang, dass C^{n-1} injektiv ist $\Rightarrow 0 \to Q^0 \to ... \to Q^{n-1} \to C^{n-1} \to 0$ ist eine injektive Auflösung von $M \Rightarrow id(M) \leq n$. □

Definition 4.11 Seien M, N R-Moduln, P_* eine projektive Auflösung von M und P'_* eine projektive Auflösung von N. Dann heißt
$Tor^R_n(M, N) := H_n(P_* \otimes_R N) \cong H_n(M \otimes_R P_*')$ die n-te Tor-Gruppe von M und N.

Bemerkung (i) Aus dem Isomorphiesatz folgt $Tor^R_0(M, N) \cong M \otimes_R N$ (vgl. [1], 5.1 Bemerkung 11).
(ii) Wir haben in Definition 4.9 ohne Beweis benutzt, dass $H_n(P_* \otimes_R N) \cong H_n(M \otimes_R P_*')$ (vgl. [1], 5.2 Proposition 3).

Definition 4.12 Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Eine exakte Sequenz $... \to L_i \xrightarrow{d_i} L_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} ... \to L_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ heißt minimale

Auflösung von M, falls gilt:
(i) $\forall i \geq 0$: L_i endlich erzeugt und frei.
(ii) $\forall i > 0$: $d_i L_i \subseteq \mathfrak{m} L_{i-1}$.
(iii) $\epsilon^* : L_0 \otimes_R \kappa \to M \otimes_R \kappa$ ist ein Isomorphismus.

Bemerkung (i) Da freie Moduln projektiv sind, ist eine minimale Auflösung natürlich auch eine projektive Auflösung. Die Existenz minimaler Auflösungen weisen wir an dieser Stelle nicht nach. Die wesentlichen Argumente führen wir aber im Beweis von Lemma 6.4 vor. Hier vergleiche man auch mit Satz 5.5 für den speziellen Fall $M = \kappa$ für einen regulären Ring.
(ii) Für eine minimale Auflösung $... \to L_i \overset{d_i}{\to} L_{i-1} \overset{d_{i-1}}{\to} ... \to L_0 \overset{\epsilon}{\to} M \to 0$ gilt, dass $L_i \otimes_R \kappa \cong K_i \otimes_R \kappa$, wobei $K_1 := ker(\epsilon)$ und $K_i := ker(d_{i-1})$ für $i \geq 2$.

Lemma 4.13 Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch, M ein endlich erzeugter R-Modul und L_* eine minimale Auflösung von M. Dann gilt:
(i) $dim_\kappa(Tor_i^R(M, \kappa)) = rg_R(L_i)$ für alle $i \geq 1$.
(ii) $pd(M) = sup\{i | Tor_i^R(M, \kappa) \neq 0\} \leq pd(\kappa)$.

Beweis. (vgl. [10], §19 Lemma 1)
(i): Es gilt $Tor_i^R(M, \kappa) = ker(L_i \otimes_R \kappa \to L_{i-1} \otimes_R \kappa)/im(L_{i+1} \otimes_R \kappa \to L_i \otimes_R \kappa) \cong ker(L_i/\mathfrak{m}L_i \to L_{i-1}/\mathfrak{m}L_{i-1})/im(L_{i+1}/\mathfrak{m}L_{i+1} \to L_i/\mathfrak{m}L_i) =$
$ker(L_i/\mathfrak{m}L_i \to L_{i-1}/\mathfrak{m}L_{i-1})/\{0\}$, da $d_{i+1}L_{i+1} \subseteq \mathfrak{m}L_i$ und
$ker(L_i/\mathfrak{m}L_i \to L_{i-1}/\mathfrak{m}L_{i-1})/\{0\} \cong ker(L_i/\mathfrak{m}L_i \to L_{i-1}/\mathfrak{m}L_{i-1}) = L_i/\mathfrak{m}L_i$, da $d_iL_i \subseteq \mathfrak{m}L_{i-1}$. $L_i/\mathfrak{m}L_i$ ist ein endlich erzeugter κ-Vektorraum mit $dim_\kappa(L_i/\mathfrak{m}L_i) = rg_R(L_i)$.
(ii): Es gilt: $Tor_i^R(M, \kappa) = rg_R(L_i) = 0 \Leftrightarrow L_i = \{0\}$. Des Weiteren ist L_* eine projektive Auflösung von M und damit gilt $sup\{i | Tor_i^R(M, \kappa) \neq 0\} \geq pd(M)$.
Sei $pd(M) = n < \infty$. Wenn $pd(M) = \infty$ wäre, würde auf beiden Seiten ∞ stehen. Sei ferner P_* eine projektive Auflösung von M der Länge $n \Rightarrow Tor_{n+1}^R(M, \kappa) = 0 \Rightarrow pd(M) \geq sup\{i | Tor_i^R(M, \kappa) \neq 0\}$.
Da für eine projektive Auflösung E_* von κ gilt, dass $Tor_i^R(M, \kappa) = H_n(M \otimes_R E_*)$, folgt $pd(M) \leq pd(\kappa)$. □

Das folgende Lemma, welches wir für den Beweis unseres Hauptresultates in Kapitel 6 benötigen, verwenden wir ohne Beweis. Man kann den Beweis allerdings im Stacks Project nachschlagen (vgl.[11], Lemma 10.109.4).

Lemma 4.14 Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch und $pd(\kappa) = n < \infty$. Dann gilt $dim(R) \geq n$.

Lemma 4.15 Es seinen M_*, M'_*, M''_* drei Komplexe von R-Moduln, sodass wir eine exakte Sequenz von Komplexen $0 \to M'_* \to M_* \to M''_* \to 0$ haben, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Sequenz $0 \to M'_n \to M_n \to M''_n \to 0$ exakt. Dies induziert eine lange exakte Homologie-Sequenz $... \to H_n(M'_*) \to H_n(M_*) \to H_n(M''_*) \to H_{n-1}(M'_*) \to ....$

Beweis. (vgl. [1], 5.1 Proposition 1)

□

Außerdem benötigen wir die folgende alternative Charakterisierung projektiver Moduln:

Lemma 4.16 Sei P ein R-Modul. Dann ist äquivalent:
(i) P ist projektiv.
(ii) Es existiert ein R-Modul P', sodass $P \oplus P'$ frei ist.

Beweis. (vgl.[1], 5.1 Proposition 7)
$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei F ein freier R-Modul mit einer surjektiven R-linearen Abbildung $\phi : F \to P$. Da P projektiv ist, existiert eine R-lineare Abbildung $f : P \to F$ mit $\phi \circ f = id_P \Rightarrow f$ ist injektiv und $im(f) \cap ker(\phi) = \{0\}$.
ϕ und $\pi : F \to F/ker(\phi)$ induzieren eine bijektive Abbildung $\Phi : F/ker(\phi) \to P$ und damit folgt insgesamt $F \cong P \oplus ker(\phi)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei also P' ein R-Modul, sodass $P \oplus P'$ frei ist $\Rightarrow P \oplus P'$ ist projektiv. Sei ferner $\phi : M \to M'$ ein Epimorphismus und $g : P \oplus P' \to M' \Rightarrow \exists\ f : P \oplus P' \to M$ mit $\phi \circ f = g$. Durch die Abbildung $p : P \oplus P' \to P$, $(p, p') \mapsto (p, 0)$ definieren wir $f \circ p := f^*$ und erhalten dann $\phi \circ f^* = g_{|P}$. Damit folgt die Behauptung und wir sind fertig. □

5 Der Koszul Komplex

In diesem Kapitel werden wir den Koszul-Komplex einführen, der eine wichtige Rolle im zentralen Beweis dieser Bachelorarbeit, welcher in Kapitel 6 ausgeführt wird, spielt. Um die Definition besser zu verstehen, beginnen wir mit einem Beispiel.
Sei $n = 3$ und $x_1, x_2, x_3 \in R$. Setze nun $K_0 := R, K_1 := R^3, K_2 := R^3, K_3 := R$ und definiere dazu jeweils ein Differential.

- $d_1 : K_1 \to K_0$ mit $d_1(e_1) = x_1, d_1(e_2) = x_2, d_1(e_3) = x_3$, wobei e_1, e_2, e_3 die Basisvektoren von $K_1 = R^3$ bilden.

- $d_2 : K_2 \to K_1$ mit $d_2(e_{1,2}) = x_1e_2 - x_2e_1, d_2(e_{1,3}) = x_1e_3 - x_3e_1, d_2(e_{2,3}) = x_2e_3 - x_3e_2$, wobei $e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,3}$ die Basisvektoren von $K_2 = R^3$ bilden und e_1, e_2, e_3 wieder die Basisvektoren von K_1 sind.

- $d_3 : K_3 \to K_2$ mit $d_3(e_{1,2,3}) = x_1e_{2,3} - x_2e_{1,3} + x_3e_{1,2}$, wobei $e_{1,2,3}$ der Basisvektor von $K_3 = R$ ist und $e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,3}$ wieder die Basisvektoren von K_2 bilden.

- Es gilt $d_1 \circ d_2 = 0$, denn: $d_1 \circ d_2(e_{1,2}) = d_1(x_1e_2 - x_2e_1) = x_1d_1(e_2) - x_2d_1(e_1) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$ und für $d_1 \circ d_2(e_{1,3})$ und $d_1 \circ d_2(e_{2,3})$ rechnet man dies analog aus.

- Es gilt $d_2 \circ d_3 = 0$, denn: $d_2 \circ d_3(e_{1,2,3}) = d_2(x_1e_{2,3} - x_2e_{1,3} + x_3e_{1,2}) = x_1d_2(e_{2,3}) - x_2d_2(e_{1,3}) + x_3d_2(e_{1,2}) = x_1(x_2e_3 - x_3e_2) - x_2(x_1e_3 - x_3e_1) + x_3(x_1e_2 - x_2e_1) =$

$(0, -x_1x_3, x_1x_2) + (x_2x_3, 0, -x_2x_1) + (-x_3x_2, x_3x_1, 0) = (0, 0, 0) = 0_{R^3}$
(hier wurden die Standardeinheitsvektoren als Basisvektoren gewählt, aber es können auch beliebige andere Basisvektoren gewählt werden)

- Man erhält also den Komplex $0 \to K_3 \overset{d_3}{\to} K_2 \overset{d_2}{\to} K_1 \overset{d_1}{\to} K_0 \to 0$, welcher als Koszul-Komplex bezeichnet wird.

Definition 5.1 Es seien $x_1, ..., x_n \in R$. Dann setze $K_0 := R$, $K_p := 0$ für $p \notin \{0, ..., n\}$ und für $1 \leq p \leq n$ sei $K_p := R^{\binom{n}{p}}$ der freie R-Modul mit Rang $\binom{n}{p}$ und Basis $\{e_{i_1,...i_p} | 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n\}$.
Für $p = 1$ setze $d_1 : K_1 \to K_0$ mit $d_1(e_i) = x_i$ für $1 \leq i \leq n$.
Für $p > 1$ setze $d_p : K_p \to K_{p-1}$ mit $d_p(e_{i_1,...,i_p}) = \sum\limits_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_p}$.
Wir erhalten dann den Komplex $0 \to K_n \overset{d_n}{\to} K_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} ... \to K_1 \overset{d_1}{\to} K_0 \to 0$, den sogenannten Koszul-Komplex $K_*(x_1, ..., x_n)$.

Lemma 5.2 Es gilt $d_p \circ d_{p+1} = 0$ für $1 \leq p \leq n-1$ und damit, dass $K_*(x_1, ..., x_n)$ ein Komplex ist.

Beweis. (vgl. [6], Lemma 2.5)
$d_p(d_{p+1}(e_{i_1,...,i_{p+1}})) = d_p(\sum\limits_{r=1}^{p+1} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_{p+1}}) = \sum\limits_{r=1}^{p+1} (-1)^{r+1} x_{i_r} d_p(e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_{p+1}}) =$
$\sum\limits_{r=1}^{p+1} (-1)^{r+1} x_{i_r} (\sum\limits_{s=1}^{r-1} (-1)^{s+1} x_{i_s} e_{i_1,...,\hat{i_s},...,\hat{i_r},...,i_{p+1}} + \sum\limits_{s=r+1}^{p+1} (-1)^{s} x_{i_s} e_{i_1,...,\hat{i_r},...,\hat{i_s},...,i_{p+1}}) =$
$\sum\limits_{r=1}^{p+1} (\sum\limits_{s=1}^{r-1} (-1)^{s+r+2} x_{i_r} x_{i_s} e_{i_1,...,\hat{i_s},...,\hat{i_r},...,i_{p+1}} + \sum\limits_{s=r+1}^{p+1} (-1)^{s+r+1} x_{i_r} x_{i_s} e_{i_1...,\hat{i_r},...,\hat{i_s},...,i_{p+1}}) = 0$
□

Definition 5.3 (i) $x \in R \setminus \{0\}$ heißt R-regulär, falls $xr \neq 0$ für alle $r \in R \setminus \{0\}$.
(ii) $x_1, ..., x_n \in R$ heißt reguläre Sequenz, wenn gilt:

- x_1 ist R-regulär, x_2 ist $R/(x_1)$-regulär,..., x_n ist $R/(x_1, ..., x_{n-1})$-regulär.
- $R/(x_1, ..., x_n) \neq \{0\}$

Satz 5.4 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär lokal, $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$ mit $d = dim(R)$. Dann ist $x_1, ..., x_d \in R$ ist eine reguläre Sequenz.

Beweis. Schritt 1: $R/(x_1, ..., x_d) \neq \{0\}$ gilt offensichtlich.
Schritt 2: Nach Lemma 3.2 ist $R/(x_1, ..., x_i)$ für $1 \leq i \leq d$ wieder regulär lokal und nach Satz 3.4 dann auch ein Integritätsbereich. Damit gilt offensichtlich, dass x_i $R/(x_1, ..., x_{i-1})$-regulär ist für $2 \leq i \leq d$.
Wiederum ist natürlich auch R nach Satz 3.4 ein Integritätsbereich, also ist x_1 R-regulär.
□

Satz 5.5 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär lokal, $\mathfrak{m} = (x_1, ..., x_d)$ mit $d = dim(R)$. Dann ist $K_*(x_1, ..., x_d)$ eine minimale Auflösung von κ.

Beweis. Schritt 1: K_p, $0 \leq p \leq d$, ist offensichtlich endlich erzeugt und frei.
Schritt 2: $d_p K_p = (\sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_p}) K_p = (\sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_p}) R^{\binom{n}{p}}$
$\subseteq \mathfrak{m} R^{\binom{n}{p-1}} = \mathfrak{m} K_{p-1}$, da $x_{i_r} \in \mathfrak{m}$ und $e_{i_1,...,\hat{i_r},...,i_p}$ die Basisvektoren von K_{p-1} sind.
Schritt 3: Die Sequenz $0 \to K_d \overset{d_d}{\to} ... \to K_0 \overset{\epsilon}{\to} \kappa \to 0$ ist exakt

- Nach Konstruktion ist $K_0 = R$ und $R \to \kappa$ ist surjektiv, also gilt $ker(\kappa \to 0) = im(K_0 \to \kappa)$
- $im(d_1) = d_1(K_1) = d_1(R^d) = d_1(e_1 R + ... + e_d R) = d_1(e_1)R + ... + d_1(e_d)R = x_1 R + ... + x_d R = (x_1, ..., x_d) = \mathfrak{m} = ker(K_0 \to \kappa)$
- Jetzt wollen wir per Induktion nach $d \geq 1$ zeigen, dass $ker(d_i) = im(d_{i+1})$ für $1 \leq i \leq d$: (vgl. [10], Theorem 16.5 (i))
  $d = 1$: $r \in ker(d_1) \Rightarrow d_1(r) = r d_1(e_1) = r x_1 = 0 \Rightarrow r = 0$, da x_1 R-regulär ist $\Rightarrow ker(d_1) = 0 = im(d_2)$, weil $im(d_2) \subseteq ker(d_1)$.
  Induktionsvoraussetzung: Sei $d > 1$ und $H_i(K_*(x_1, ..., x_{d-1})) = 0$ für $1 \leq i \leq d-1$.
  Induktionsschritt: $d - 1 \mapsto d$:
  Wir betrachten dazu die Komplexe $K_*(x_1, ..., x_{d-1}), K_*(x_1, ..., x_d), K'_*(x_1, ..., x_{d-1})$, wobei $K'_i = K_{i-1}$ von $K_*(x_1, ..., x_{d-1})$ ist. Wir erhalten dann eine exakte Sequenz $0 \to K_*(x_1, ..., x_{d-1}) \to K_*(x_1, ..., x_d) \to K'_*(x_1, ..., x_{d-1}) \to 0$ von Komplexen (vgl. [10], Theorem 16.4). Im Folgenden unterscheiden wir zwei Fälle.
  Fall 1: $i > 1$
  Nach Lemma 4.15 erhalten wir eine exakte Homologie-Sequenz
  $... \to H_i(K_*(x_1, ..., x_{d-1})) \to H_i(K_*(x_1, ..., x_d)) \to H_i(K'_*(x_1, ..., x_{d-1}))$
  $\to H_{i-1}(K_*(x_1, ..., x_{d-1}))$, wobei per Definition von $K'_*(x_1, ..., x_{d-1})$, $H_i(K'_*(x_1, ..., x_{d-1})) = H_{i-1}(K_*(x_1, ..., x_{d-1}))$ und aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $H_i(K_*(x_1, ..., x_{d-1})) = 0 = H_{i-1}(K_*(x_1, ..., x_{d-1}))$. Damit erhalten wir eine exakte Sequenz der Form $0 \to H_i(K_*(x_1, ..., x_d)) \to 0 \Rightarrow H_i(K_*(x_1, ..., x_d)) = 0$.
  Fall 2: $i = 1$
  Da $H_0(K_*(x_1, ..., x_{d-1})) = ker(K_0 \to 0)/im(d_1) = R/(x_1, ..., x_{d-1})$ und nach der Induktionsvoraussetzung $H_1(K_*(x_1, ..., x_{d-1})) = 0$ ist, erhalten wir eine exakte Sequenz $0 \to H_1(K_*(x_1, ..., x_d)) \to R/(x_1, ..., x_{d-1}) \to R/(x_1, ..., x_{d-1})$, wobei die rechtsstehende Abbildung die Multiplikation mit x_d ist. Nach Voraussetzung ist diese injektiv und daher $H_1(K_*(x_1, ..., x_d)) = 0$.

Schritt 5: $K_0 \otimes_R \kappa = R \otimes_R \kappa \cong \kappa \cong \kappa \otimes_R \kappa \Rightarrow \epsilon^*$ ist ein Isomorphismus.
Damit haben wir alle drei Eigenschaften einer minimalen Auflösung nachgewiesen und sind fertig. □

6 Globale Dimension und Regularität

Definition 6.1 Die globale Dimension eines Ringes R ist definiert als
$gldim(R) := \sup\{pd(M)|\ M \text{ ein R-Modul }\}$.

Lemma 6.2 (Lemma von Schanuel)
Sei M ein R-Modul und seien $0 \to K \xrightarrow{c_1} P_1 \xrightarrow{p_1} M \to 0$ und
$0 \to L \xrightarrow{c_2} P_2 \xrightarrow{p_2} M \to 0$ zwei kurze exakte Sequenzen mit projektiven Moduln P_1 und P_2.
Dann gilt $K \oplus P_2 \cong L \oplus P_1$.

Beweis. (vgl. [11], Lemma 10.108.1, vgl. [12])
Wir definieren $N := \{(a_1, a_2) \in P_1 \oplus P_2 |\ p_1(a_1) = p_2(a_2)\}$. Dann ist $N \subseteq P_1 \oplus P_2$ ein Untermodul und die Abbildungen $\pi_1 : N \to P_1$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1$, und $\pi_2 : N \to P_2$, $(a_1, a_2) \mapsto a_2$, sind surjektiv, da p_1, p_2 nach Voraussetzung surjektiv sind.
Ferner gilt $ker(\pi_1) = \{(a_1, a_2) \in N |\ \pi(a_1, a_2) = 0\} = \{(0, a_2) \in P_1 \oplus P_2 |\ p_2(a_2) = 0\} \cong ker(p_2) = im(c_2) \cong L/ker(c_2) = L/\{0\} \cong L$.
Analog zeigt man auch, dass $ker(\pi_2) \cong K$. Durch die exakte Sequenz $0 \to L \xrightarrow{\pi_1} N \to P_1 \to 0$ und, da P_1 projektiv ist, erhalten wir wie im Beweis von Lemma 4.16 einen Isomorphismus $N \cong L \oplus P_1$. Analog erhalten wir durch die kurze exakte Sequenz $0 \to K \to N \xrightarrow{\pi_2} P_2 \to 0$, dass $N \cong P_2 \oplus K$.
Insgesamt folgt damit also $K \oplus P_2 \cong L \oplus P_1$. □

Lemma 6.3 Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch, M ein endlich erzeugter R-Modul mit $pd(M) = d < \infty$, $F_e \to F_{e-1} \to ... \to F_0 \to M \to 0$ sei exakt mit F_i projektiv für $1 \leq i \leq e$ und es gelte $e \geq d - 1$. Dann ist $ker(F_e \to F_{e-1})$ projektiv oder, im Fall $e = 0$, $ker(F_0 \to M)$ projektiv.

Beweis. (vgl. [11], Lemma 10.108.3)
Wir beweisen das Lemma per Induktion nach $d \geq 0$.
$d = 0$:
Jetzt führen wir eine Induktion nach $e \geq 0$ aus.
Sei also $e = 0$. Dann erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $0 \to ker(F_0 \to M) \to F_0 \to M \to 0$ und mit denselben Argumenten wie im Beweis von Lemma 4.16 folgt
$F_0 \cong ker(F_0 \to M) \oplus M$, wobei F_0 frei ist. Damit ist $ker(F_0 \to M)$ projektiv.
$e - 1 \mapsto e$: $F_e \to ... \to F_1 \to ker(F_0 \to M) \to 0$ ist exakt, und wie eben gesehen, ist auch $ker(F_0 \to M)$ projektiv, d.h. $pd(ker(F_0 \to M)) = 0 = d$. Indem wir die Induktionsvoraussetzung auf $ker(F_0 \to M)$ anwenden, erhalten wir, dass $ker(F_e \to F_{e-1})$ projektiv ist.
$d = 1$:
Fall 1: $e = 0$: Wir wählen eine projektive Auflösung $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ von M.
Dann haben wir zwei kurze exakte Sequenzen
$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ und $0 \to ker(F_0 \to M) \to F_0 \to M \to 0$. Mit Schanuel's Lemma

folgt dann, dass $P_1 \oplus F_0 \cong ker(F_0 \to M) \oplus P_0$ und damit, dass $ker(F_0 \to M)$ projektiv ist.
Fall 2: $e = 1$: Dann haben wir zwei kurze exakte Sequenzen
$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ und $0 \to ker(F_1 \to F_0) \to F_1 \to ker(F_0 \to M) \to 0$ und argumentieren wie im Fall $e = 0$.
Sei nun $d > 1$ und sagen wir die Behauptung gelte für $d-1$. Wir wählen eine projektive Auflösung $0 \to P_d \to ... \to P_0 \to M$ von M. Der R-Modul $ker(P_0 \to M) \oplus F_0$ hat die projektive Auflösung $0 \to P_d \to P_{d-1} \to ... \to P_2 \to P_1 \oplus F_0 \to ker(P_0 \to M) \oplus F_0 \to 0$ der Länge $d-1$, denn:

- $ker(P_0 \to M) = im(P_1 \to P_0) \Rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} im(P_1 \to P_0)$ ist surjektiv
  $\Rightarrow P_1 \oplus F_0 \xrightarrow{(f_1,id)} ker(P_0 \to M) \oplus F_0$ ist surjektiv.

- $ker(P_1 \to ker(P_0 \to M)) = ker(P_1 \to P_0)$
  $= im(P_2 \to P_1) \Rightarrow ker(P_1 \oplus F_0 \xrightarrow{(f_1,id)} ker(P_0 \to M) \oplus F_0) =$
  $ker(P_1 \to ker(P_0 \to M)) \oplus 0 = im(P_2 \to P_1) \oplus 0 = im(P_2 \xrightarrow{(f_2,0)} P_1 \oplus F_0)$

- $ker(P_2 \to P_1 \oplus F_0) = ker(P_2 \to P_1) \oplus 0 = im(P_3 \to P_2) \oplus 0 \cong im(P_3 \to P_2)$

- Der Rest ist nach Voraussetzung exakt.

Mit denselben Argumenten ist auch
$F_e \to F_{e-1} \to ... \to F_2 \to P_0 \oplus F_1 \to P_0 \oplus ker(F_0 \to M) \to 0$ exakt und von der Länge $e-1$. Nach dem Lemma von Schanuel ist $ker(P_0 \to M) \oplus F_0 \cong P_0 \oplus ker(F_0 \to M)$, sodass der rechts stehende Modul wie oben gesehen die projektive Dimension kleiner oder gleich $d-1$ hat. Dann können wir unsere Induktionsvorausetzung anwenden und erhalten, dass $ker(F_e \to F_{e-1})$ projektiv ist. □

Lemma 6.4 Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch und $pd(\kappa) < \infty$. Dann gilt $pd(\kappa) \geq dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

Beweis. (vgl. [11], Lemma 10.109.3)
Wir setzen $n := pd(\kappa)$ und sei $0 \to F_n \to ... \to F_0 \to \kappa \to 0$ eine projektive Auflösung minimaler Länge.
Schritt 1: O.B.d.A alle F_i endlich erzeugt und frei:
Da R noethersch und κ endlich erzeugt ist, existiert eine exakte Sequenz $... \to F'_m \to ... \to F'_0 \to \kappa \to 0$ mit F'_m endlich erzeugt und frei für alle $m \geq 0$.
Mit Lemma 6.3 folgt, dass $ker(F'_{n-1} \to F'_{n-2}) =: E$ projektiv ist. Damit ist auch $0 \to E \to F'_{n-1} \to F'_{n-2} \to ... \to F'_0 \to \kappa \to 0$ exakt und $E, F'_{n-1}, ..., F'_0$ sind endlich erzeugt und projektiv, also frei.
Schritt 2: O.B.d.A für alle $i \geq 1$ gilt $im(F_i \to F_{i-1}) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$:
Dies ergibt sich aus der Konstruktion einer geeigneten Auflösung $... \to F_0 \to \kappa \to 0$:
Wir setzen $F_0 := R$ und erhalten damit eine kurze exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{m} \to F_0 = R \to \kappa \to 0$. Sei ferner $x_1, ..., x_d \in \mathfrak{m} = ker(F_0 \to \kappa)$ ein minimales Erzeugendensystem des

R-Moduls $\mathfrak{m}$. Dann setzen wir $F_1 := R^d$ und definieren eine Abbildung $\phi_1 : F_1 \to F_0$, $(a_j)_{1\leq j\leq d} \mapsto \sum_{j=1}^{d} a_j x_j$.
Dann gilt $\phi_1(F_1) = \mathfrak{m} = \mathfrak{m}R = \mathfrak{m}F_0$. Des Weiteren gilt $ker(\phi_1) \subseteq \mathfrak{m}F_1$, denn:
Da $x_1, ..., x_d \in \mathfrak{m}$ ein minimales Erzeugendensystem ist, ist nach Nakayama $x_1 + \mathfrak{m}^2, ..., x_d + \mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ eine κ-Basis. Aus $0 = \phi_1(a_1, ..., a_d) = \sum_{j=1}^{d} a_j x_j$ folgt nun $0 = \sum_{j=1}^{d}(a_j + \mathfrak{m})(x_j + \mathfrak{m}^2)$ und somit $a_j \in \mathfrak{m}$ für alle j.
Jetzt wählen wir weiter ein minimales Erzeugendensytem $x'_1, ..., x'_{d'} \in ker(\phi_1)$ von $ker(\phi_1)$, definieren $F_2 := R^{d'}$ und eine Abbildung $\phi_2 : F_2 \to F_1$, $(a'_j)_{1\leq j\leq d'} \mapsto \sum_{j=1}^{d'} a'_j x'_j$. Damit erhalten wir, dass $\phi_2(F_2) = ker(\phi_1) \subseteq \mathfrak{m}F_1$ und die anderen gewüschnten Bedingungen mit denselben Argumenten. Außerdem ist $F_2 \to F_1 \to F_0 \to \kappa \to 0$ nach unserer Konstruktion exakt. Dies führen wir induktiv fort und erhalten so unsere gewünschte Auflösung.
Schritt 3: Sei weiter $x_1, ..., x_d \in \mathfrak{m}$ ein minimales Erzeugendensystem (sodass nach Nakayama $d = dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$) und $0 \to K_d \to ... \to K_0 \to \kappa \to 0$ der zugehörige Koszul-Komplex. Wegen der exakten Sequenz aus Schritt 1 ist die Abbildung $f_0 : F_0 \to \kappa$ surjektiv. Ferner haben wir eine Abbildung $\epsilon : K_0 \to \kappa$. Da K_0 projektiv ist, existiert eine Abbildung $\alpha_0 : K_0 \to F_0$ mit $f_0 \circ \alpha_0 = \epsilon$ und damit ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] & \kappa \arrow[d, "id_\kappa"] \\ F_0 \arrow[r, "f_0"'] & \kappa \end{tikzcd}$$

kommutativ.
Weiter betrachten wir die surjektive Abbildung $f_1 : F_1 \to im(F_1 \to F_0)$ und die Abbildungen $d_1 : K_1 \to K_0$, $\alpha_0 \circ d_1 : K_1 \to F_0$. Wegen $f_0 \circ \alpha_0 \circ d_1 = \epsilon \circ d_1 = 0$ gilt $im(\alpha_0 \circ d_1) \subseteq ker(f_0) = im(F_1 \xrightarrow{f_1} F_0)$. Da K_1 projektiv ist, existiert ein $\alpha_1 : K_1 \to F_1$ mit $f_1 \circ \alpha_1 = \alpha_0 \circ d_1$ und dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & K_0 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r] & im(F_1 \to F_0) \end{tikzcd}$$

kommutativ und, wegen $im(F_1 \to F_0) \hookrightarrow F_0$, ist natürlich auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & K_0 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r] & F_0 \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Nehmen wir nun an, dass für $i-1 \leq d-1$ ein solches α_{i-1} existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & K_{i-2} \arrow[d] \\ F_{i-1} \arrow[r] & F_{i-2} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann argumentiert man völlig analog zum Fall $i = 1$, dass $im(\alpha_{i-1} \circ d_i) \subseteq im(F_i \to F_{i-1})$ und, dass auf Grund der Projektivität von K_i eine Abbildung $\alpha_i : K_i \to F_i$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & K_{i-1} \arrow[d] \\ F_i \arrow[r] & im(F_i \to F_{i-1}) \end{tikzcd}$$

kommutiert und damit auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & K_{i-1} \arrow[d] \\ F_i \arrow[r] & F_{i-1} \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.
Insgesamt erhalten wir so das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_d \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_d"] & K_{d-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{d-1}"] & \ldots \arrow[r] & K_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & K_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & \kappa \arrow[r] \arrow[d, "id_\kappa"] & 0 \\ & F_d \arrow[r] & F_{d-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & \kappa \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Schritt 4: Die induzierten Abbildungen $K_i/\mathfrak{m}K_i \overset{\alpha_i mod \mathfrak{m}}{\longrightarrow} F_i/\mathfrak{m}F_i$ sind für alle $0 \leq i \leq d$ injektiv:
Wir zeigen dies per Induktion nach $i \geq 0$:
$i = 0$: Nach Konstruktion gilt $K_0 = F_0 = R$ und wir können $\alpha_0 = id_R$ wählen.
Induktionsvoraussetzung: Sei $i > 0$ und es gelte, dass $\alpha_{i-1} mod \mathfrak{m}$ injektiv ist.
Induktionsschritt: $i-1 \mapsto i$: Zuerst beachten wir, dass für jeden freien R-Modul M gilt: $\mathfrak{m}M/\mathfrak{m}^2M \cong M \otimes_R \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong (M/\mathfrak{m}M) \otimes_\kappa \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, sodass zusammen mit $\alpha_{i-1} mod \mathfrak{m} : K_{i-1}/\mathfrak{m}K_{i-1} \to F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1}$ auch die von α_{i-1} induzierte Abbildung $\alpha_{i-1} mod \mathfrak{m} \otimes_R id_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2} : \mathfrak{m}K_{i-1}/\mathfrak{m}^2K_{i-1} \to \mathfrak{m}F_{i-1}/\mathfrak{m}^2F_{i-1}$ injektiv ist ($\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist als $\kappa-$Modul frei und damit flach, weil κ ein Körper ist).
Da $im(K_i \to K_{i-1}) \subseteq \mathfrak{m}K_{i-1}$ nach Definition des Koszul-Komplexes und nach Schritt 2

$im(F_i \to F_{i-1}) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ ist, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_i/\mathfrak{m}K_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i mod \mathfrak{m}"'] & \mathfrak{m}K_{i-1}/\mathfrak{m}^2K_{i-1} \arrow[d, hook, "(\alpha_{i-1} mod \mathfrak{m})\otimes \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2"] \\ F_i/\mathfrak{m}F_i \arrow[r] & \mathfrak{m}F_{i-1}/\mathfrak{m}^2F_{i-1} \end{tikzcd}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass der obere horizontale Pfeil injektiv ist, d.h wird $(a_1, ..., a_{\binom{d}{i}}) \in R^{\binom{d}{i}} = K_i$ unter $d_i : K_i \to K_{i-1}$ auf ein Element in $\mathfrak{m}^2K_{i-1}$ abgebildet, so gilt $a_j \in \mathfrak{m}$ für alle $1 \leq j \leq \binom{d}{i}$:

$d_i(a_1, ..., a_{\binom{d}{i}}) = \sum_{1\leq j_1<...<j_i\leq d} a_{\bar{j}} \sum_{r=1}^{i} (-1)^{r-1} x_{j_r} e_{j_1,...,\hat{j_r},...,j_i}$

$= \sum_{1\leq k_1<...<k_{i-1}\leq d} (\sum_{\substack{1\leq j_1<...<j_i\leq d \\ \exists r:(j_1,...,\hat{j_r},...,j_i)=\bar{k}}} (-1)^{r-1} a_{\bar{j}} x_{j_r}) e_{\bar{k}}$, wobei wir $\bar{j} = (j_1, ..., j_i)$ und $\bar{k} = (k_1, ..., k_{i-1})$ schreiben. Wenn das in $\mathfrak{m}^2K_{i-1}$ liegt, liegt jede Koordinate in $\mathfrak{m}^2$. Da die x_j aber modulo $\mathfrak{m}^2$ linear unabhängig über $R/\mathfrak{m}$ sind, folgt $a_{\bar{j}} \in \mathfrak{m}$ für alle $\bar{j}$.

Schritt 5: $K_d \cong R \Rightarrow K_d/\mathfrak{m}K_d \cong \kappa \overset{\alpha_d mod \mathfrak{m}}{\hookrightarrow} F_d/\mathfrak{m}F_d \Rightarrow F_d \neq \{0\} \Rightarrow n = pd(\kappa) \geq d$. □

Satz 6.5 Es sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch. Dann sind äquivalent:
(i) R ist regulär.
(ii) $gldim(R) < \infty$.
In diesem Fall gilt $gldim(R) = dim(R)$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $d = dim(R)$ und $x_1, ..., x_d \in \mathfrak{m}$ seien Erzeuger des Ideals $\mathfrak{m}$. Nach Satz 5.4 ist $x_1, ..., x_d \in R$ dann eine reguläre Sequenz und nach Satz 5.5 ist der Koszul-Komplex $K_*(x_1, ..., x_d)$ dann eine minimale Auflösung des R-Moduls κ, also gilt $pd(\kappa) \leq d$. Mit Lemma 4.13 folgt dann $pd(M) \leq d$ für alle endlich erzeugten R-Moduln M und mit Lemma 4.10 dann $pd(M) \leq d$ für alle R-Moduln M. Damit erhalten wir, dass $gldim(R) \leq d < \infty$.
Nach Lemma 6.4 gilt somit $dim(R) = dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq pd(\kappa) \leq gldim(R) \leq dim(R)$ und somit überall Gleichheit.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Nach Lemma 4.14 gilt $pd(\kappa) \leq dim(R)$ und damit nach Lemma 6.4 $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq dim(R)$. Aus Satz 2.13 folgt dann $dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq dim(R)$ und somit Gleichheit. Damit ist R regulär. □

Satz 6.6 (Serre)
Wenn $(R, \mathfrak{m})$ lokal noethersch regulär im Sinne von Definition 1.1 ist, so ist R auch regulär im Sinne von Definition 1.2, d.h. $dim(R_\mathfrak{p}) = dim_{R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2R_\mathfrak{p})\ \forall \mathfrak{p} \in Spec(R)$.

Beweis. (vgl. [10], Theorem 19.3)
Es sei $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ beliebig. Da $R/\mathfrak{p}$ ein R-Modul ist, gilt $pd(R/\mathfrak{p}) \leq gldim(R) < \infty$ nach Satz 6.5. Sei L_* dann dementsprechend eine projektive Auflösung von $R/\mathfrak{p}$ endlicher Länge. Aus Lemma 4.16 folgt dann, dass der $R_\mathfrak{p}$-Modul $L_i \otimes_R R_\mathfrak{p}$ für alle i projektiv ist. Da

der Ringhomomorphismus $R \to R_{\mathfrak{p}}$ flach ist, ist die Sequenz $L_* \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$-Moduln nach wie vor exakt und damit eine projektive Auflösung von $R/\mathfrak{p} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Damit ist auch $pd(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) < \infty$. Nach Lemma 4.13 und Lemma 4.10 gilt $pd(M) \leq pd(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ für alle $R_{\mathfrak{p}}-$Moduln M, d.h. $gldim(R_{\mathfrak{p}}) < \infty$ und somit ist dann nach Satz 6.5 $R_{\mathfrak{p}}$ regulär. □

Korollar 6.7 Für einen noetherschen Ring R sind äquivalent:
(i) R ist regulär.
(ii) $\forall \mathfrak{m} \in Max(R)$: $R_{\mathfrak{m}}$ ist regulär.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Dies gilt per Definition.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ beliebig. Dann wählen wir $\mathfrak{m} \in Max(R)$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Somit ist $R_{\mathfrak{p}} \cong (R_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{m}}}$ und dieser Ring ist nach Satz 6.6 regulär. □

7 Beispiele

Satz 7.1 (Jacobikriterium)
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $I = (f_1, ..., f_r) \subseteq K[t_1, ..., t_n]$ ein Ideal, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ eine gemeinsame Nullstelle von $f_1, ..., f_r$, sodass $I \subseteq (t_1 - \alpha_1, ..., t_n - \alpha_n)$, $\mathfrak{m} := (t_1 - \alpha_1, ..., t_n - \alpha_n)/I \subseteq R := K[t_1, ..., t_n]/I$.
Dann sind äquivalent:
(i) $R_{\mathfrak{m}}$ regulär.
(ii) Die Matrix $(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(\alpha))_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n} \in K^{r \times n}$ hat den Rang $n - dim(R_{\mathfrak{m}})$.

Beweis. (vgl. [5], Theorem 2.3.5)

□

Kommen wir nun zu ein paar Beispielen regulärer und nicht regulärer Ringe:

- Jeder Hauptidealring R ist regulär: Für $\mathfrak{p} \in Spec(R) \setminus \{0\}$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Hauptidealring der kein Körper ist $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ wird von einem Element erzeugt
$\Rightarrow dim_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2R_{\mathfrak{p}}) = 1 = dim(R_{\mathfrak{p}})$.
Für $\mathfrak{p} = \{0\}$ gilt offensichtlich $dim_{Quot(R)}(\{0\}) = 0 = dim(Quot(R))$.

- Jeder lokale artin'sche Ring R, der kein Körper ist, ist nicht regulär. Genauer gilt: $(R, \mathfrak{m})$ lokal artin'sch $\Rightarrow$ [R regulär $\Leftrightarrow$ R Körper].
Beweis: $\Leftarrow$: klar
$\Rightarrow$: Da R artin'sch und regulär ist, ist mit Lemma 2.9
$0 = dim(R) = dim_{\kappa}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ und damit gilt nach Nakayama, dass $\mathfrak{m} = 0$. Also ist R ein Körper.

- Sei $R := K[[t_1, ..., t_n]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in n Variablen über einem Körper K. Da K noethersch ist, ist auch R noethersch. Dann ist $R \setminus R^\times = \{f \in R \mid f(0) = 0\} = (t_1, ..., t_n)$, d.h R ist lokal mit maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (t_1, ..., t_n)$. Offensichtlich gilt $dim(R) = ht(\mathfrak{m}) \geq n$ und nach Satz 2.13 gilt $dim(R) \leq dim_\kappa(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$ und somit Gleichheit $\Rightarrow R$ ist regulär.
  (vgl. [9] und [1], 2.4 Aufgabe 4)

Literatur

[1] Bosch, Siegfried: Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Springer Verlag 2013

[2] Cohen-Macauley and regular local rings,
$http://www.math.uchicago.edu/\sim may/MISC/RegularLocal.pdf$, Stand: 24.09.2019

[3] counterexamplesinalgebra,
$https://counterexamplesinalgebra.wordpress.com/2016/07/23/noetherian-ring-with-infinite-krull-dimension/$, Stand: 19.08.2019

[4] Eisenbud, David: Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry, Springer Verlag 1995

[5] Kohlhaase, Jan: Skriptum: Algebraic Geometry 2
(gehalten im Sommersemester 2018)

[6] Koszul Complexes,
$https://www.ndsu.edu/pubweb/\sim ssatherw/sp14/790/koszul120611.pdf$, Stand: 22.09.2019

[7] Liu, Qing: Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford University Press 2006

[8] Mathematics Stack Exchange,
$https://math.stackexchange.com/questions/1109732/noetherian-ring-with-infinite-krull-dimension-nagatas-example/1837164\#1837164$, Stand: 21.09.2019

[9] Mathematics Stack Exchange,
$https://math.stackexchange.com/questions/989811/if-r-is-a-local-ring-is-rx-the-ring-of-formal-power-series-also-a-loc?rq=1$, Stand: 22.09.2019

[10] Matsumura, Hideyuki: Commutative Ring Theory, Cambridge University Press 1989

[11] Stacks Projekt Authors, The: The Stacks Project
$https://stacks.math.columbia.edu/$, 2019

[12] Wikipedia, $https://en.wikipedia.org/wiki/Schanuel\%27s\_lemma$, Stand: 19.08.2019

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine Quellen verwendet habe, die nicht im Literaturverzeichnis angegeben sind.
Alle Stellen, welche wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, habe ich dementsprechend kenntlich gemacht.
Diese Arbeit hat bei keiner anderen Prüfungsbehörde in dieser oder einer ähnlichen Form vorgelegen.

Ort, Datum Unterschrift