Universität Duisburg-Essen • Fakultät für Mathematik

Masterarbeit

Galoisdarstellungen und Vektorbündel auf der projektiven Schiefgeraden

Vorgelegt von: Christian Linz
Friesenstraße 15
47119 Duisburg

Matrikelnummer: 2265737

Ausgabetermin: 5. Juli 2016

Abgabetermin: 3. November 2016

Betreuer: Prof. Dr. Jan Kohlhaase

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Zielstellung

Die Struktur der absoluten Galois Gruppe $\mathrm{Gal}(K^{sep}|K) =: G_K$ eines lokalen oder globalen Körpers K zu verstehen ist eines der Hauptanliegen der algebraischen Zahlentheorie. In der Vorlesung „p-adic Galois representations “([pad, 2015]) haben wir dazu die p-adischen Darstellungen der Galoisgruppe eines lokalen Körpers K untersucht. Ein zentrales Resultat war der Satz von Fontaine der besagt, dass die Kategorie der p-adischen Darstellungen im Falle eines Laurentreihenkörpers äquivalent ist zur Kategorie der sogenannten étalen φ-Moduln. Durch diese Kategorienäquivalenz kann man mit Mitteln der semilinearen Algebra die absolute Galoisgruppe untersuchen.

In dieser Arbeit betrachten wir einen perfekten Körper K der Charakteristik $p \in \mathbb{P}$. Der Frobeniusendomorphismus φ von K ist also bijektiv. Wir werden die Kategorienäquivalenz von Fontaine für unseren Spezialfall zeigen. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es jedoch eine weitere Kategorienäquivalenz zu zeigen, so dass man die Gruppe G_K mit Mitteln der nicht-kommutativen algebraischen Geometrie untersuchen kann. Zusammengefasst ist das Ziel dieser Arbeit die paarweise Kategorienäquivalenz von

1. $\mathscr{H}$ die „Kategorie der Vektorbündel auf der projektiven Schiefgeraden “
2. $\Phi_K^{ét}$ die Kategorie der endlich erzeugten étalen φ-Moduln über K
3. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ die Kateogrie der stetigen $\mathbb{F}_p$-Darstellungen der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K^{sep}|K) =: G_K$

Ein Großteil dieser Arbeit ist technischer Natur, sodass wir in Kapitel 2 und 3 die Grundlagen schaffen, um die Kategorie $\mathscr{H}$ überhaupt definieren zu können.

1.2 Vorgehensweise

In Kapitel 2 werden wir zunächst die benötigte Theorie zur Lokalisierung eines nichtkommutativen Ringes erarbeiten. Wir definieren zunächst den Begriff der Rechts-/Linkslokalisierung und zeigen, dass die Rechts-/Linkslokalisierung von einem Ring R an einer Teilmenge S einer universellen Eigenschaft genügt. Ferner werden wir zeigen, dass die Rechts-/Linkslokalisierung von einem Ring R an einer Teilmenge S bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Doch zunächst einmal ist nicht klar, ob überhaut eine Rechts-/Linkslokalisierung von einem Ring R an einer Teilmenge S überhaupt existiert. Im kommutativen Fall existiert stets eine Lokalisierung, falls S eine multiplikative Teilmenge von R ist. Im nichkommutativen Fall hingegen muss S weiteren Anforderungen genügen. Dies wird uns zu den Begriffen Rechtsteilermenge und Linksteilermenge führen. Ein wesentlicher Teil dieser Definitonen ist die sogenannte Ore-Bedingung, welche einen Ersatz für die fehlende Kommutativität bietet. Im Anschluss untersuchen wir unter welchen Umständen sich die Lokalisierungsreihenfolge vertauschen lässt.

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit Schiefpolynomringen $R[x, \varphi]$, wobei $\varphi : R \to R$ ein Ringendomorphismus ist. Es werden zunächst zwei mögliche Konstruktionen aufgezeigt. Ein Kerngedanke bei der Konstruktion ist es, die fehlende Kommutativität durch eine schwächere Eigenschaft zu ersetzen. Anschließend werden wir einige Eigenschaften von Schiefpolynomringen zeigen. So genügen auch Schiefpolynomringe einer universellen Eigenschaft und es gibt eine Gradfunktion, welche sich ähnlich wie kommutativen Fall verhält. Anschließend werden wir die Theorie aus Kapitel 2 auf Schiefpolynomringe anwenden. Damit haben wir die benötigen Grundlagen zusammen, um im nächsten Kapitel die Kategorie $\mathscr{H}$ der „Vektorbündel auf der projektiven Schiefgeraden “zu definieren.

Die zentralen Resultate dieser Arbeit werden in Kapitel 4 behandelt. Wir werden zunächst einigen Aufwand betreiben, um überhaupt die Kategorie $\mathscr{H}$ der „Vekorbündel auf der projektiven Schiefgeraden “zu definieren. Die Interpretation von Tripeln (M, N, θ) als Modulgarben auf einem hypothetischen geometrischen Objekt (der „projektiven Schiefgeraden“des Titels) rührt vom Spezialfall $\varphi = id_K$ her. In diesem Fall spezialisieren sich die Schiefpolynomringe $K[x^{\pm 1}; \varphi]$ zu den gewöhnlichen, kommutativen Polynomringen $K[x^{\pm 1}]$ mit der gemeinsamen Lokalisierung $K[x, x^{-1}]$. Die projektive Gerade $\mathbb{P}_K^1$ der klassischen algebraischen Geometrie ist dann die Verklebung der Primspektren $Spec(K[x])$ und $Spec(K[x^{-1}])$ über der gemeinsamen offenen Teilmenge $Spec(K[x, x^{-1}])$. Eine Modulgarbe auf $\mathbb{P}_K^1$ ist in entsprechender Weise die Verklebung

einer Modulgarbe auf $Spec(K[x])$ und einer Modulgarbe auf $Spec(K[x^{-1}])$ über $Spec(K[x, x^{-1}])$. Das ist aber nichts anderes als die Vorgabe eines $K[x]$-Modules M und eines $K[x^{-1}]$-Moduls N, zusammen mit einem Isomorphismus $\theta : M \otimes_{K[x]} K[x, x^{-1}] \to N \otimes_{K[x^{-1}]} K[x, x^{-1}]$ von $K[x, x^{-1}]$-Moduln. Anschließend definieren wir $\Phi_K^{ét}$ und zeigen einige Eigenschaften von φ-Moduln bevor wir die Äquivalenz von $\mathscr{H}$ und $\Phi_K^{ét}$ zeigen.
Danach definieren wir die Kategorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ der stetigen $\mathbb{F}_p$-Darstellungen der Galoisgruppe G_K und zeigen, dass die Kategorien $\Phi_K^{ét}$ und $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ äquivalent sind. Dieses Resultat ist ein Spezialfall des Satzes von Fontaine.
Der Zusammenhang zwischen Modulgarben auf der projektiven Schiefgeraden und étalen φ-Moduln geht auf Grayson zurück (vgl. [Grayson, 1985]). Diese Masterarbeit stellt im Wesentlichen eine Ausarbeitung der Abschnitte 3 und 4 von [Grayson, 1985] dar. Grayson wendet seine Ergebnisse an, um die sogenannte algebraische K-Theorie der Kategorien $\mathscr{H}$, $\Phi_K^{ét}$ und $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ zu untersuchen. Darauf gehen wir in dieser Arbeit nicht ein.

1.3 Notation

Alle Ringe in dieser Arbeit sind nicht notwendigerweise kommutativ, jedoch stets unitär. Dabei soll jeder Ringhomomorphismus $f : R \to S$ der Eigenschaft $f(1_R) = 1_S$ genügen.

2 Lokalisierung eines nichtkommutativen Ringes

Die Unterkapitel 2.1 bis einschließlich 2.3 basieren auf [J.C. McConnell, 1987] (Seite 41-51). Das Unterkapitel 2.4 basiert auf [Grayson, 1985] (Seite 365).

2.1 Konstruktion

Definition 2.1.1:
Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring.

1) Eine Teilmenge S von R heißt multiplikativ abgeschlossen, falls einerseits $1 \in S$ gilt und anderseits für zwei beliebige Elemente $s, t \in S$ auch das Produkt st wieder in S liegt.

2) Unter einer Rechtslokalisierung RS^{-1} von R bezüglich einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge S verstehen wir einen Ring RS^{-1} zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\vartheta : R \to RS^{-1}$, sodass gilt

(i) $\vartheta(S) \subseteq (RS^{-1})^\times$

(ii) für alle $q \in RS^{-1}$ existieren $r \in R$ und $s \in S$ mit $q = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$

(iii) $\ker \vartheta = ass\ S := \{r \in R | \exists s \in S : rs = 0\}$

3) Analog zu 2) lässt sich die Linkslokalisierung $S^{-1}R$ von R an einer multiplikativen abgeschlossenen Teilmenge S von R definieren

Im Folgenden werden wir einige Eigenschaften von Rechtslokalisierung zeigen. Mit entsprechenden Umformulierungen gelten diese Resultate auch für Linkslokalisierungen. Doch zunächst einmal ist nicht klar, ob zu einem Ring R und einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge S eine Rechtslokalisierung (oder Linkslokalisierung) überhaupt existiert. Im kommutativen Fall hat es noch genügt, dass S eine multiplikative Teilmenge ist, doch im nichtkommutativen Fall muss S noch zusätzlichen Bedingungen genügen.

2.2 Eigenschaften

Satz 2.2.1 (universelle Eigenschaft)**:**
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, sodass eine Rechtslokaliserung (R_S, ϑ) von R bezüglich S existiert. Sei ferner Q ein Ring und $\eta : R \to Q$ ein Ringhomomorphismus mit $\eta(S) \subseteq Q^\times$. Unter diesen Vorraussetzungen existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\tilde{\eta} : R_S \to Q$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & & Q \\ & RS^{-1} \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\eta}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

kommutativ macht.

Beweis.
Eindeutigkeit: Sei $\tilde{\eta} : RS^{-1} \to Q$ ein Ringhomomorphismus, welcher das Diagramm (1) kommutativ macht. Sei $q \in RS^{-1}$ beliebig. Dann gibt es ein $r \in R$ und $s \in S$ mit $q = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$. Wir zeigen, dass q unter $\tilde{\eta}$ auf $\eta(r)\eta(s)^{-1}$ abgebildet werden muss. Nun gilt

$$\eta(r) = \tilde{\eta}(\vartheta(r)) = \tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta(s)) = \tilde{\eta}((\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1})\tilde{\eta}(\vartheta(s)) = \tilde{\eta}((\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1})\eta(s), \tag{2}$$

da einerseits $\eta = \tilde{\eta} \circ \vartheta$ gilt und da anderseits η ein Ringhomomorphismus ist. Multiplizieren wir $\eta(s)^{-1}$ von rechts an (2) erhalten wir $\tilde{\eta}(q) = \tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}) = \eta(r)\eta(s)^{-1}$.

Existenz: Wir haben schon gezeigt, dass η durch $\tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}) := \eta(r)\eta(s)^{-1}$ gegeben sein muss. Jedoch ist die Darstellung von $q = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} \in RS^{-1}$ nicht eindeutig. Wir müssen also zeigen, dass $\tilde{\eta}$ wohldefiniert, additiv und multiplikativ ist. Für alle drei Eigenschaften benötigen wir die Eigenschaft (iii) der Rechtslokalisierung RS^{-1} aus Definition 2.1.1.

- Wohldefiniert:
Seien $r, r' \in R$ und $s, s' \in S$ mit $\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} = \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} \in RS^{-1}$. Multiplikation dieser Gleichung mit $\vartheta(s)$ von rechts liefert $\vartheta(r) = \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1}\vartheta(s)$. $\vartheta(s')^{-1}\vartheta(s)$ ist natürlich auch ein Element von RS^{-1}, sodass es ein $\tilde{r} \in R$ und $\tilde{s} \in S$ gibt mit
$$\vartheta(s')^{-1}\vartheta(s) = \vartheta(\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1}. \tag{3}$$
Nun können wir $\vartheta(r)$ mit Hilfe von (3) schreiben als
$$\vartheta(r) = \vartheta(r')\vartheta(\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1} = \vartheta(r'\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1}. \tag{4}$$
Durch Umformen von (3) erhalten wir $\vartheta(s\tilde{s}) = \vartheta(s'\tilde{r})$ und somit $s\tilde{s} - s'\tilde{r} \in \ker\vartheta = \operatorname{ass} S$, d.h. es gibt ein $z \in S$ mit $(s\tilde{s} - s'\tilde{r})z = 0$. Durch Anwenden von η erhalten wir $\eta(s\tilde{s} - s'\tilde{r})\eta(z) = 0$. Wegen $\eta(S) \subseteq Q^\times$ können wir mit $\eta(z)^{-1}$ multiplizieren und erhalten einerseits
$$\eta(s\tilde{s} - s'\tilde{r}) = 0 \Leftrightarrow \eta(\tilde{r}) = \eta(s')^{-1}\eta(s\tilde{s}) \in Q^\times \tag{5}$$
und somit anderseits
$$\eta(s\tilde{s} - s'\tilde{r}) = 0 \Leftrightarrow \eta(s)^{-1} = \eta(\tilde{s})\eta(\tilde{r})^{-1}\eta(s')^{-1}. \tag{6}$$
Analog zur Umformung von (3) können wir (4) Umformen und erhalten $r\tilde{s} - r'\tilde{r} \in \ker\vartheta = \operatorname{ass} S$, d.h. es gibt ein $z' \in S$ mit $(r\tilde{s} - r'\tilde{r})z' = 0$. Durch Anwenden von η erhalten wir $\eta(r\tilde{s} - r'\tilde{r})\eta(z') = 0$. Analog zu oben erhalten wir
$$\eta(r\tilde{s} - r'\tilde{r}) = 0 \Leftrightarrow \eta(r) = \eta(r')\eta(\tilde{r})\eta(\tilde{s})^{-1}. \tag{7}$$
Nun liefern uns (6) und (7) die Wohldefiniertheit von $\tilde{\eta}$:
$$\eta(r)\eta(s)^{-1} = \eta(r')\eta(\tilde{r})\eta(\tilde{s})^{-1}\eta(\tilde{s})\eta(\tilde{r})^{-1}\eta(s')^{-1} = \eta(r')\eta(s')^{-1}. \tag{8}$$

- Multiplikativ:
Seien $\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}, \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} \in R_S$ beliebig mit $r, r' \in R$ und $s, s' \in S$. Dann gibt es ein $\tilde{r} \in R$ und $\tilde{s} \in S$, sodass
$$\vartheta(s)^{-1}\vartheta(r') = \vartheta(\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1} \tag{9}$$
gilt. Deshalb wird $\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} = \vartheta(r\tilde{r})\vartheta(s'\tilde{s})^{-1}$ unter $\tilde{\eta}$ auf $\eta(r\tilde{r})\eta(s'\tilde{s})^{-1}$ abgebildet. Wir berechnen nun $\eta(\tilde{r})$ unter Verwendung von (9) und nutzen denselben Trick wie beim Beweis der Wohldefiniertheit. Also liefert (9) unmittelbar $r'\tilde{s} - s\tilde{r} \in \ker\vartheta = \operatorname{ass} S$, d.h. es gibt ein $z \in S$ mit $(r'\tilde{s} - s\tilde{r})z = 0$. Anwenden von η und Umformungen wie im Beweis der Wohldefiniertheit liefern dann die Gleichung
$$\eta(\tilde{r}) = \eta(s)^{-1}\eta(r')\eta(\tilde{s}). \tag{10}$$
Nun können wir die Multiplikativität von $\tilde{\eta}$ zeigen:
$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1}) &= \eta(\vartheta(r\tilde{r})\vartheta(s'\tilde{s})^{-1}) = \eta(r\tilde{r})\eta(s'\tilde{s})^{-1} = \eta(r)\eta(\tilde{r})\eta(\tilde{s})^{-1}\eta(s')^{-1} \\ &\overset{(10)}{=} \eta(r)\eta(s)^{-1}\eta(r')\eta(\tilde{s})\eta(\tilde{s})^{-1}\eta(s')^{-1} = \eta(r)\eta(s)^{-1}\eta(r')\eta(s')^{-1} \\ &= \tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1})\tilde{\eta}(\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1})\end{aligned}$$

- Additiv:
Um die Additivität zu zeigen, benötigen wir einen weiteren Trick. Zuerst zeigen wir einen Spezialfall und führen dann mit Hilfe der Multiplikativität von $\tilde{\eta}$ den allgemeinen Fall auf den Spezialfall zurück. Für den Speziallfall seien $\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$ und $\vartheta(r') \in RS^{-1}$ mit $r, r' \in R$ und $s \in S$ beliebig. In diesem Fall können wir die Additivität von $\tilde{\eta}$ leicht zeigen, da $\vartheta(s)$ eine Einheit ist:
$$\begin{aligned}\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} + \vartheta(r') = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} + \vartheta(r's)\vartheta(s)^{-1} = \vartheta(r + r's)\vartheta(s)^{-1} &\overset{\tilde{\eta}}{\mapsto} \eta(r + r's)\eta(s)^{-1} \\ = \eta(r)\eta(s)^{-1} + \eta(r') = \tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}) + \tilde{\eta}(\vartheta(r')).&\end{aligned} \tag{11}$$

Nun können wir den allgemeinen Fall beweisen. Seien dazu $\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}, \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} \in RS^{-1}$ mit $r, r' \in R$ und $s, s' \in S$ beliebig, dann gilt

$$\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} + \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} = (\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta(s') + \vartheta(r'))\vartheta(s')^{-1}. \tag{12}$$

Da $\vartheta(s)^{-1}\vartheta(s')$ in RS^{-1} liegt, gibt es ein $\tilde{r} \in R$ und $\tilde{s} \in S$ mit

$$\vartheta(s)^{-1}\vartheta(s') = \vartheta(\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1}. \tag{13}$$

Durch einfache Umformungen erhalten wir $s'\tilde{s} - s\tilde{r} \in \ker \vartheta = \operatorname{ass} S$, d.h. es existiert ein $z \in S$ mit $(s'\tilde{s} - s\tilde{r})z = 0$. Erneut können wir η Anwenden und erhalten analog zum Beweis der Wohldefiniertheit $\eta(\tilde{r}) \in Q^{\times}$ und somit:

$$\eta(s'\tilde{s} - s\tilde{r})\eta(z) = 0 \Leftrightarrow \eta(\tilde{s})^{-1} = \eta(\tilde{r})^{-1}\eta(s)^{-1}\eta(s'). \tag{14}$$

Mit Hilfe von (12), (13), (14) und der Multiplikativität von $\tilde{\eta}$ können wir uns nun auf den Spezialfall zurückziehen und somit die Additivität zeigen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} + \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1}) &\overset{(12)}{=} \tilde{\eta}((\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta(s') + \vartheta(r'))\vartheta(s')^{-1}) \overset{(13)}{=} \tilde{\eta}((\vartheta(r\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1} + \vartheta(r'))\vartheta(s')^{-1}) \\
&= \tilde{\eta}(\vartheta(r\tilde{r})\vartheta(\tilde{s})^{-1} + \vartheta(r'))\tilde{\eta}(\vartheta(s')^{-1}) = (\eta(r\tilde{r})\eta(\tilde{s})^{-1} + \eta(r'))\eta(s')^{-1} \\
&\overset{(14)}{=} (\eta(r)\eta(\tilde{r})\eta(\tilde{r})^{-1}\eta(s)^{-1}\eta(s') + \eta(r'))\eta(s')^{-1} = \eta(r)\eta(s)^{-1} + \eta(r')\eta(s')^{-1} \\
&= \tilde{\eta}(\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}) + \tilde{\eta}(\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1})
\end{aligned} \tag{15}$$

□

Satz 2.2.2:
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen.

(i) Falls (RS^{-1}, ϑ) existiert, so ist es bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

(ii) Existieren sowohl die Linkslokalisierung $(S^{-1}R, \xi)$ als auch die Rechtslokalisierung (RS^{-1}, ϑ), so existiert genau ein Ringisomorphismus $\tilde{\xi} : R_S \to_S R$ mit $\tilde{\xi} \circ \vartheta = \xi$.

Beweis. (i) Sei (Q, η) eine weitere Rechtslokalisierung. Dann kommutieren, wegen der universellen Eigenschaft (2.2.1), die beiden folgenden Diagramme:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & & Q \\ & RS^{-1} \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\eta}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\vartheta"] \arrow[dr, "\eta"'] & & RS^{-1} \\ & Q \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\vartheta}"'] & \end{tikzcd}$$

Dann kommutieren sowohl

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & Q \arrow[r, "\tilde{\vartheta}"] & RS^{-1} \\ & RS^{-1} \arrow[ur, dotted, "id_{RS^{-1}}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\eta"'] & RS^{-1} \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & Q \\ & Q \arrow[ur, dotted, "id_Q"'] & \end{tikzcd}$$

als auch

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & Q \arrow[r, "\tilde{\vartheta}"] & RS^{-1} \\ & RS^{-1} \arrow[u, "\tilde{\eta}"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\vartheta}\circ\tilde{\eta}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\eta"'] & RS^{-1} \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & Q \\ & Q \arrow[u, "\tilde{\vartheta}"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\eta}\circ\tilde{\vartheta}"'] & \end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigengschaft (2.2.1) gilt nun $\tilde{\vartheta} \circ \tilde{\eta} = id_{RS^{-1}}$, $\tilde{\eta} \circ \tilde{\vartheta} = id_Q$ und folglich sind $\tilde{\vartheta}, \tilde{\eta}$ Isomorphismen.
(ii) Die universelle Eigenschaft (2.2.1) liefert uns die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & & S^{-1}R \\
& RS^{-1} \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\xi}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\vartheta"] \arrow[dr, "\xi"'] & & RS^{-1} \\
& S^{-1}R \arrow[ur, dotted, "\exists!\tilde{\vartheta}"'] &
\end{tikzcd}$$

und somit kommutieren auch

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & S^{-1}R \arrow[r, "\tilde{\vartheta}"] & RS^{-1} \\
& RS^{-1} \arrow[ur, dotted, "id_{RS^{-1}}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\xi"'] & RS^{-1} \arrow[r, "\tilde{\xi}"] & S^{-1}R \\
& S^{-1}R \arrow[ur, dotted, "id_{S^{-1}R}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann kommutieren aber auch die beiden folgenden Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\vartheta"'] & S^{-1}R \arrow[r, "\tilde{\vartheta}"] & RS^{-1} \\
& RS^{-1} \arrow[u, "\tilde{\xi}"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\vartheta}\circ\tilde{\xi}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "\xi"'] & RS^{-1} \arrow[r, "\tilde{\xi}"] & S^{-1}R \\
& S^{-1}R \arrow[u, "\tilde{\vartheta}"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\xi}\circ\tilde{\vartheta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Analog zum Vorgehen in (i) erhalten wir, dass $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\vartheta}$ Isomorphismen sind. □

2.3 Existenz

Während im kommutativen Fall für jede multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subseteq R$ eine Lokalisierung existiert, kann im nichtkommutativen Fall die Existenz einer Lokalisierung nicht immer gewährleistet werden. Für die Existenz der Lokalisierung im nichtkommutativen Fall muss S noch zwei weiteren Eigenschaften genügen. Zunächst benötigen wir die Ore-Rechtsbedingung. Da wir uns größtenteils nur mit Rechtslokalisierungen beschäftigen, sprechen wir im folgenden oft auch nur von der Ore-Bedingung.

Definition 2.3.1 (Ore-Rechtsbedingung)**:**
Sei R ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Wir sagen, dass S genügt der Ore-Rechtsbedingung genügt, falls es für jedes $r \in R$ und jedes $s \in S$ ein $r' \in R$ und ein $s' \in S$ gibt mit $rs' = sr'$.

Nun erhalten wir unmittelbar:

Lemma 2.3.2:
Sei R ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Falls (RS^{-1}, ϑ) existiert, so genügt S der Ore-Bedingung.

Beweis. Seien $r \in R$ und $s \in S$ beliebig. Betrachte nun das Element $\vartheta(s)^{-1}\vartheta(r) \in R_S$. Dann gibt es nach Definition 2.1.1 ein $r_1 \in R$ und $s_1 \in S$, sodass $\vartheta(s)^{-1}\vartheta(r) = \vartheta(r_1)\vartheta(s_1)^{-1}$ gilt. Nach einfachen Umformungen erhalten wir, dass $rs_1 - sr_1$ im Kern von ϑ liegt. Der Kern von ϑ ist aber nach Definition 2.1.1 ass S, d.h. es gibt ein $s_2 \in S$ mit $(rs_1 - sr_1)s = 0$. Setzen wir nun $s' := s_1 s_2 \in S$ und $r' := r_1 s_2 \in R$, so erhalten wir $rs' = sr'$. □

Umgekehrt liefert uns die Ore-Rechtsbedingung allein noch nicht die Existenz einer Rechtslokalisierung. Die Ore-Bedingung ist jedoch notwendig für die Existenz der Rechtslokalisierung und liefert uns zunächst folgendes Resultat:

Lemma 2.3.3:
Sei R ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Falls S der Ore-Bedingung genügt, so ist ass S ist ein zweiseitiges Ideal.

Beweis. Seien $a, b \in \text{ass } S$ und $r \in R$ beliebig. Dann existieren $s, t \in S$ mit $as = bt = 0$. Die Ore-Bedingung liefert die Existenz von $t_1, r' \in R$ und $s_1, s' \in S$, sodass $ss_1 = tt_1$ und $rs' = sr'$ gelten. Nun ist $ss_1 \in S$ und es gilt $(a-b)ss_1 = ass_1 - bss_1 = ass_1 - btt_1 = 0$, d.h. $a - b \in \text{ass } S$. Ferner gilt $ar, ra \in \text{ass } S$, denn einerseits ist $ars' = asr' = 0$ und anderseits ist $ras = 0$. □

Für die Konstruktion der Rechtslokalisierung benötigen wir nun folgende Definition:

Definition 2.3.4:
Sei R ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, welche der Ore-Bedingung genügt. Dann setzen wir $\overline{R} := R/\text{ass } S$ und $\overline{S} := \{s + \text{ass } S | s \in S\} \subseteq \overline{R}$.

Offenbar ist $\overline{S}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $\overline{R}$ und auch die Ore-Bedingung überträgt sich auf $\overline{S}$:

Lemma 2.3.5:
Sei R ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, welche der Ore-Rechtsbedingung genügt, dann gilt

(i) $\overline{S} \subseteq \overline{R}$ genügt der Ore-Rechtsbedingung

(ii) ass $\overline{S} = 0$, d.h. für $\overline{s} \in \overline{S}$ und $\overline{r} \in \overline{R}$ folgt aus $\overline{r} \cdot \overline{s} = 0$ stets $\overline{r} = 0$

Beweis. (i) Seien $\overline{r} = r + \text{ass } S \in \overline{R}$, $\overline{s} = s + \text{ass } S \in \overline{S}$ beliebig. Nun gibt es wegen der Ore-Bedingung von S ein $r_1 \in R$ und ein $s_1 \in S$, sodass $rs_1 = sr_1$ gilt. Setze nun $\overline{r_1} := r_1 + \text{ass } S \in \overline{R}$ und $\overline{s_1} := s_1 + \text{ass } S \in \overline{S}$. Nun gilt $\overline{r} \cdot \overline{s_1} = rs_1 + \text{ass } S = sr_1 + \text{ass } S = \overline{s} \cdot \overline{r_1}$.
(ii) Seien $\overline{r} \in \overline{R}$ und $\overline{s} \in \overline{S}$ wie in (i) mit $\overline{r} \cdot \overline{s} = 0$, d.h. $rs \in \text{ass } S$. Nun gibt es ein $s' \in S$ mit $rss' = 0$. Da ss' in S liegt, liegt r in ass S. Also gilt $\overline{r} = 0 + \text{ass } S$. □

Wir führen nun die letzte Bedingung ein, welche die Existenz einer Lokalisierung im Allgemeinen sichert.

Definition 2.3.6:
Sei R ein Ring. Eine Teilmenge S von R heißt Rechtsteilermenge, falls die folgenden drei Eigenschaften erfüllt sind:

(i) S ist eine multiplikative Teilmenge

(ii) S genügt der Ore-Rechtsbedingung

(iii) für $\overline{s} \in \overline{S}$ und $\overline{r} \in \overline{R}$ folgt aus $\overline{s} \cdot \overline{r} = 0$ stets $\overline{r} = 0$

Analog ist eine Linksteilermenge definiert. Eine Menge $S \subseteq R$ heißt Teilermenge, wenn sie sowohl Rechtsteilermenge als auch Linksteilermenge ist.

Bemerkung 2.3.7 (zur Eigenschaft (iii))**:**
Im Unterschied zu 2.3.5 wird hier mit $\overline{s}$ von links multipliziert. Ferner ist die Eigenschaft (iii) äquivalent zu

$$(iii') \textit{ Seien } s \in S, r \in R \textit{ beliebig mit } sr = 0, \textit{dann existiert ein } s' \in S \textit{ mit } rs' = 0, \tag{16}$$

d.h. jeder S-Linksnullteiler ist auch ein S-Rechtsnullteiler.

Beweis. Seien $\overline{r} = r + \text{ass } S \in \overline{R}$ und $\overline{s} = s + \text{ass } S \in \overline{S}$ beliebig.
„$\Rightarrow$"Ist $sr = 0$, so auch $\overline{sr} = 0$. Dann ist aber $\overline{r} = 0$, d.h. $r \in \text{ass } S$. Also gibt es ein $s' \in S$ mit $rs' = 0$
„$\Leftarrow$"Sei $\overline{s} \cdot \overline{r} = 0$, d.h. sr liegt in ass S. Nun gibt es ein $s' \in S$ mit $srs' = s(rs') = 0$. Also liegt auch rs' in ass S, dann gibt es aber auch ein $s'' \in S$ mit $rs's'' = 0$. Da $s's''$ in S liegt, liegt nun auch r in ass S, d.h. $\overline{r} = 0$. □

Die Eigenschaft von S, eine Rechtsteilermenge zu sein, garantiert uns nun die Existentz einer Rechtslokalisierung:

Satz 2.3.8:
Sei R ein Ring. Ist $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge, so existiert die Rechtslokalisierung (RS^{-1}, ϑ) von R bezüglich S genau dann, wenn S eine Rechtsteilermenge ist.

Beweis. „⇒“ Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge (Eigenschaft (i) einer Rechtsteilermenge) und die Rechtslokalisierung (RS^{-1}, ϑ) von R bezüglich S existiere. In 2.3.2 haben wir gesehen, dass die Eigenschaft (ii) (Ore-Rechtsbedingung) einer Rechtsteilermenge unter diesen Voraussetzungen erfüllt ist. Wir müssen also nur noch die Eigenschaft (iii) nachweisen:
Seien dazu $\overline{r} = r + \operatorname{ass} S = r + \ker \vartheta \in \overline{R}$ und $\overline{s} = s + \operatorname{ass} S \in \overline{S}$ mit $\overline{sr} = 0$ beliebig. Dann liegt sr im Kern von ϑ, d.h. $\vartheta(s)\vartheta(r) = \vartheta(sr) = 0$. Nun ist $\vartheta(s)$ eine Einheit, sodass wir die letzte Gleichung mit $\vartheta(s)^{-1}$ (von links) multiplizieren können. Also liegt r ebenfalls im Kern von ϑ. Wegen $\ker \vartheta = \operatorname{ass} S$ erhalten wir somit $\overline{r} = 0$ in $\overline{R}$.
„⇐“ Sei nun $S \subseteq R$ eine Rechtsteilermenge. Wir konstruieren zuerst eine Rechtslokalisierung (RS^{-1}, ϑ) für den Fall $\operatorname{ass} S = 0$ und gehen dabei wie folgt vor:

(i) setze $\mathcal{F} := \{A | A \text{ ist Rechtsideal von } R \text{ mit } A \cap S \neq \emptyset\}$ und $\mathcal{U} := \cup_{A \in \mathcal{F}} \operatorname{Hom}(A, R)$. Hierbei und im restlichen Beweise bezeichnet $\operatorname{Hom}(A, B)$ die Menge der R-Rechtsmodulhomomorphismen von einem R-Rechtsideal A nach einem R-Rechtsideal B

(ii) zeige, dass für $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ und $\alpha \in \operatorname{Hom}(A_1, R)$ die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$

b) $\alpha^{-1}(A_2) \in \mathcal{F}$

(iii) definiere eine gewisse Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{U}$

(iv) definiere auf $\mathcal{U}/\sim$ eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$

(v) zeige, dass $RS^{-1} := (\mathcal{U}/\sim, +, \cdot)$ ein Ring ist

(vi) identifiziere $r \in R$ mit der Äquivalenzklasse des Homomorphismus $\lambda(r) \in \operatorname{Hom}(R, R)$ $\lambda(r) : x \mapsto rx$. Mit anderen Worten betten wir R in RS^{-1} ein via

$$\begin{aligned} \vartheta : R &\to RS^{-1} \\ r &\mapsto [\lambda(r)] \end{aligned}$$

(vii) unter dieser Einbettung hat jedes $s \in S$ $(s \mapsto [\lambda(s)])$ ein Inverses $s^{-1} = [\alpha]$ mit $\alpha \in \operatorname{Hom}(sR, R)$ definiert durch $\alpha : sx \mapsto x$. Dabei ist α wohldefiniert. Sei $sx = sy$. Dann ist $s(x - y) = 0$, d.h. $x - y \in \operatorname{ass}(S) = \{0\}$. Also gilt $x = y$.

(viii) zeige, dass jede Äquivalenzklasse $[\alpha] \in RS^{-1}$ sich schreiben lässt als $[\alpha] = as^{-1}$ mit $A \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \operatorname{Hom}(A, R)$, $s \in A \cap S$ und $a := \alpha(s)$

Zu (ii.a): Seien $s_1 \in A_1 \cap S$ und $s_2 \in A_2 \cap S$. Nach der Ore-Rechtsbedingung (Eigenschaft (ii)) gibt es nun ein $r' \in R$ und $s' \in S$ mit $s_1 s' = s_2 r'$. Die linke Seite ist offenbar in $S \cap A_1$, da S einerseits multiplikativ abgeschlossen und anderseits A_1 ein R-Rechtsideal ist. Ebenso ist die rechte Seite ein Element des R-Rechtsideals A_2. Insgesamt haben wir also $(A_1 \cap A_2) \cap S \neq \emptyset$. Da der Schnitt zweier R-Rechtsideale wieder ein R-Rechtsideal ist sind wir fertig.

Zu (ii.b): Seien $a, b \in \alpha^{-1}(A_2)$ und $r \in R$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(a - b) = \alpha(a) - \alpha(b) \in A_2 &\Leftrightarrow a - b \in \alpha^{-1}(A_2) \\ \alpha(ar) = \alpha(a)r \in A_2 &\Leftrightarrow ar \in \alpha^{-1}(A_2), \end{aligned} \tag{17}$$

da A_2 ein Rechtsideal und α ein R-Rechtsmodulhomomorphismus ist. Also ist $\alpha^{-1}(A_2)$ ein R-Rechtsideal. Seien nun $s \in A_1 \cap S$ und $t \in A_2 \cap S$ beliebig und setze $r := \alpha(s)$. Wegen der Ore-Rechtsbedingung gibt es nun ein $r' \in R$ und ein $s' \in S$ mit

$$\alpha(ss') = \alpha(s)s' = rs' = tr' \in A_2. \tag{18}$$

Nun liegt ss' in $\alpha^{-1}(A_2) \cap S$, wegen (18) und da ss' in $A_1 \cap S$ liegt. Damit ist nun b) bewiesen.

Zu (iii): Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ beliebig. Dann gibt es $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, R)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}(B, R)$. Nun können wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathcal{U}$ definieren:

$$\alpha \sim \beta \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \exists\, C \in \mathcal{F} \text{ mit } C \subseteq A \cap B : \alpha_{|C} = \beta_{|C} \tag{19}$$

Die Reflexivität und Symmetrie von $\sim$ sind per Definition sofort klar. Seien nun $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i, R)$ mit $A_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, 2, 3$ beliebig, sodass $\alpha_1 \sim \alpha_2$ und $\alpha_2 \sim \alpha_3$ gelten. Nun gibt es $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq A_1 \cap A_2$ und $B \subseteq A_2 \cap A_3$, sodass sowohl $\alpha_{1|A} = \alpha_{2|A}$ als auch $\alpha_{2|B} = \alpha_{3|B}$ gilt. Wir wählen nun $C = A \cap B$. Nach (ii.a) ist C ein Element von $\mathcal{F}$ mit $C \subseteq A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subseteq A_1 \cap A_3$ und es gilt $\alpha_{1|C} = \alpha_{2|C} = \alpha_{3|C}$, d.h. $\alpha_1 \sim \alpha_3$.
Zu (iv): Seien $\alpha_i, \beta_i \in \mathcal{U}$ beliebig mit $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i, R), \beta_i \in \mathrm{Hom}(B_i, R)$ und $A_i, B_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, 2, 3$. Wir definieren nun auf $\mathcal{U}$ eine Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} + :\ & \mathcal{U}/\sim \times\, \mathcal{U}/\sim \;\to \mathcal{U}/\sim \qquad ([\alpha_1], [\alpha_2]) \mapsto [(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}] \\ \cdot :\ & \mathcal{U}/\sim \times\, \mathcal{U}/\sim \;\to \mathcal{U}/\sim \qquad ([\alpha_1], [\alpha_2]) \mapsto [(\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|\alpha_2^{-1}(A_1)}]. \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei schreiben wir etwas ungenau $(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}$ und meinen damit die Abbildung $\alpha_{1|A_1 \cap A_2} + \alpha_{2|A_1 \cap A_2}$. Wir müssen zeigen, dass die obigen Abbildungen wohldefiniert sind. Sei dazu $([\alpha_1], [\alpha_2]) = ([\beta_1], [\beta_2])$. Dann gibt es $P, Q \in \mathcal{F}$ mit $P \subseteq A_1 \cap B_1$ und $Q \subseteq A_2 \cap B_2$, sodass

$$\alpha_{1|P} = \beta_{1|P} \text{ und } \alpha_{2|Q} = \beta_{2|Q} \tag{21}$$

gilt.
$+$ wohldefiniert: Nach (ii.a) können wir $L := P \cap Q \in \mathcal{F}$ wählen und es gilt sowohl $L \subseteq A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2$, als auch

$$\alpha_{1|L} = \beta_{1|L} \text{ und } \alpha_{2|L} = \beta_{2|L}. \tag{22}$$

Nun impliziert (22) folgende Identität: $(\alpha_1 + \alpha_2)_{|L} = (\beta_1 + \beta_2)_{|L}$. Wir bemerken noch, dass L eine Teilmenge von $A_1 \cap A_2$ und $B_1 \cap B_2$ ist und können aus der letzten Gleichung herleiten, dass $((\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2})_{|L} = ((\beta_1 + \beta_2)_{|B_1 \cap B_2})_{|L}$ gilt. Insgesamt erhalten wir $[(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}] = [(\beta_1 + \beta_2)_{|B_1 \cap B_2}]$ und sind fertig.
$\cdot$ wohldefiniert: Nach (ii.a)-(ii.b) können wir $L := P \cap Q \cap \alpha_2^{-1}(A_1) \cap \beta_2^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}$ wählen. Dann gilt

$$\alpha_{1|L} = \beta_{1|L} \text{ und } \alpha_{2|L} = \beta_{2|L} \tag{23}$$

und deswegen auch

$$(\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|L} = (\beta_1 \circ \beta_2)_{|L}. \tag{24}$$

Die Wahl von L liefert uns mit (24) sofort $((\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|\alpha_2^{-1} A_1})_{|L} = ((\beta_1 \circ \beta_2)_{|\beta_2^{-1} B_1})_{|L}$. Insgesamt erhalten wir $[(\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|\alpha_2^{-1} A_1}] = [(\beta_1 \circ \beta_2)_{|\beta_2^{-1} B_1}]$.
Zu (v): Seien α_i, β_i für $i = 1, 2, 3$ beliebig wie in (iv). Bezeichne $\tilde{0} \in \mathrm{Hom}(R, R)$ die Nullabbildung und $\mathrm{id}_R \in \mathrm{Hom}(R, R)$ die Identität.

- $(RS^{-1}, +)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - Assoziativität:
  $$\begin{aligned} ([\alpha_1] + [\alpha_2]) + [\alpha_3] &= [(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}] + [\alpha_3] = [((\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2} + \alpha_3)_{|(A_1 \cap A_2) \cap A_3}] \\ &= [(\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)_{|A_2 \cap A_3})_{|A_1 \cap (A_2 \cap A_3)}] = [\alpha_1] + ([\alpha_2] + [\alpha_3]) \end{aligned}$$
  - neutrales Element:
  $$[\alpha_1] + [\tilde{0}] = [\alpha_1 + \tilde{0}] = [\alpha_1] = [\tilde{0}] + [\alpha_1]$$
  - inverses Element:
  $$[\alpha_1] + [-\alpha_1] = [\alpha_1 - \alpha_1] = [\tilde{0}] = [-\alpha_1] + [\alpha_1]$$
  - Kommutativität:
  $$[\alpha_1] + [\alpha_2] = [(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}] = [(\alpha_2 + \alpha_1)_{|A_2 \cap A_1}] = [\alpha_2] + [\alpha_1]$$
- $(RS^{-1}, \cdot)$ ist ein Monoid:

– Assoziativität: Einerseit haben wir

$$([\alpha_1][\alpha_2])[\alpha_3] = [(\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|_{\alpha_2^{-1}(A_1)}}][\alpha_3] = [((\alpha_1 \circ \alpha_2)_{|_{\alpha_2^{-1}(A_1)}} \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(\alpha_2^{-1}(A_1))}}] = [(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(\alpha_2^{-1}(A_1))}}] \tag{25}$$

und anderseits gilt

$$\begin{aligned}[\alpha_1]\left([\alpha_2][\alpha_3]\right) &= [\alpha_1][(\alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(A_2)}}] = [(\alpha_1][(\alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(A_2)}})_{|_{((\alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(A_2)}})^{-1}(A_1)}}] \\ &= [(\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(A_2)}})_{|_{((\alpha_2 \circ \alpha_3)_{|_{\alpha_3^{-1}(A_2)}})^{-1}(A_1)}}].\end{aligned} \tag{26}$$

(ii.a)-(ii.b) und (25)-(26) liefern dann $([\alpha_1][\alpha_2])[\alpha_3] = [\alpha_1]([\alpha_2][\alpha_3])$.

– neutrales Element:

$$[\alpha_1][\mathrm{id}_R] = [(\alpha_1 \circ id)_{|_{\mathrm{id}_R^{-1} A_1}}] = [\alpha] = [(\mathrm{id}_R \circ \alpha_1)_{|_{\alpha_1^{-1} R}}] = [\mathrm{id}_R][\alpha_1]$$

- Rechtsdistributiv:

$$\begin{aligned}([\alpha_1] + [\alpha_2])[\beta_1] &= [(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}][\beta_1] = [((\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2} \circ \beta_1)_{|_{\beta_1^{-1}(A_1 \cap A_2)}}] \\ &= [(\alpha_{1|A_1 \cap A_2} \circ \beta_1)_{|_{\beta_1^{-1}(A_1 \cap A_2)}}] + [(\alpha_{2|A_1 \cap A_2} \circ \beta_1)_{|_{\beta_1^{-1}(A_1 \cap A_2)}}] \\ &= [(\alpha_1 \circ \beta_1)_{|_{\beta_1^{-1} A_1}}] + [(\alpha_2 \circ \beta_1)_{|_{\beta_1^{-1} A_2}}] = [\alpha_1][\beta_1] + [\alpha_2][\beta_1]\end{aligned}$$

- Linksdistributiv:

$$\begin{aligned}[\beta_1]\left([\alpha_1] + [\alpha_2]\right) &= [\beta_1]\left[(\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2}\right] = [(\beta_1 \circ (\alpha_1 + \alpha_2)_{|A_1 \cap A_2})_{|_{((\alpha_1+\alpha_2)_{|A_1 \cap A_2})^{-1} B_1}}] \\ &= [(\beta_1 \circ \alpha_{1|A_1 \cap A_2})_{|_{((\alpha_1+\alpha_2)_{|A_1 \cap A_2})^{-1} B_1}}] + [(\beta_1 \circ \alpha_{2|A_1 \cap A_2})_{|_{((\alpha_1+\alpha_2)_{|A_1 \cap A_2})^{-1} B_1}}] \\ &= [(\beta_1 \circ \alpha_1)_{|_{\alpha_1^{-1} B_1}} + [(\beta_1 \circ \alpha_2)_{|_{\alpha_2^{-1} B_1}} = [\beta_1][\alpha_1] + [\beta_1][\alpha_2]\end{aligned}$$

Zu (vi): Wir zeigen, dass ϑ ein injektiver Ringhomomorphismus ist. Seien dazu $r, s \in R$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} r + s &\mapsto [\lambda(r+s)] = [\lambda(r) + \lambda(s)] = [\lambda(r)] + [\lambda(s)], \\ rs &\mapsto [\lambda(rs)] = [\lambda(r) \circ \lambda(s)] = [\lambda(r)][\lambda(s)] \text{ und} \\ 1 &\mapsto [\lambda(1)] = [\mathrm{id}_R] = 1_{RS^{-1}}, \end{aligned}$$

d.h. ϑ ist ein Ringhomomorphismus. Sei nun $[\lambda(r)] = \vartheta(r) = [\tilde{0}]$, d.h. es gibt ein $A \in \mathcal{F}$, sodass $\lambda(r)_{|A} = \tilde{0}_{|A}$ gilt. Also gilt für alle $a \in A : \lambda(r)(a) = 0 \Leftrightarrow ra = 0$. Insbesondere gibt es nun ein $s \in A \cap S$, sodass $rs = 0$ gilt, d.h. $r \in \mathrm{ass}\ S = 0$. Also ist ϑ injektiv.

Zu (vii): Es gilt

$$\begin{aligned} ss^{-1} &\mapsto [\lambda(s) \circ \alpha] = [sx \overset{\alpha}{\mapsto} x \overset{\lambda(s)}{\mapsto} sx] = [id_{|sR}], \\ s^{-1}s &\mapsto [\alpha \circ \lambda(s)] = [x \overset{\lambda(s)}{\mapsto} sx \overset{\alpha}{\mapsto} x] = [id_R]. \end{aligned}$$

Zu (viii): Zunächst berechnen wir $as^{-1} = [x \mapsto ax][sx \mapsto x] = [sx \mapsto \alpha(s)x]$. Wir zeigen nun, dass α in $[sx \mapsto \alpha(s)x]$ liegt. Nach (ii.a) können wir $B = A \cap sR \in \mathcal{F}$ wählen. Sei nun $sx \in B$ beliebig. Dann gilt $\alpha(sx) = \alpha(s)x$, da α ein R-Rechtsmodulhomomorphismus ist. Also gilt $[\alpha] = as^{-1}$.

Mit (i)-(viii) haben wir nun eine Rechtslokalisierung (RS^{-1}, ϑ) von R bezüglich S für den Fall ass $S = 0$ konstruiert. Sei nun ass S beliebig. Wir erinnern zunächst an die Definition von $\overline{R} = R + \mathrm{ass}\ S$ und $\overline{S} = S + \mathrm{ass}\ S$. Dabei ist $\overline{S} \subseteq \overline{R}$ multiplikativ abgeschlossen und in 2.3.5 haben wir gesehen, dass ass $\overline{S} = 0$ gilt und $\overline{S}$ der Ore-Rechtsbedingung genügt. Damit gilt $\overline{\overline{R}} \cong \overline{R}, \overline{\overline{S}} \cong \overline{S}$ und $\overline{\overline{S}} \cong \overline{S}$ genügt der Bedingung 2.3.6 (iii), d.h. $\overline{S}$ ist eine Rechtsteilermenge in $\overline{R}$. Somit haben wir also eine Rechtslokalisierung $(\overline{R}(\overline{S})^{-1}, \overline{\vartheta})$ von $\overline{R}$ bezüglich $\overline{S}$. Betrachte nun den Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \vartheta : R \to \overline{R} &\overset{\overline{\vartheta}}{\hookrightarrow} \overline{R}(\overline{S})^{-1} \\ r \mapsto \overline{r} &\mapsto [\lambda(\overline{r})]. \end{aligned}$$

ϑ ist als Komposition von Ringhomomorphismen selbst ein Ringhomomorphismus. Nun ist $(\overline{R}(\overline{S})^{-1}, \vartheta)$ eine Rechtslokalisierung von R bezüglich S:

(i) Für alle $s \in S$ gilt $\vartheta(s) = [\lambda(\overline{s})] = \overline{s} \in \overline{R}_{\overline{S}}^{\times}$.

(ii) Sei $q \in \overline{R}(\overline{S})^{-1}$ beliebig. Dann gibt es $r \in R,\ s \in S$ mit $\overline{r} = r + \operatorname{ass} S \in \overline{R},\ \overline{s} = s + \operatorname{ass} S \in \overline{S}$, sodass $q = \overline{r} \cdot \overline{s}^{-1} = [\lambda(\overline{r})][\lambda(\overline{s})]^{-1} = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$ gilt.

(iii) Wir zeigen, dass $\ker \vartheta = \operatorname{ass} S$ gilt. Sei $r \in \ker \vartheta$, d.h. es gibt ein $A \in \mathcal{F}$ mit $ra = \lambda(r)(a) = 0$ für alle $a \in A$. Wegen $A \in \mathcal{F}$ gibt es nun ein $s \in A \cap S$ mit $rs = 0$, d.h. $r \in \operatorname{ass} S$. Sei nun $r \in \operatorname{ass} S$, d.h. es gibt ein $s \in S$ mit $rs = 0$. Dann gilt $\vartheta(r)\vartheta(s) = \vartheta(rs) = 0$. Multiplizieren wir mit $\vartheta(s)^{-1}$ von rechts, so erhalten wir $\vartheta(r) = 0$ und damit $\operatorname{ass} S \subseteq \ker \vartheta$.

□

Bemerkung 2.3.9:
Aussage (ii)a zeigt, dass die Familie $(Hom(A, R))_{A\in\mathcal{F}}$ abelscher Gruppen bezüglich der durch $A \subseteq B$ induzierten Restriktionsabbildungen $Hom(B, R) \to Hom(A, R)$ ein induktives System bildet. Nach Konstruktion ist dann

$$(RS^{-1}, +) = \varinjlim_{A\in\mathcal{F}} Hom(A, R)$$

der zugehörige induktive Limes in der Kategorie der abelschen Gruppen, sodass sich der Beweis unter Verwendung dieser Begriffe verkürzen lässt.

Lemma 2.3.10:
Sei R ein Ring ohne echten Rechtsnullteiler und $S \subseteq R$ eine Rechtsteilermenge. Dann gilt

(i) ϑ ist injektiv. Insbesondere wird R via ϑ in RS^{-1} eingebettet.

(ii) RS^{-1} besitzt keinen echten Rechtsnullteiler

Beweis. Zu (i): Es gilt $\ker \vartheta = \operatorname{ass} S = \{0\}$.
Zu (ii): Angenommen es gibt einen Rechtsnullteiler $a = \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} \in RS^{-1}$. Wir haben also ein Element $b = \vartheta(r')\vartheta(s')^{-1} \in RS^{-1}$ mit $\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1}\vartheta(r)\vartheta(s)^{-1} = 0$. Durch Multiplikation mit $\vartheta(s)$ erhalten wir $\vartheta(r')\vartheta(s')^{-1}\vartheta(r) = 0$. Ferner ist $\vartheta(s')^{-1}\vartheta(r)$ ein Element von RS^{-1}. Also gibt es ein $r'' \in R$ und $s'' \in S$ mit $\vartheta(s')^{-1}\vartheta(r') = \vartheta(r'')\vartheta(s'')^{-1}$. Insgesamt erhalten wir damit $\vartheta(r')\vartheta(r'')\vartheta(s'')^{-1} = 0$. Damit liegt $r'r''$ im Kern von ϑ. Da R nullteilerfrei ist, gilt $\operatorname{ass} S = 0$ und somit $r' = 0$ oder $r'' = 0$. Dann muss aber schon $a = 0$ oder $b = 0$ gelten. Damit ist a kein echter Rechtsnullteiler. □

2.4 Vertauschbarkeit der Lokalisierungsreihenfolge

Wir wollen nun untersuchen unter welchen Bedingungen wir die Reihenfolge der Lokalisierung bezüglich zweier Rechtteilermengen vertauschen können. Sei dazu R ein Ring und S, T Rechtsteilermengen von R. Setze

$$U := \langle S, T\rangle := \{\prod_{i=1}^{n} u_i | n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \forall i = 1, ..., n : u_i \in S \cup T\}$$

U ist dann eine Rechtsteilermenge:

(i) U ist per Konstruktion eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R

(ii) Seien $u := \prod_{i=1}^{n} u_i \in U$ und $r \in R$ beliebig. Wir nutzen nun aus, dass S und T der Ore-Bedingung genügen. Es gibt also ein $r_1 \in R$ und ein $u_1' \in U$ mit $ru_1' = u_1 r_1$. Induktiv erhält man dann $r_i \in R$ und $u_i' \in U$ mit $r_{i-1}u_i' = u_i r_i$ für alle $i = 1, ..., n$. Dann gilt $r \prod_{i=1}^{n} u_i' = (\prod_{i=1}^{n} u_i) r_n$ mit $\prod_{i=1}^{n} u_i' \in U$ und $r_n \in R$.

(iii) Wir zeigen die äquivalente Eigenschaft (iii') (2.3.7) und nutzen aus, dass S und T der Eigenschaft (iii') genügen. Seien $u \in U$ und $r \in R$ beliebig mit $ur = 0$. Da $1 \in S \cap T$ können wir schreiben $u = \prod_{i=1}^{n} s_i t_i \in U$ mit $s_i \in S$ und $t_i \in T$ für alle $i = 1, ..., n$. Also gilt $s_1(t_1 \cdot ... \cdot s_n t_n r) = 0$ und da S (iii') genügt gibt es ein $x_1 \in S$ mit $t_1(t_2 \cdot ... \cdot s_n t_n r x_1) = 0$. Aber auch T genügt der Eigenschaft (iii') und somit gibt es ein $y_1 \in T$ mit $t_2(t_3 \cdot ... \cdot s_n t_n r x_1 y_1) = 0$. Induktiv erhält man nun $x_1, ..., x_n \in S$ und $y_1, ..., y_n \in T$ mit $r \cdot (x_1 y_1 \cdot ... \cdot x_n y_n) = 0$, wobei der rechte Faktor wieder in U liegt.

Definition 2.4.1 (Pushout)**:**
Seien $\alpha_i : X \to X_i$ und $\varphi_i : X_i \to P$ mit $i = 1, 2$ Morphismen einer Kategorie. Das Objekt P heißt Pushout von (α_1, α_2) genau dann wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\varphi_1 \circ \alpha_1 = \varphi_2 \circ \alpha_2$

(ii) Seien $\psi_i : X_i \to Y$ mit $i = 1, 2$ zwei weitere Morphismen derselben Kategorie mit $\psi_1 \circ \alpha_1 = \psi_2 \circ \alpha_2$, dann gibt es genau einen Morphismus $\rho : P \to Y$ mit $\psi_i = \rho \circ \varphi_i$ für $i = 1, 2$.

Bemerkung 2.4.2:
RU^{-1} ist der Pushout von $RS^{-1} \overset{\vartheta_S}{\leftarrow} R \overset{\vartheta_T}{\rightarrow} RT^{-1}$.

Beweis. Zunächst einmal haben wir drei Rechtslokalisierungen $(RS^{-1}, \vartheta_S), (RT^{-1}, \vartheta_T), (RU^{-1}, \vartheta_U)$ und es gilt $\vartheta_U(S)$, $\vartheta_U(T) \subseteq \vartheta_U(U) \subseteq R_U^{\times}$. Dann liefert die universelle Eigenschaft der Lokalisierungen die Existenz von zwei eindeutigen Morphismen $\varphi_1 : R_S \to R_U, \varphi_2 : R_T \to R_U$, welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\vartheta_S"] \arrow[d, "\vartheta_T"'] \arrow[dr, "\vartheta_U"] & RS^{-1} \arrow[d, "\varphi_1"] \\ RT^{-1} \arrow[r, "\varphi_2"'] & RU^{-1} \end{tikzcd} \tag{27}$$

kommutativ machen. Seien nun $\psi_S : RS^{-1} \to Y$ und $\psi_T : RT^{-1} \to Y$ zwei weitere Morphismen mit $\psi_S \circ \vartheta_S = \psi_T \circ \vartheta_T$. Also sind $\psi_S \circ \vartheta_S(S) = \psi_T \circ \vartheta_T(S)$ und $\psi_S \circ \vartheta_S(T) = \psi_T \circ \vartheta_T(T)$ Teilmengen von $Y^\times$ und somit ist auch $\psi_S \circ \vartheta_S(U) = \psi_T \circ \vartheta_T(U)$ eine Teilmenge von $Y^\times$. Nun ist (RU^{-1}, φ_1) eine Rechtslokalisierung von RS^{-1} bezüglich $\vartheta_S(U)$, denn es gilt:

(i) $\varphi_1 \circ \vartheta_S(U) = \vartheta_U(U) \subseteq (RU^{-1})^\times$

(ii) Für $q \in RU^{-1}$ gibt es ein $r \in R$ und ein $u \in U$ mit $q = \vartheta_U(r)\vartheta_U(u)^{-1} = \varphi_1 \circ \vartheta_S(r)(\varphi_1 \circ \vartheta_S(u))^{-1}$, d.h. es gibt ein $r' := \vartheta_S(r) \in RS^{-1}$ und ein $u' := \vartheta_S(u) \in \vartheta_S(U)$ mit $q = \varphi_1(r')\varphi_1(u')^{-1}$

(iii) Es gilt $\ker \vartheta_U = \text{ass } S$. Zeige nun $\ker \varphi_1 = \text{ass } \vartheta_S(U)$:

„$\subseteq$“: Sei $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} \in \ker \varphi_1$. Dann ist auch $\vartheta_S(r)$ im Kern von φ_1 und somit liegt r in $\ker(\varphi_1 \circ \vartheta_S) = \ker \vartheta_U = \text{ass } S$, d.h. es gibt ein $u \in U$ mit $ru = 0$. Betrachte nun $\vartheta_S(su) \in \vartheta_S(U)$. Dann gilt $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}\vartheta_S(su) = 0$, d.h. $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}$ liegt in ass $\vartheta_S(U)$.
„$\supseteq$“: Sei $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} \in \text{ass } \vartheta_S(U)$ beliebig. Dann existiert ein $\vartheta_S(u) \in \vartheta_S(U)$ mit $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}\vartheta_S(u) = 0$. Dann gilt aber auch $\varphi_1(\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}\vartheta_S(u)) = 0$. Da $\varphi_1(\vartheta_S(u))$ eine Einheit ist, liegt $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}$ im Kern von φ_1.
Analog zeigt man, dass (RU^{-1}, φ_2) eine Rechtslokalisierung von RT^{-1} bezüglich $\vartheta_T(U)$ ist. Seien $\psi_1 : RS^{-1} \to Y$, $\psi_2 : RT^{-1} \to Y$ zwei weitere Morphismen mit $\psi_1 \circ \vartheta_S = \psi_2 \circ \vartheta_T$. Dann liefert uns die universelle Eigenschaft der Lokalisierung zwei weitere eindeutige Morphismen $\rho_1 : RU^{-1} \to Y$ und $\rho_2 : RU^{-1} \to Y$, welche das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\vartheta_S"] \arrow[d, "\vartheta_T"'] \arrow[dr, "\vartheta_U"] & RS^{-1} \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[dr, bend left, "\psi_1"] & \\ RT^{-1} \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[dr, bend right, "\psi_2"'] & RU^{-1} \arrow[r, dotted, "\exists! \rho_1"'] \arrow[d, dotted, "\exists! \rho_2"'] & Y \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{28}$$

kommutativ machen. Aus $\psi_S \circ \vartheta_S = \psi_T \circ \vartheta_T$ und der Eindeutigkeit von ρ_1, ρ_2 folgt unmittelbar $\rho_1 = \rho_2$. Also ist RU^{-1} der Pushout von $RS^{-1} \overset{\vartheta_S}{\leftarrow} R \overset{\vartheta_T}{\rightarrow} RT^{-1}$. $\square$

Definition 2.4.3:
Die beiden Rechtsteilermengen S und T heißen kompatibel, falls $ST = TS (= U)$ gilt. Äquivalent dazu kann man auch die beiden Eigenschaften

$$(ST1) \quad \forall s_1 \in S \; \forall t_1 \in T \; \exists t_2 \in T \; \exists s_2 \in S : s_1 t_1 = t_2 s_2$$
$$(ST2) \quad \forall s_1 \in S \; \forall t_1 \in T \; \exists t_2 \in T \; \exists s_2 \in S : t_1 s_1 = s_2 t_2$$

fordern.

Satz 2.4.4:
Seien S und T kompatibel. Dann sind die Ringe $(RS^{-1})T^{-1} := (RS^{-1})\vartheta_S(T)^{-1}$, $R(ST)^{-1}$ und $(RT^{-1})S^{-1} := (RT^{-1})\vartheta_T(S)^{-1}$ zueinander isomorph.

Beweis. Zeige zunächst, dass $\vartheta_S(T) \subseteq RS^{-1}$ eine Rechtsteilermenge ist.

(i) Da 1 ein Element von T ist, ist auch $1 = \vartheta_S(1)$ ein Element von $\vartheta_S(T)$. Seinen $\vartheta_S(t_1), \vartheta_S(t_2) \in \vartheta_S(T)$. Dann ist auch $\vartheta_S(t_1) \cdot \vartheta_S(t_2) = \vartheta_S(t_1t_2) \in \vartheta_S(T)$, denn T ist multiplikativ abgeschlossen.

(ii) Seien $\vartheta_S(t) \in \vartheta_S(T), \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} \in RS^{-1}$ beliebig. Da T der Ore Bedingung genügt, gibt es ein $r' \in R$ und ein $t' \in T$ mit $tr' = rt'$. Wegen der Kompatibilität von S und T gibt es ein $s' \in S$ und ein $t'' \in T$ mit $st' = t''s'$. Wir haben nun die gewünschten Elemente $\vartheta_S(t'') \in \vartheta_S(T)$ und $\vartheta_S(r')\vartheta(s')^{-1} \in RS^{-1}$ konstruiert:

$$\begin{aligned}\vartheta_S(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta_S(t'') &= \vartheta_S(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta_S(t'')\vartheta_S(s')\vartheta_S(s')^{-1} = \vartheta_S(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta_S(t''s')\vartheta_S(s')^{-1}\\ &= \vartheta_S(r)\vartheta(s)^{-1}\vartheta_S(st')\vartheta_S(s')^{-1} = \vartheta_S(r)\vartheta_S(t')\vartheta_S(s')^{-1}\\ &= \vartheta_S(t)\vartheta_S(r')\vartheta_S(s')^{-1}\end{aligned}$$

(iii) Wir zeigen die äquivalente Eigenschaft (iii') (2.3.7). Seien $\vartheta_S(t) \in \vartheta_S(T), \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} \in RS^{-1}$ beliebig mit $\vartheta_S(t)\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} = 0$, d.h. tr liegt im Kern von ϑ_S. Wegen $\ker \vartheta_S = \operatorname{ass} S$ gibt es ein $s \in S$ mit $trs = 0$. Da T ebenfalls der Eigenschaft *(iii')* genügt, gibt es ein $t' \in T$ mit $rst' = 0$. Außerdem sind S und T kompatibel, sodass es ein $\bar{t} \in T$ und ein $\bar{s} \in S$ gibt mit $st' = \bar{t}\bar{s}$ und daher $r\bar{t}\bar{s} = 0$. Wenden wir nun ϑ_S darauf an, so erhalten wir $\vartheta_S(r)\vartheta_S(\bar{t})\vartheta_S(\bar{s}) = 0$ und somit auch $\vartheta_S(r)\vartheta_S(\bar{t})$. Wegen $\vartheta_S(\bar{t}) \in \vartheta_S(T)$ sind wir fertig.

Also existiert die Rechtslokalisierung $((RS^{-1})T^{-1}, \eta_1)$ von RS^{-1} an $\vartheta_S(T)$ und analog auch die Rechtslokalisierung $((RT^{-1})S^{-1}, \eta_2)$ von RT^{-1} an $\vartheta_T(S)$. Wir zeigen nun, dass $((RS^{-1})T^{-1}, \eta_1 \circ \vartheta_S)$ eine Rechtslokalisierung von R an der Menge U ist:

(i) Sei $u \in U$. Dann gibt es ein $s \in S$ und ein $t \in T$, sodass sich u schreiben lässt als $u = st$. Dann gilt $(\eta_1 \circ \vartheta_S)(u) = (\eta_1 \circ \vartheta_S)(s) \cdot (\eta_1 \circ \vartheta_S)(t) \in (((RS^{-1})T^{-1})^\times$, denn $\vartheta_S(s)$ ist in RS^{-1} eine Einheit – also auch das Bild unter η_1 – und $(\eta_1 \circ \vartheta_S)(t)$ ist eine Einheit ($\vartheta_S(t) \in \vartheta_S(T)$).

(ii) Sei $x \in ((RS^{-1})T^{-1}$ beliebig. Da $((RS^{-1})T^{-1}, \eta_1)$ eine Rechtslokalisierung von RS^{-1} an $\vartheta_S(T)$ ist, gibt es ein $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} \in RS^{-1}$ und ein $\vartheta_S(t) \in \vartheta_S(T)$ mit

$$x = \eta_1(\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1})\eta_1(\vartheta_S(t))^{-1} = \eta_1(\vartheta_S(r))\eta_1(\vartheta_S(s))^{-1}\eta_1(\vartheta_S(t))^{-1} = \eta_1(\vartheta_S(r))\eta_1(\vartheta_S(ts))^{-1},$$

wobei $ts \in TS = U$ gilt.

(iii) Sei $(\eta_1 \circ \vartheta_S)(r) = 0$. Dann liegt r im Kern von η_1, welcher gerade $\operatorname{ass} \vartheta_S(T)$ ist. Also gibt es ein $\vartheta_S(t) \in \vartheta_S(T)$ mit $\vartheta_S(r)\vartheta_S(t) = 0$. Nun ist rt ein Element von $\ker \vartheta_S = \operatorname{ass} S$, d.h. es gibt ein $s \in S$ mit $rts = 0$. Da $ts \in TS = U$ liegt, haben wir gezeigt $\ker \eta_1 \circ \vartheta_S \subseteq \operatorname{ass} U$. Bleibt noch die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Sei dazu $r \in \operatorname{ass} U$, d.h. es gibt ein $u = ts \in U = TS$ mit $ru = rts = 0$. Also liegt rt im Kern von ϑ_S und somit $\vartheta_S(r)$ im Kern von η_1, da $\ker \eta_1 = \operatorname{ass} \vartheta_S(T)$ gilt.

Analog zeigt man, dass $((RT^{-1})S^{-1}, \eta_2 \circ \vartheta_S)$ eine Rechtslokalisierung von R an U ist. Da nach 2.2.2 die Rechtslokalisierung an einer Menge U bis auf Ismorphie eindeutig ist haben wir die Isomorphie zwischen den Ringen $(RS^{-1})T^{-1} := (RS^{-1})\vartheta_S(T)^{-1}$, $R(ST)^{-1}$ und $(RT^{-1})S^{-1} := (RT^{-1})\vartheta_T(S)^{-1}$ gezeigt. □

Für einen späteren Zweck zeigen wir noch:

Proposition 2.4.5:
Sei S eine Rechtsteilermengen von R. Dann ist RS^{-1} ein flacher R-Rechtsmodul.

Beweis. Sei I ein R-Linksideal in R. Dann genügt es nach 5.0.10 die Injektivität von $\varphi : I \otimes_R RS^{-1} \to RS^{-1}$ zu zeigen. Sei $\alpha = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \vartheta_S(r_i)\vartheta_S(s_i)^{-1}$ ein beliebiges Element von $\ker \varphi$. Dieses Element lässt sich wie folgt schreiben: $\alpha = \sum_{i=1}^n 1 \otimes \vartheta_S(m_i)\vartheta_S(r_i)\vartheta_S(s_i)^{-1} = 1 \otimes \sum_{i=1}^n \vartheta_S(m_ir_i)\vartheta_S(s_i)^{-1}$. Es gibt nun ein $r \in R$ und ein $s \in S$ mit $\vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} = \sum_{i=1}^n \vartheta_S(m_ir_i)\vartheta_S(s_i)^{-1}$. Also lässt sich α schreiben als $\alpha = 1 \otimes \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}$.

Ferner gilt $0 = \varphi(1 \otimes \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}) = \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1}$. Damit liegt r im Kern von ϑ_S, d.h. es gibt ein $\tilde{s} \in S$ mit $r\tilde{s} = 0$ in R. Wir erhalten somit

$$\alpha = 1 \otimes \vartheta_S(r)\vartheta_S(s)^{-1} = 1 \otimes \vartheta_S(r)\vartheta_S(\tilde{s})\vartheta_S(\tilde{s})^{-1}\vartheta_S(s)^{-1} = 1 \otimes \vartheta_S(r\tilde{s})\vartheta_S(\tilde{s})^{-1}\vartheta_S(s)^{-1} = 0$$

□

3 Schiefpolynomringe

Die Unterkapitel 3.1 bis einschließlich 3.4 basieren auf [J.C. McConnell, 1987] (Seite 15 -19). Das letzte Unterkapitel basiert auf [Grayson, 1985] (Seite 366 - 368).

3.1 Grundlegende Idee

Im Folgenden wollen wir Polynome über einem Ring R in der Variable x betrachten, wobei die Variable nicht notwendigerweise mit den Elementen aus R kommutiert. Dabei soll sich jedes Polynom p eindeutig in der Form $\sum_{i=0}^{n} x^i a_i$ mit $a_i \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen. Ferner fordern wir eine Gradfunktion deg, welche von diesen Ring in die Menge $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ abbildet. Der Grad des Nullpolynoms sei als $-\infty$ definiert. Für jedes andere Polynom p setzen wir $\deg p := \max\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$. Dabei soll sich der Grad wie gewohnt Verhalten:

$$\deg f(x)g(x) \leq \deg f(x) + \deg g(x).$$

Die Idee ist es, einen Ersatz für die Kommutativität zu schaffen. Wir betrachten einen Endomorphismus φ und fordern:

$$ax = x\varphi(a)$$

für alle $a \in R$. Ist $\varphi = \mathrm{id}$, so erhalten wir den üblichen Polynomring.

3.2 Konstruktion I

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\varphi : R \to R$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $R^{(\mathbb{N})}$ bezüglich $+$ (komponentenweise) offensichtlich eine Gruppe mit neutralen Element $\underline{0} := (0)_{i\in\mathbb{N}}$. Für $\underline{r} = (r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ setzen wir $\varphi(\underline{r}) := (\varphi(r_i))_{i\in\mathbb{N}}$ und können φ damit als Element von $E := \mathrm{End}_+(R^{(\mathbb{N})})$ auffassen. Außerdem bildet E mit der Addition

$$\oplus : E \times E \to E \quad (\phi(\underline{t}), \psi(\underline{t})) \mapsto (\phi \oplus \psi)(\underline{t}) := \phi(\underline{t}) + \psi(\underline{t}) \tag{29}$$

und der Multiplikation

$$\odot : E \times E \to E \quad (\phi(\underline{t}), \psi(\underline{t})) \mapsto (\phi \odot \psi)(\underline{t}) := (\psi \circ \phi)(\underline{t}) \tag{30}$$

einen Ring. E wäre auch mit der Komposition $\circ$ anstelle von $\odot$ ein Ring, doch wir wollen $R^{(\mathbb{N})}$ zu einem E-Rechtsmodul ausbauen via

$$* : R^{(\mathbb{N})} \times E \mapsto R^{(\mathbb{N})} \quad (\underline{r}, \phi) \mapsto \underline{r} * \phi := \phi(\underline{r}) \tag{31}$$

Seinen nun $\phi, \psi \in E$ und $\underline{r}, \underline{s} \in R^{(\mathbb{N})}$ beliebig. Dann gilt einerseits

$$\underline{r} * \mathrm{id} = \mathrm{id}(\underline{r}) = \underline{r}$$

und anderseits

$$\underline{r} * (\phi \odot \psi) = \underline{r} * (\psi \circ \phi) = (\psi \circ \phi)(\underline{r}) = \phi(\underline{r}) * \psi = (r * \phi) * \psi.$$

Außerdem gilt sowohl

$$(\underline{r} + \underline{s}) * \phi = \phi(\underline{r} + \underline{s}) = \phi(\underline{r}) + \phi(\underline{s}) = \underline{r} * \phi + \underline{s} * \phi$$

als auch

$$\underline{r} * (\phi \oplus \psi) = (\phi \oplus \psi)(\underline{r}) = \phi(\underline{r}) + \psi(\underline{r}) = \underline{r} * \phi + \underline{r} * \psi.$$

Damit ist $R^{(\mathbb{N})}$ ein E-Rechtsmodul. Wir können nun R in E einbetten via Rechtsmultiplikation $R \hookrightarrow E$, $r \mapsto (\underline{t} \mapsto \underline{t} \cdot r)$. Dabei ist $\underline{t} \cdot r$ komponentenweise zu verstehen. Betrachte nun die Abbildung

$$x : R^{(\mathbb{N})} \to R^{(\mathbb{N})} \quad (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (\varphi(r_{i-1}))_{i\in\mathbb{N}} \tag{32}$$

wobei wir $r_0 := 0$ setzen. Ferner ist x ein Element von E, denn es gilt für $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R^{(\mathbb{N})}$:

$$(r_i)_{i\in\mathbb{N}}, (s_i)_{i\in\mathbb{N}} = (r_i + s_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{x}{\mapsto} (\varphi(r_{i-1} + s_{i-1})_{i\in\mathbb{N}}) = (\varphi(r_{i-1}) + \varphi(s_{i-1}))_{i\in\mathbb{N}} = x((r_i)_{i\in\mathbb{N}}) + x((s_i)_{i\in\mathbb{N}}),$$

d.h. x ist additiv und somit in E. Außerdem gilt auch die folgende Relation:

$$(r_i)_{i\in\mathbb{N}} * x = x((r_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\varphi(r_{i-1}))_{i\in\mathbb{N}} =: \varphi((r_{i-1})_{i\in\mathbb{N}}). \tag{33}$$

Bezeichne jetzt S den Unterring von E, welcher von R und x erzeugt wird. Im Folgenden werden wir aus Gründen der Lesbarkeit einfach nur r für die Abbildung $\underline{t} \mapsto \underline{t} \cdot r$ schreiben. In S gilt nun

$$a \odot x = x \odot \varphi(a) \text{ für alle } a \in R. \tag{34}$$

In der Tat ist

$$(a \odot x)((r_i)_{i\in\mathbb{N}}) = x(a((r_i)_{i\in\mathbb{N}})) = x((r_i a)_{i\in\mathbb{N}}) = (r_i a)_{i\in\mathbb{N}} * x \overset{(33)}{=} \varphi((r_{i-1}a)_{i\in\mathbb{N}})$$

und anderseits gilt

$$(x \odot \varphi(a))((r_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \varphi(a)(x((r_i)_{i\in\mathbb{N}})) = \varphi(a)(\varphi((r_{i-1})_{i\in\mathbb{N}})) = (\varphi(r_{i-1})\varphi(a))_{i\in\mathbb{N}} = \varphi((r_{i-1}a)_{i\in\mathbb{N}}),$$

da φ ein Ringhomomorphismus ist. Mit der Relation (34) kann jedes Element von S in der Form $\sum_{i=0}^n x^i \odot a_i$ geschrieben werden. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung zeigen wir wie folgt: Sei zunächst $\sum_{i=0}^n x^i \odot a_i \in S$ beliebig vorgegeben, dann gilt

$$\begin{aligned}(1,0,0,...) * \sum_{i=0}^n x^i \odot a_i &= \sum_{i=0}^n (x^i \odot a_i)(1,0,0,...) = \sum_{i=0}^n (a_i \circ x^i)(1,0,0,...)\\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x^i(1,0,0,...)) \overset{(34)}{=} \sum_{i=0}^n a_i(0,...,1,0,0,...) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}},\end{aligned} \tag{35}$$

denn φ ist ein Ringhomomorphismus. Durch (35) ist das Polynom nun eindeutig durch seine Koeffizienten bestimmt. Mit anderen Worten $(x^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Basis des R-Rechtsmoduls S.

Definition 3.2.1 (Schiefpolynomring)**:**
Setze $R[x,\varphi] := S$. Wir nennen den Ring $(R[x,\varphi], \oplus, \odot)$ den Schiefpolynomring (von R bezüglich φ).

3.3 Konstruktion II

Wir geben nun eine alternative Konstruktion für den Schiefpolynomring an. Sei erneut $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\varphi : R \to R$ ein Ringhomomorphismus. Wir betrachten nun den freien R-Rechtsmodul $T := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} R$ mit der Skalarmultiplikation $*$. Wir identifizieren den i-ten Einheitsvektor mit x^i und bauen T zu einem Ring aus:

Satz 3.3.1:
T besitzt genau eine Multiplikation $\cdot$, welche $(T, +, \cdot)$ zu einem Ring macht und den folgenden beiden Eigenschaften genügt

(i) $x^i \cdot x^j = x^{i+j} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$

(ii) $(x^0 * r) \cdot x = x \cdot (x^0 * \varphi(r))$

Beweis. Offenbar lässt sich jedes $f \in T$ schreiben als $f = \sum_{i=0}^n x^i * a_i$. Sei nun auch $g := \sum_{j=0}^m x^j * b_j \in T$ beliebig. Da T durch $\cdot$ ein Ring werden soll, erzwingt das Distributivgesetz zusammen mit (i) und (ii) $f \cdot g := \sum_k x^k c_k$ mit $c_k := \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(a_l)b_{k-l}$. Wir erhalten also eine eindeutig definierte Multiplikation $\cdot : T \times T \to T$. Wir müssen noch zeigen, dass $(T, +, \cdot)$ ein Ring ist. Klar ist, dass $(T, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Wir schreiben nun einfach $x^j r$ und meinen damit $x^j * r$ für $r \in R$. Seien nun $f := \sum_i x^i a_i$, $g := \sum_j x^j b_j$ und $h := \sum_k x^k c_k \in T$ beliebig.

- $(T, \cdot)$ ist ein Monoid:
  - Assoziativität:
    Einerseits gilt

    $$(f \cdot g) \cdot h = (\sum_i x^i d_i) \cdot (\sum_k x^k c_k) = \sum_k x^k e_k \text{ mit } d_i = \sum_{j=0}^i \varphi^{i-j}(a_j)b_{i-j} \text{ und } e_k = \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(d_l)c_{k-l}$$

    und anderseits ist

    $$f \cdot (g \cdot h) = (\sum_i x^i a_i) \cdot (\sum_j x^j \widetilde{d_j}) = \sum_k x^k \widetilde{e_k} \text{ mit } \widetilde{d_j} = \sum_{i=0}^j \varphi^{j-i}(b_i)c_{j-i} \text{ und } \widetilde{e_k} = \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(a_l)\widetilde{d}_{k-l}.$$

Wir zeigen nun $e_k = \widetilde{e}_k$ und schreiben dazu e_k geschickt auf:

$$\begin{aligned} e_k &= \varphi^k(a_0)\varphi^k(b_0)c_k \\ &\quad + \varphi^k(a_0)\varphi^{k-1}(b_1)c_{k-1} + \varphi^{k-1}(a_1)\varphi^{k-1}(b_0)c_{k-1} \\ &\quad + \varphi^k(a_0)\varphi^{k-2}(b_2)c_{k-2} + \varphi^{k-1}(a_1)\varphi^{k-2}(b_1)c_{k-2} + \varphi^{k-2}(a_2)\varphi^{k-2}(b_0)c_{k-2} \\ &\quad + ... \\ &\quad + \varphi^k(a_0)\varphi^0(b_k)c_0 + \varphi^{k-1}(a_1)\varphi^0(b_{k-1})c_0 + \varphi^{k-2}(a_2)\varphi^0(b_{k-2})c_0 + ... + \varphi^0(a_k)\varphi^0(b_0)c_0 \end{aligned}$$

Wenn wir nun „spaltenweise“ addieren können wir jeweils den Faktor $\varphi^k(a_j)$ ausklammern und die Summe umschreiben. Diese hat dann genau die Gestalt von $\widetilde{e}_k$

– neutrales Element:

$$f \cdot x^0 = f = x^0 \cdot f$$

- rechtsdistributiv:

$$\begin{aligned} (f+g)\cdot h &= \sum_i x^i(a_i + bi)\cdot h = \sum_k x^k \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(a_l + b_l)c_{k-l} = \sum_k x^k \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(a_l)c_{k-l} + \sum_k x^k \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(b_l)c_{k-l} \\ &= f\cdot h + g \cdot h \end{aligned}$$

- linksdistributiv:

$$f\cdot(g+h) = f \cdot \sum_k x^k \sum_{l=0}^k \varphi^{k-l}(a_l)(b_{k-l} + c_{k-l}) = f\cdot g + f \cdot h$$

□

Wir zeigen nun, dass T isomorph zu $R[x,\varphi]$ ist. Betrachte dazu die Abbildung

$$\gamma : T \to R[x,\varphi] \qquad \sum_{i=0}^n x^i a_i \mapsto \sum_{i=0}^n x^i \odot a_i$$

γ ist ein Isomorphismus von R-Rechtsmoduln, da γ offenbar R-linear ist und die Basis $(x^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ von T bzw. $R[x,\varphi]$ ineinander überführt.Die Multiplikativität erhält man unmittelbar aus der folgenden Identität:

$$\gamma(x^i a_i x^j a_j) = \gamma(x^{i+j}\varphi^j(a_i)a_j) = x^{i+j} \odot \varphi^j(a_i)a_j = (x^i \odot a_i) \odot (x^j \odot a_j) \quad \forall i,j \in \mathbb{N}_0$$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.3.2:
Es gilt $T \cong R[x,\varphi]$.

Bemerkung 3.3.3:
Alternativ kann man anstelle von $ax = x\varphi(a)$ auch die Relation $xa = \varphi(a)x$ fordern. Die Polynome lassen sich dann eindeutig in der Form $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ schreiben.

In 3.1 haben wir noch die Gradfunktion gefordert, welche sich wie gewohnt Verhalten soll.

Definition 3.3.4:
Sei R ein Ring und φ ein Ringendomorphismus über R. Wir definieren die Gradfunktion $\deg : R[x,\varphi] \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ *durch* $\deg(f) := n$ *für* $f = \sum_{i=0}^n x^i a_i \in R[x,\varphi] \setminus \{0\}$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $\deg(0) := -\infty$.

Satz 3.3.5:
Sei R ein Ring und φ ein Ringendomorphismus über R. Ferner seien zwei Polynome $f = \sum_{i=0}^n x^i a_i \in R[x,\varphi]$, $g = \sum_{i=0}^m x^i b_i \in R[x,\varphi]$ gegeben. Dann gilt

$$\deg(f\cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g). \tag{36}$$

Beweis. Ist $f = 0$ oder $g = 0$, so gilt (36) offenbar. Seien deshalb nun f und g von 0 verschieden.
Bei der Multiplikation von f mit g brauchen wir nur den Summanden $x^n a_n x^m b_m = x^{n+m}\varphi^m(a_n)b_m$ zu betrachten. Gilt $\varphi^m(a_n) \neq 0$, so ist der Grad von $f\cdot g$ gleich $n+m = \deg(f)+\deg(g)$. Andernfalls gilt $\deg(f\cdot g) < \deg(f) + \deg(g)$. □

3.4 Eigenschaften

Satz 3.4.1 (Universelle Eigenschaft)**:**
Seien $\psi : R \to S, \varphi : R \to R$ Ringhomomorphismen und $y \in S$ genüge der Bedingung $\psi(a)y = y\psi(\varphi(a))$ für alle $a \in R$. Dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\chi : R[x,\varphi] \to S$, sodass $\chi(x) = y$ gilt und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & R[x,\varphi] \arrow[dl, dotted, "\exists!\chi"'] \\ & S & \end{tikzcd} \tag{37}$$

kommutiert.

Beweis. Eindeutigkeit: Erfülle sowohl χ als auch $\overline{\chi}$ die obigen Bedingungen. Dann stimmen χ und $\overline{\chi}$ auf R überein. Außerdem gilt $\chi(x) = y = \overline{\chi}(x)$. Nun gilt für $\sum_i x^i a_i \in R[x,\varphi]$:

$$\chi(\sum_i x^i a_i) = \sum_i \chi(x)^i \chi(a_i) = \sum_i \overline{\chi}(x)^i \overline{\chi}(a_i) = \overline{\chi}(\sum_i x^i a_i),$$

d.h. $\chi = \overline{\chi}$.
Existenz: Definiere $\chi : R[x,\varphi] \to S$ via $\sum_i x^i a_i \mapsto \sum_i y^i \psi(a_i)$. Seien nun $\sum_i x^i a_i, \sum_j x^j b_j \in R[x,\varphi]$ beliebig, dann gilt sowohl

$$\chi(\sum_i x^i a_i + \sum_j x^j b_j) = \chi(\sum_i x^i(a_i+b_j)) = \sum_i y^i \psi(a_i+b_j) = \sum_i y^i\psi(a_i) + \sum_j y^j \psi(b_j) = \chi(\sum_i x^i a_i) + \chi(\sum_j x^j b_j)$$

als auch

$$\begin{aligned}\chi(\sum_i x^i a_i \cdot \sum_j x^j b_j) &= \chi(\sum_{i,j} x^i a_i x^j b_j) = \chi(\sum_{i,j} x^{i+j} \varphi^j(a_i) b_j) = \sum_{i,j} y^{i+j} \psi(\varphi^j(a_i) b_j) = \sum_i y^i \psi(a_i) \cdot \sum_j y^j \psi(b_j) \\ &= \chi(\sum_i x^i a_i) \cdot \chi(\sum_j x^j b_j).\end{aligned}$$

χ ist somit ein Ringhomomorphismus der das Diagramm (37) kommutativ macht und $\chi(x) = y$ erfüllt. □

Bemerkung 3.4.2: *(i) Die universelle Eigenschaft liefert uns für den Fall $R = S$ und $y \in R$ einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\chi_y : R[x,\varphi] \to R$ mit $\chi_y(x) = y$. Wir nennen χ_y den Einsetzungshomomorphismus zu y. Für $y \in R$ und $p \in R[x,\varphi]$ setzen wir $p(y) := \chi_y(p)$.*

(ii) Für $p \in R[x,\varphi]$ gilt $p(0) = 0$ genau dann, wenn p in $x \cdot R[x,\varphi]$ liegt.

Zu einem späteren Zweck zeigen wir noch den folgenden Satz.

Satz 3.4.3: *(i) Sei R ein nullteilerfreier Ring und φ ein injektiver Ringendomorphismus von R, dann gilt für $f, g \in R[x,\varphi]$*

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \tag{38}$$

(ii) Ist R ein Schiefkörper und φ ein Ringendomorphismus von R, so ist φ injektiv.

Beweis. Zu (i): Ist $f = 0$ oder $g = 0$, so sind wir fertig. Seien also f, g von 0 verschieden, etwa $f = \sum_{i=0}^n x^i a_i$ und $g = \sum_{i=0}^m x^i b_i$. Der entscheidende Summand für den Grad ist wieder $x^n a_n x^m b_m = x^{n+m} \varphi^m(a_n) b_m$, welcher von 0 verschieden ist, da φ injektiv und R nullteilerfrei ist.
Zu (ii): Angenommen es gibt ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $\varphi(r) = 0$. Dann gilt $1 = \varphi(1) = \varphi(r \cdot r^{-1}) = \varphi(r)\varphi(r^{-1}) = 0$. Dies ist ein Widerspruch, da in einem Schiefkörper stets $1 \neq 0$ gilt. □

Lemma 3.4.4:
Sei R ein Schiefkörper und φ ein Ringautomorphismus von. Dann ist $R[x,\varphi]$ ein euklidischer Ring. Mit anderen Worten gibt es für zwei Polynome $f, g \in K[x,\varphi]$ mit $g \neq 0$ stets Polynome $q, r \in K[x,\varphi]$ mit $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$.

Beweis. Nach 3.4.3 haben wir die Injektivität von φ und die Identität $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$. Der Beweis geht ananlog zum kommutativen Fall ($\varphi = \mathrm{id}$). Seien $f, g \in K[x, \varphi]$ mit $g \neq 0$ und $m := \deg g < \deg f =: n$ beliebig. Wir beweisen per Induktion über n.
(IA) $n = 0$: trivial. Wähle $q = 0$ und $r = f$
(IS) $n - 1 \to n$: Schreibe $f = x^n a_n + ... + a_0$ und $g = x^m b_m + ... + b_0$ mit $a_n, b_m \neq 0$. Wir können nun $q' := x^{n-m}\varphi^{-m}(a_n b_m^{-1}) \in K[x, \varphi]$ bilden, da R ein Schiefkörper und $n > m$ ist. Dies wird unser erster Term im Ergebnis der Division. Wir erhalten nun

$$f - q'g = x^n a_n + ... + a_0 - x^{n-m}\varphi^{-m}(a_n b_m^{-1}) \cdot (x^m b_m + ... + b_0)$$

Da sich der Term $x^n a_n$ weghebt, ist $\deg(f - q'g) < n$. Damit können wir die Induktionsvoraussetzung auf $f - q'g$ anwenden und erhalten so Polynome $q'', r \in K[x, \varphi]$ mit $\deg r < \deg g$ und $f - q'g = q''g + r$. Wir erhalten mit $q := q' + q''$ den gewünschten Ausdruck $f = qg + r$.

□

Bemerkung 3.4.5 (Euklidischer Algorithmus)**:**
Seien die Voraussetzung wie in 3.4.4 gegeben und setze $r_0 := f$ und $r_1 := g$. Führe nun sukzessive Polynomdivisionen wie in 3.4.4 durch:

$$\begin{aligned} r_0 &= q_0 r_1 + r_2 & \deg r_2 &< \deg r_1, \\ r_1 &= q_1 r_2 + r_3 & \deg r_3 &< \deg r_2, \\ &... & &... \\ r_{n-2} &= q_{n-2} r_{n-1} + r_n & \deg r_n &< \deg r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= q_{n-1} r_n \end{aligned}$$

Dann ist r_n der größte gemeinsame Rechtsteiler von f und g. $R[x, \varphi]$ erfüllt 3.4.4 auch dann, wenn man die Gleichung $f = qg + r$ durch $f = gq + r$ ersetzt. Der Beweis verläuft völlig analog. Damit erhält man einen analogen Algorithmus umd den größten gemeinsamen Linksteiler von f und g zu bestimmen.

Satz 3.4.6:
Sei R ein Ring und φ ein Ringendomorphismus von R, dann gelten für $S := R[x, \varphi]$ die folgenden Aussagen:

(i) Ist φ injektiv und R ein Integritätsbereich, so ist auch S ein Integritätsbereich

(ii) Ist R ein Schiefkörper φ ein Automorphismus, so ist S ein Rechtshauptidealring

(iii) Ist φ ein Automorphismus und ist R rechts (oder links) noethersch, so auch S

Beweis.
Zu (i): Seien $f = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i, g = \sum_{j=0}^{m} x^j b_j \in S$ mit $a_n, b_m \neq 0$. Da φ injektiv und R ein Integritätsbereich ist, hat $f \cdot g$ den Grad $n + m$ und somit ist fg von 0 verschieden.
Zu (ii): Sei $I \neq \emptyset$ ein rechtsseitiges Ideal in S, welches ein von 0 verschiedenes Element vom Grad n enthält. Dann enthält I auch ein normiertes Element vom Grad n. Nach 3.4.4 haben wir einen euklidischen Algorithmus. Dieser Algorithmus zeigt uns, dass I von einem Element minimalen Grades erzeugt wird.
Zu (iii): Sei R rechts noethersch. Da φ ein Automorphismus ist, kann jedes Element aus S alternativ in der Form $\sum b_i x^i$ geschrieben werden. Sei I ein rechtsseitiges Ideal von S und I_n die Menge der Leitkoeffizienten von Elementen aus I mit Grad $\leq n$. Die Idealeigenschaften von I machen auch I_n zu einem Ideal von R, dem sogenannten n-ten führenden Rechtsideal. Per Konstruktion ist I_n eine Teilmenge von I_{n+1}. Ferner gilt:

Wenn I' ein weiteres rechtsseitiges Ideal von S ist mit $I \subseteq I'$ und $I_n = I'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ dann gilt $I = I'$

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Wähle ein Element minimalen Grades aus $I' \setminus I$ aus, sagen wir vom Grad m. Dann sind I_m und I'_m verschieden. Widerspruch. Betrachte nun die aufsteigende Kette $L_0 \subseteq L_1 \subseteq ...$ von rechtsseitigen Idealen von S und bezeichne $L_{i,n}$ das n-te führende Rechtsideal von L_i. Für das Array $\{L_{i,n} | i, n \geq 0\}$ gilt nun $L_{i,j} \subseteq L_{k,m}$ für alle $i \leq k$ und alle $j \leq m$. Die aufsteigende Kette $\{L_{i,i} | i \geq 0\}$ von Rechtsidealen von R wird stabil, sagen wir ab $L_{j,j}$, da R rechts noethersch ist. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq j - 1$ stabilisiert nun auch die Kette $\{L_{i,n} | i \geq 0\}$, sagen wir bei k_n. Setze nun $m := \max\{j, k_0, k_1, ..., k_{j-1}\}$, dann gilt für alle $i \geq m$ und alle $n \in \mathbb{N}_0 : L_{i,n} = L_{m,n}$. Dies impliziert aber unmittelbar $L_i = L_m$, d.h. S ist rechts noethersch. Analog zeigt man die Behauptung für links noethersch. □

Bemerkung 3.4.7:
Es sei R ein Ring der Charakteristik p und φ der Frobeniusendomorphismus von R. Ist φ nicht bijektiv, so ist der Schiefpolynomring $R[x,\varphi]$ auch dann nicht noethersch, wenn R noethersch ist. Wie Emerton gezeigt hat, handelt es sich allerdings stets um einen sogenannten kohärenten Ring (vgl. [Emerton, 2008], Proposition 1.3 und Bemerkung vor Lemma 1.1).

Bemerkung 3.4.8:
Es sei R ein Ring und $\varphi : R \to R$ ein Automorphismus. Setze $R[x,x^{-1},\varphi] := (R[x,\varphi])[x^{-1},\varphi^{-1}]$. Jedes Element q aus $R[x,x^{-1},\varphi]$ kann in der Form $\sum_{i=0}^{n} x^{-i}p_i$ mit $p_i \in R[x,\varphi]$ und $n \in \mathbb{N}$ geschrieben werden. Für jedes p_i mit $i = 1,...,n$ gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in R$ für $j = 1,...,n_i$, sodass sich p_i schreiben lässt als $p_i = \sum_{j=0}^{n_i} x^j a_{ij}$. Nun gilt

$$q = \sum_{i=0}^{n} x^{-i}p_i = \sum_{i=0}^{n} x^{-i} \sum_{j=0}^{n_i} x^j a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n_i} x^{j-i} a_{ij} = \sum_{k=-m}^{m} x^k c_k$$

für geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und geeignete c_k für $k = -m, -m+1, ..., m-1, m$.

3.5 Eine Lokalisierung der projektiven Schiefgeraden

Sei ab jetzt K stets ein Schiefkörper und φ ein Automorphismus über K. Wir setzen $R^+ := K[x,\varphi]$ und $R^- := K[x^{-1},\varphi^{-1}]$. Wir zeigen nun einige Eigenschaften für R^+, welche sich völlig analog auf R^- übertragen lassen.

Satz 3.5.1:
R^+ ist nullteilerfrei.

Beweis. Folgt aus 3.4.3 und 3.4.6. □

Satz 3.5.2:
Die Mengen

$$S^+ := R^+ \setminus \{0\} \qquad S_0^+ := R^+ \setminus \{\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \in R^+ : a_0 = 0\}$$

$$S^- := R^- \setminus \{0\} \qquad S_0^- := R^- \setminus \{\sum_{i=0}^{n} x^i a_i \in R^- : a_0 = 0\}$$

sind Teilermengen von R^+ respektive von R^-.

Beweis. Wir zeigen lediglich, dass S^+ und S_0^+ Rechtsteilermenge von R^+ sind. Analog zeigt man dann, dass S^+ und S_0^+ Linksteilermengen sind.

(i) S^+ und S_0^+ sind offensichtlich multiplikative abgeschlossene Teilmengen von R^+.

(ii) Zu S^+: Setze für $j \in \mathbb{N}$ $R_j := \{f \in R^+ : \deg(f) \leq j\}$. Seien $f \in R^+$ und $s \in S^+$ beliebig mit $m := \deg(f)$ und $n := \deg(s)$. Betrachte nun die Abbildung $\psi : R_m \oplus R_n \to R_{m+n} \quad (u,v) \mapsto fu - sv$. Seien $(u,v),(u',v') \in R_m \oplus R_n$ und $\lambda \in K$ beliebig. Dann gilt einerseits

$$\psi((u,v)+(u',v')) = \psi((u+u',v+v')) = f(u+u')-s(v+v') = fu-sv+fu'-sv' = \psi((u,v))+\psi((u',v'))$$

und anderseits

$$\psi((u,v)\lambda) = \psi((u\lambda, v\lambda)) = fu\lambda - sv\lambda = \psi((u,v))\lambda,$$

d.h. ψ ist K-linear. Wir bemerken noch, dass die K-Dimension von R_j gerade $j+1$ ist. Dann gilt

$$m+1+n+1 = \dim_K(R_m \oplus R_n) = \dim_K \ker\psi + \dim_K \operatorname{im}\psi \leq \dim_K \ker\psi + m + n + 1.$$

Also ist die K-Dimension des Kerns von ψ mindestens 1, d.h. es gibt ein von $(0,0)$ verschiedenes Element $(u,v) \in R_m \oplus R_n$ mit $0 = \psi((u,v)) = fu - sv$. Wäre u ein Element von $R^+ \setminus S^+ = \{0\}$, so würde $sv = 0$ gelten. Wegen $s \in S^+ (s \neq 0)$ und der Nullteilerfreiheit von R^+ folgt $v = 0$. Dies ist ein Widerspruch, also ist $u \in S^+$. Wir haben für $f \in R^+$ und $s \in S^+$ nun ein $u \in S^+$ und ein $v \in R^+$ gefunden mit $fu = sv$.

Zu S_0^+: Wir gehen genau wie oben vor. Wenn $u \in R^+ \setminus S_0^+$ liegt ($u(0) = 0$), dann gilt $s(0)v(0) = 0$ und – da $s(0)$ von 0 verschieden ist – es folgt auch $v(0) = 0$. Es gilt $fu = sv$. Dividieren wir nun durch eine geeignete Potenz von x, so erhalten wir u', v' mit $fu' = sv'$ und $u' \in S_0^+, v' \in R^+$.

(iii) Wir bemerken zunächst, dass die Nullteilerfreiheit von R^+ unmittelbar $\operatorname{ass} S^+ = \{0\} = \operatorname{ass} S_0^+$ impliziert.
Zu S^+: Seien $\overline{s} = s + \operatorname{ass} S^+ \in \overline{S^+}$ und $\overline{r} = r + \operatorname{ass} S^+ \in \overline{R^+}$ mit $\overline{s} \cdot \overline{r} = 0$ beliebig. Dann ist $sr = 0$ und somit $r = 0$, da s von 0 verschieden ist und R^+ nullteilerfrei ist. Also gilt $\overline{r} = 0$.
Zu S_0^+: Seien $\overline{s} = s + \operatorname{ass} S_0^+ \in \overline{S_0^+}$ und $\overline{r} = r + \operatorname{ass} S_0^+ \in \overline{R^+}$ mit $\overline{s} \cdot \overline{r} = 0$ beliebig. Dann ist $sr = 0$ und somit $r = 0$, da s von 0 verschieden ist und R^+ nullteilerfrei ist. Also gilt $\overline{r} = 0$.

Völlig analog zeigt man auch, dass S^- und S_0^- Teilermengen von R^- sind. □

Setze $B^+ := (S_0^+)^{-1}R^+ \cong R^+(S_0^+)^{-1}$, $B^- := (S_0^-)^{-1}R^- \cong R^-(S_0^-)^{-1}$, $X^+ := \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\} \subset R^+$ und $X^- := \{x^{-i} : i \in \mathbb{N}_0\} \subset R^-$. Die beiden Mengen X^+ und X^- sind offenbar Rechtsteilermengen. Da φ bijektiv ist, sind diese beiden Mengen auch Linksteilermengen und somit Teilermengen.

Satz 3.5.3:
Sowohl S_0^+ und X^+ als auch S_0^- und X^- sind kompatibel.

Beweis. Zeige, dass S_0^+ und X^+ kompatibel sind. Der Beweis für S_0^- und X^- geht analog. Wir müssen die Eigenschaften $(ST1)$ und $(ST2)$ nachweisen (Definition 2.4.3). Seien $x^j \in X^+$ und $\sum_{n=0}^m x^n a_n \in S_0^+$ beliebig. Dann gilt:

$$(ST1) \quad x^j \sum_{n=0}^m x^n a_n = \sum_{n=0}^m x^n \varphi^{-j}(a_n) \cdot x^j$$

$$(ST2) \quad \sum_{n=0}^m x^n a_n \cdot x^j = x^j \sum_{n=0}^m x^n \varphi^j(a_n)$$

Dabei sei angemerkt, dass per Voraussetzung a_0 von 0 verschieden und φ injektiv ist. □

Satz 3.5.4:
Es gilt: $S^+ = S_0^+ X^+ (= X^+ S_0^+)$.

Beweis. „$\supseteq$“: Sei $x^j \sum_{n=0}^m x^n a_n \in X^+ S_0^+$ beliebig. Dann gilt $x^j \sum_{n=0}^m x^n a_n = \sum_{n=0}^m x^{n+j} a_n \in S^+$, denn a_0 ist von 0 verschieden.
„$\subseteq$“: Sei $\sum_{n=0}^m x^n a_n \in S^+$ beliebig. Ist $a_0 \neq 0$, so sind wir fertig. Sei also $a_0 = 0$. Dann gibt es ein minimales $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \neq 0$ und $a_i = 0$ für alle $i < n_0$. Also ist $\sum_{n=0}^m x^n a_n = \sum_{n=n_0}^m x^n a_n = x^{n_0} \sum_{n=0}^{m-n_0} x^n a_{n_0+n}$ ein Element von $X^+ S_0^+$. □

Setze $B^\pm := B^+[x^{-1}] := B^+(X^+)^{-1} = (R^+(S_0^+)^{-1})(X^+)^{-1} \cong R^+(S_0^+ X^+)^{-1} = R^+(S^+)^{-1}$.

Bemerkung 3.5.5:
Im Folgenden betrachten wir Polynome aus den Mengen $X^+, S_0^+, S^+, X^+, S_0^+, S^+$ in den oben genannten Lokalisierungen und schreiben dafür nur f anstelle von $\vartheta(f)$, wobei ϑ den zur jeweiligen Lokalisierung gehörenden Ringhomomorphismus bezeichnet. Dies können wir tun, da ϑ in den genannten Fällen stets injektiv ist. Dies liegt daran, dass $K[x, \varphi]$ nach 3.4.6 ein Integritätsbereich ist.

Satz 3.5.6:
$B^\pm$ ist ein Schiefkörper.

Beweis. Sei $f \in B^\pm \setminus \{0\}$. Dann gibt es ein $g \in R^+$ und ein $h^{-1} \in S^+$ mit $f = gh^{-1}$. Nun ist g von 0 verschieden, d.h. $g \in S^+$, und damit exisitiert $f^{-1} := hg^{-1} \in B^+$. Offenbar gilt $ff^{-1} = f^{-1}f = 1$. □

Setze nun $B^\mp := B^-[(x^{-1})^{-1}] := B^-(X^-)^{-1} = (R^-(S_0^-)^{-1})(X^-)^{-1} \cong R^{-1}(S_0^- X^-)^{-1} = R^-(S^-)^{-1}$.

Bemerkung 3.5.7:
R^+ und R^- sind nullteilerfrei. Nach 2.3.10 sind damit die kanonischen Ringhomomorphismen $B^+ \to B^\pm$ und $B^- \to B^\mp$ injektiv. Wir können also B^+ als Teilmenge von $B^\pm$ und B^- als Teilmenge von $B^\mp$ auffassen.

Satz 3.5.8:
$B^\pm$ und $B^\mp$ sind zueinander isomorph.

Beweis. Wir wenden zunächst die universelle Eigenschaft (3.4.1) an, um die Isomorphie $R^+ \cong R^-$ zu zeigen. Für alle $a \in K$ gilt

- $\varphi(a)x = x\varphi(\varphi^{-1}(a)) = xa$ in $R^+ := K[x, \varphi]$
- $\varphi^{-1}(a)x^{-1} = x^{-1}\varphi^{-1}(\varphi(a)) = xa$ in $R^- := K[x^{-1}, \varphi^{-1}]$

und es gilt $x \in R^+$ und $x^{-1} \in R^-$. Damit sind die Voraussetzung von 3.4.1 erfüllt und wir erhalten zwei kommutative Diagramme:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^+ \\ & R^- \arrow[ur, dotted, "\exists!\chi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^- \\ & R^+ \arrow[ur, dotted, "\exists!\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Dann kommutieren sowohl

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & R^+ \arrow[r, "\psi"] & R^- \\ & R^- \arrow[ur, dotted, "id_{R^-}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & R^- \arrow[r, "\chi"] & R^+ \\ & R^+ \arrow[ur, dotted, "id_{R^+}"'] & \end{tikzcd}$$

als auch

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & R^+ \arrow[r, "\psi"] & R^- \\ & R^- \arrow[u, "\chi"] \arrow[ur, dotted, "\psi\circ\chi"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr] & R^- \arrow[r, "\chi"] & R^+ \\ & R^+ \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, dotted, "\chi\circ\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigenschaft (3.4.1) gilt nun $\chi \circ \psi = \mathrm{id}_{R^-}$, $\psi \circ \chi = \mathrm{id}_{R^+}$ und folglich sind ψ, χ Isomorphismen. Diese Isomorphismen erfüllen nach 3.4.1 auch $\chi(x^{-1}) = x$ und $\psi(x) = x^{-1}$, sodass $S^+ \subseteq R^+$ und $S^- \subseteq R^-$ zueinander isomorph sind. Wir wenden nun die universelle Eigenschaft der Lokalisierung (2.2.1) an. In unserer Situtation sind die Voraussetzung von 2.2.1 erfüllt, sodass die beiden Diagramme □

$$\begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^-(S^-)^{-1} \\ & R^+(S^+)^{-1} \arrow[ur, dotted, "\exists!\alpha"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[rr] \arrow[dr] & & R^+(S^+)^{-1} \\ & R^-(S^-)^{-1} \arrow[ur, dotted, "\exists!\beta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Dann kommutieren sowohl

$$\begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[r] \arrow[dr] & R^-(S^-)^{-1} \arrow[r, "\beta"] & R^+(S^+)^{-1} \\ & R^+(S^+)^{-1} \arrow[ur, dotted, "id_{R^+(S^+)^{-1}}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[r] \arrow[dr] & R^+(S^+)^{-1} \arrow[r, "\alpha"] & R^-(S^-)^{-1} \\ & R^-(S^-)^{-1} \arrow[ur, dotted, "id_{R^-(S^-)^{-1}}"'] & \end{tikzcd}$$

als auch

$$\begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[r] \arrow[dr] & R^-(S^-)^{-1} \arrow[r, "\beta"] & R^+(S^+)^{-1} \\ & R^+(S^+)^{-1} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, dotted, "\beta\circ\alpha"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} R^- \cong R^+ \arrow[r] \arrow[dr] & R^+(S^+)^{-1} \arrow[r, "\alpha"] & R^-(S^-)^{-1} \\ & R^-(S^-)^{-1} \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, dotted, "\alpha\circ\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Analog zu obigen Vorgehen erhalten wir, dass α und β Isomorphismen sind. Also gilt $B^{\pm} = R^+(S^+)^{-1} \cong R^-(S^-)^{-1} = B^{\mp}$.
Nun können wir noch den Ring $B := B^+ \cap B^- \subseteq B^{\pm}$ definieren.

Satz 3.5.9:
B besteht aus allen Brüchen fg^{-1} mit $f, g \in R^+$, $g(0) \neq 0$ und $\deg(g) \geq \deg(f)$.

Beweis. Sei $fg^{-1} \in B \subseteq B^+$ mit $f \in R^+$ und $g \in S_0^+$ und sei $n := \max\{\deg(f), \deg(g)\}$. Setze $G(x^{-1}) := g(x)x^{-n}$ und $F(x^{-1}) := f(x)x^{-n}$. Dann liegen G, F in R^- und es gilt $FG^{-1} = fg^{-1} \in B^-$. Also gibt es ein J in R^- und ein $H \in S_0^-$, sodass $FG^{-1} = JH^{-1}$. Da S_0^- eine Rechtsteilermenge in R^- ist, gibt es nun ein $L \in R^-$ und ein $E \in S_0^-$ mit $HL = GE$. Dann gilt $FE = FG^{-1}GE = JH^{-1}HL = JL$. Da $g(0)$ verschieden von 0 ist, ist auch $G \neq 0$. Da B nullteilerfrei ist und E, H in S_0^- liegen, folgt aus $HL = GE$ sofort $L \neq 0$. Insgesamt haben wir $G, L \in S^-$ und $E, H \in S_0^- (\Leftrightarrow x^{-1} \nmid E, H)$. Wir zeigen nun, dass G nicht von x^{-1} geteilt wird. Angenommen G wird von x^{-1} geteilt, d.h. G liegt nicht in S_0^{-1}. Dann liegt auch $HL = GE$ nicht in S_0^{-1}, da der konstante Koeffizient von G gleich 0 ist. Wegen $H \in S_0^-$ kann L nicht in S_0^- liegen, d.h. x^{-1} ist ein Teiler von L. Also liegt auch $FE = JL$ nicht in S_0^-. Wegen $E \in S_0^-$ darf nun F nicht in S_0^- liegen. Mit anderen Worten x^{-1} ist ein Teiler von F und G. Dies steht im Widerspruch zur Maximalität von n. Also wird G nicht von x^{-1} geteilt und somit gilt $n = \deg(g) \geq \deg(f)$. □

Definition 3.5.10 (Jacobson-Radikal)**:**
Sei R ein Ring. Dann ist das Jacobson-Radikal von R definiert als der Schnitt aller maximalen Linksideale von R.

Wir wollen nun das Radikal von B bestimmen. Betrachte die Abbildungen $\tilde{\rho} : R^+ \to K$ respektive $\tilde{\rho} : R^- \to K$ definiert durch $f \mapsto f(0)$. Diese Abbildungen sind die Einsetzungshomomorphismen zu 0 (siehe auch 3.4.2). Mit anderen Worten bilden diese Ringhomomorphismen ein Polynom lediglich auf dessen konstanten Koeffizienten ab. Wegen $\tilde{\rho}(f) = f(0) \in K^\times = K \setminus \{0\}$ für alle f aus $S_0^+ \cup S_0^-$, gilt $\tilde{\rho}(S_0^+) \subseteq K^\times$ und $\tilde{\rho}(S_0^-) \subseteq K^\times$. Die universelle Eigenschaft der Lokalisierung (2.2.1) liefert uns dann zwei eindeutige Ringhomomorphismen $\rho_0 : B^+ \to K$, $\rho_\infty : B^- \to K$ mit $\rho_0 \circ \vartheta_+ = \tilde{\rho}$ und $\rho_\infty \circ \vartheta_- = \tilde{\rho}$, wobei ϑ_+ respektive ϑ_- den zur jeweiligen Lokalisierung gehörenden (injektiven) Ringhomomorphismus bezeichnet. Insbesondere gilt $\rho_0(x) = 0$ und $\rho_\infty(x^{-1}) = 0$.

Satz 3.5.11:
$I_0 := \ker \rho_0 \subseteq B^+$ und $I_\infty := \ker \rho_\infty \subseteq B^-$ sind maximale Linksideale und maximale Rechtsideale.

Beweis. Sei I ein Links-/Rechtsideal in B^+ mit $I_0 \subsetneq I \subseteq B^+$. Dann gibt es ein fg^{-1} in $I \setminus I_0$. Also gilt $\rho_0(fg^{-1}) \neq 0$ und somit ist auch $\rho_0(f) \neq 0$, d.h. $f(0) \neq 0$. Damit ist fg^{-1} eine Einheit in B^+ und somit $I = B^+$, d.h. I_0 ist maximal. Analog zeigt man, dass I_∞ maximal in B^- ist. □

Satz 3.5.12:
Es gilt $B^+ \setminus I_0 = (B^+)^\times$ und $B^- \setminus I_\infty = (B^-)^\times$

Beweis. „$\subseteq$ “: Ersetze I im Beweis von 3.5.11 durch B^+ beziehungsweise B^-.
„$\supseteq$ “: Sei f eine Einheit in B^+, d.h. es gibt ein $g \in B^+$ mit $fg = 1$. Also gilt $\rho_0(fg) = 1$ und somit liegt f in $B^+ \setminus I_0$. Analog beweist man den zweiten Teil, indem man B^+ durch B^- und ρ_0 durch ρ_∞ ersetzt. □

Satz 3.5.13:
I_0 ist das einzige maximal Ideal von B^+ und I_∞ ist das einzige maximale Ideal von B^-. Also sind B^+ und B^- lokale Ringe.

Beweis. Wir zeigen wieder nur die erste Aussage, da der Beweis für die zweite Aussage analog geht. Sei I ein weiteres maximales Ideal in B^+. Wegen 3.5.12 ist B^+ gerade die disjunkte Vereinigung von $(B^+)^\times$ mit I_0. Da I maximal ist –und somit keine Einheit enthält– folgt $I = I_0$. □

Wir setzen nun $J_0 := I_0 \cap B$ und $J_\infty := I_\infty \cap B$.

Satz 3.5.14:
Es gilt $B^\times = B \setminus (J_0 \cup J_\infty)$.

Beweis. „$\subseteq$“: Sei $f \in B^\times$, d.h. es gibt ein $g \in B$ mit $fg = 1$. Also ist $\rho_0(fg) = 1$ und $\rho_\infty(fg) = 1$ und somit sind $\rho_0(f)$ und $\rho_\infty(f)$ von 0 verschieden.
„$\supseteq$“: Sei $fg^{-1} \in B \setminus (J_0 \cup J_\infty)$ mit $f \in R^+$ und $g \in S_0^+$, d.h. $\rho_0(fg^{-1})$ und $\rho_\infty(fg^{-1})$ sind von 0 verschieden. Wir können f und g wie folgt darstellen: $f = x^n a_n + ... + a_0 = \varphi^n(a_n)x^n + ... + \varphi(a_1) + a_0 = (\varphi^n(a_n) + ... + a_0 x^{-n})x^n$ und $g = x^m b_m + ... + b_0 = \varphi^m(b_m)x^m + ... + \varphi(b_1)x + b_0 = (\varphi^m(b_m) + ... + b_0 x^{-m})x^m$. Damit lässt sich das Inverse von g schreiben als $g^{-1} = x^{-m}(\varphi^m(b_m) + ... + b_0 x^{-m})^{-1}$ und es gilt $fg^{-1} = (\varphi^n(a_n) + ... + a_0 x^{-n})x^{n-m}(\varphi^m(b_m) + ... + b_0 x^{-m})^{-1}$. Wir zeigen nun, das $m \leq n$ gilt. Angenommen $m > n$, dann wäre $\rho_\infty(fg^{-1}) = \rho_\infty(\varphi^n(a_n) + ... + a_0 x^{-n})\rho_\infty(x^{n-m})\rho_\infty((\varphi^m(b_m) + ... + b_0 x^{-m})^{-1}) = 0$ im Widerspruch zu $fg^{-1} \notin J_\infty$. Wegen $f(0) \neq 0$ und 3.5.9 liegt gf^{-1} in B. Also ist fg^{-1} eine Einheit in B. □

Satz 3.5.15:
J_0 und J_∞ sind maximale Ideale in B und B besitzt kein anderes maximales Ideal.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $J_0 \setminus J_\infty$ und $J_\infty \setminus J_0$ jeweils nicht leer sind. Betrachte dazu $x(x+1)^{-1} \in B$. Es gilt $\rho_0(x(x+1)^{-1}) = \rho_0(x)\rho_0((x+1)^{-1}) = 0$ einerseits und $\rho_\infty(x(x+1)^{-1}) = \rho_\infty(x \cdot x^{-1} \cdot (1+x^{-1})^{-1}) = \rho_\infty(1+x^{-1})^{-1} \neq 0$ anderseits, d.h. $J_0 \setminus J_\infty$ ist nicht leer. Analog zeigt man, dass $J_\infty \setminus J_0$ mindestens ein Element enthält.
Wir zeigen nun die Maximalität von J_0. Der Beweis für die Maximalität von J_∞ geht analog. Wir nehmen an, dass J_0 nicht maximal ist. Dann gibt es nach dem Lemma von Zorn ein maximales Ideal $C \subsetneq B$, welches das echte Ideal J_0 enthält. Also gilt $J_0 \subsetneq C \subsetneq B \overset{3.5.14}{=} B^\times \,\dot\cup\, (J_0 \cup J_\infty)$. Sei nun $\beta \in C \setminus J_0$ und $\gamma \in C \setminus J_\infty$. Dabei ist die Menge $C \setminus J_\infty$ nicht leer, da sie J_0 und somit auch $J_0 \setminus J_\infty$ enthält. Wäre nun auch $\beta \in C \setminus J_\infty$ respektive $\gamma \in C \setminus J_0$, so wäre auch β in $(C \setminus J_0) \cap (C \setminus J_\infty) = C \setminus (J_0 \cup J_\infty) \subseteq B \setminus (J_0 \cup J_\infty) = B^\times$ enthalten beziehungsweise $\gamma \in B^\times$. Dann wäre aber $C = B$. Also muss gelten $\beta \notin C \setminus J_\infty$ und $\gamma \notin C \setminus J_0$. Nun ist sowohl $\rho_0(\beta+\gamma) = \rho_0(\beta) + \rho_0(\gamma) = \rho_0(\beta)$ als auch $\rho_\infty(\beta+\gamma) = \rho_\infty(\beta) + \rho_\infty(\gamma) = \rho_\infty(\beta)$ von 0 verschieden, d.h. $\beta + \gamma$ liegt in $C \setminus (J_0 \cup J\infty) \subseteq B \setminus (J_0 \cup J_\infty) = B^\times$. Also gilt $B = C$ im Widerspruch zur Maximalität von C. Bleibt zu zeigen, dass es kein weiteres maximales Ideal C in B gibt. Sei C ein weiteres maximales Ideal in B, welches von J_0 und J_∞ verschieden ist. Wegen 3.5.14 muss C in $J_0 \cup J_\infty$ enthalten sein. Nun gibt es ein $\beta \in C \setminus J_0$ und ein $\gamma \in C \setminus J_\infty$. Mit derselben Argumentation wie gerade erhalten wir einen Widerspruch. □

Wir haben nun folgendes gezeigt:

Satz 3.5.16:
Das Jacobson-Radikal von B ist $J_0 \cap J_\infty$.

Wir erhalten nun einen Ringhomomorphismus $\rho : B \to K \times K$ via $\rho := (\rho_0, \rho_\infty)$ mit $\ker \rho = J_0 \cap J_\infty$

Satz 3.5.17:
ρ ist surjektiv.

Beweis. Sei $(a,b) \in K \times K$ beliebig. Wähle $f(x) = (x\varphi^{-1}(b) + a)(x+1)^{-1} = (b + ax^{-1})(1+x^{-1})^{-1} \in B$. Dann gilt $\rho(f) = (a,b)$. □

Wir führen nun einige Abkürzungen ein:

Definition 3.5.18:
Setze $T^+ := B \cap (B^+)^\times$, $T^- := B \cap (B^-)^\times$ und $T^\pm := B \cap (B^\pm)^\times$.

Satz 3.5.19:
Für die oben definierten Mengen gelten die folgenden Relationen

(i) $T^+ = \{fg^{-1} \in B : f, g \in R^+, g(0) \neq 0, f(0) \neq 0, \deg f \leq \deg g\}$

(ii) $T^- = \{fg^{-1} \in B : f, g \in R^+, g(0) \neq 0, \deg f = \deg g\}$

(iii) $T^\pm = B \setminus \{0\}$

Beweis. Zu (i): Wir bemerken, dass $T^+ = B \cap (B^+)^\times \overset{3.5.12}{=} B \cap (B^+ \setminus I_0)$ gilt .
„$\subseteq$ “: Wegen 3.5.9 bleibt für $fg^{-1} \in B \cap (B^+ \setminus I_0)$ nur $f(0) \neq 0$ zu zeigen. Dies ist aber klar, da fg^{-1} nicht in I_0 liegt.
„$\supseteq$ “: Sei $fg^{-1} \in B$ mit $f, g \in R^+$, $g(0) \neq 0$, $f(0) \neq 0$ und $\deg g \leq \deg f$. Da $f(0)$ von 0 verschieden ist, liegt f sogar in S_0^+ und somit existiert das Inverse von f in B^+. Dann ist aber fg^{-1} auch eine Einheit in B^+.

Zu (ii): Wir bemerken, dass $T^- = B \cap (B^-)^\times \overset{3.5.12}{=} B \cap (B^- \setminus I_\infty)$ gilt .
„$\subseteq$ “: Sei $fg^{-1} \in B \cap (B^- \setminus I_\infty)$. Dann sind f, g in R^+ enthalten, $g(0)$ ist von 0 verschieden, der Grad von g ist größergleich dem Grad f und es gilt $\rho_\infty(fg^{-1}) \neq 0$. Angenommen $m := \deg g > \deg f := n$. Wie wir schon im Beweis von 3.5.14 gesehen haben, folgt dann $\rho_\infty(fg^{-1}) = 0$. Also muss $\deg(f) = \deg(g)$ gelten.
„$\supseteq$ “: : Sei $fg^{-1} \in B$ mit $f, g \in R^+$, $g(0) \neq 0$ mit $\deg(f) = \deg(g)$. Schreibe $f = \sum_{i=0}^n x^i a_i$ und $g = \sum_{j=0}^m x^j b_j$. Erneut liefert uns der Beweis von 3.5.14

$$\rho_\infty(fg^{-1}) = \rho_\infty(\varphi^n(a_n) + ... + a_0 x^{-n})\rho_\infty(x^{n-m})\rho_\infty(\varphi^m(b_m) + ... + b_0 x^{-m})^{-1} = \varphi^n(a_n)\varphi^m(b_m) \neq 0$$

Also liegt fg^{-1} in $B \cap (B^- \setminus I_\infty)$.

Zu (iii): Da $B^\pm$ ist ein Schiefkörper, gilt $(B^\pm)^\times = B^\pm \setminus \{0\}$. Dann gilt aber auch $T^\pm = B \setminus \{0\}$. □

Satz 3.5.20:
B^+, B^- respektive $B^\pm$ sind Rechtslokalisierungen von B bezüglich T^+, T^- respektive $T^\pm$ mit der jeweiligen kanonischen Einbettung $\vartheta_+ : B \to B^+$, $\vartheta_- : B \to B^-$ respektive $\vartheta_\pm : B \to B^\pm$, jeweils definiert durch $fg^{-1} \mapsto fg^{-1}$.

Beweis. Die Nullteilerfreiheit der Ringe liefert uns sofort die Injektivität der gegebenen Abbildungen. Die Nullteilerfreiheit liefert uns auch sofort die Eigenschaft (iii) einer Rechtslokalisierung:

$$\ker \vartheta_+ = \operatorname{ass} T^+ \quad \ker \vartheta_- = \operatorname{ass} T^- \quad \ker \vartheta_\pm = \operatorname{ass} T^\pm,$$

da alle genannten Ideale 0 sind. Wegen $T^+ \subseteq (B^+)^\times$, $T^- \subseteq (B^-)^\times$ und $T^\pm \subseteq (B^\pm)^\times$ ist auch Eigenschaft (i) einer Rechtslokalisierung unmittelbar erfüllt. Lediglich die Eigenschaft (ii) erfordert noch etwas Arbeit. Sei $fg^{-1} \in B^+$ mit $f \in R^+$ und $g \in S_0^+$. Wir bestimmen nun $\tilde{f} \in B$ und $\tilde{g} \in T^+$ mit $fg^{-1} = \tilde{f}\tilde{g}^{-1}$. Setze $b := max\{0, \deg f - \deg g\}$ und $h := (1+x)^b g \in S_0^+$. Nun gilt $\deg(h) = b + \deg(g) \geq \deg f$. Nach 3.5.9 liegt dann $\tilde{f} := fh^{-1}$ in B. Offenbar gilt auch $\tilde{g} := (1+x)^{-b} \in T^+$, denn $b \geq 0$. Letztendlich haben wir $\tilde{f}\tilde{g}^{-1} = fg^{-1}$. Damit ist Eigenschaft (ii) erfüllt und somit ist (B^+, ϑ_+) eine Rechtslokalisierung von B bezüglich T^+.
Um zu zeigen, dass (B^-, ϑ_-) eine Rechtslokalisierung von B bezüglich T^-, geht man analog vor indem man x durch x^{-1} und b durch $-b$ ersetzt.
Wir müssen diese beiden Beweise noch etwas Verallgemeinern um zu zeigen, dass $(B^\pm, \vartheta_\pm)$ eine Rechtslokalisierung von B bezüglich $T^\pm$ ist. Als Erinnerung sei nochmals erwähnt , dass $B^\pm$ zu $R^+(S^+)^{-1}$ und $R^-(S^-)^{-1}$ isomorph ist, $B = B^+ \cap B^-$ gilt und somit auch $T^\pm = B \setminus \{0\} = (B^+ \cap B^-) \setminus \{0\}$. Sei nun $q \in B^\pm$ beliebig. Dann gibt es ein $f_1 \in R^+$ und ein $g_1 \in S^+$ mit $q = f_1 g_1^{-1}$. Es kann also anders als eben durchaus $g_1(0) = 0$ gelten. Da aber $g_1 \neq 0$ ist, gibt es ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit $x^{-l} g_1 \in S_0^+$. Im Fall $g_1 \in S_0^+$ ist $l = 0$, das war im ersten Beweis so. Nun setzen wir $b := \max\{l, \deg f_1 - \deg g_1 + l\}$ und $h_1 := (1+x)^b x^{-l} g_1 \in S_0^+$. Es gilt $\tilde{f}_1 := f_1 h_1^{-1} \in B$, da $\deg h_1 = b - l + \deg g_1 \geq \deg f_1$. Außerdem ist $\tilde{g}_1 := x^l (1+x)^{-b} \in B \setminus \{0\}$, da $b = \deg(1+x)^b \geq l$ nach Wahl von $b := \max\{l, \deg f_1 - \deg g_1 + l\}$. Es folgt $q = f_1 g_1^{-1} = \tilde{f}_1 \tilde{g}_1^{-1} \in B(B \setminus \{0\})^{-1} = B(T^\pm)^{-1}$. □

4 Die Kategorienäquivalenz von $\Phi_K^{ét}, \mathscr{H}$ und $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$

Die Unterkapitel 4.1 und 4.2 basieren auf [Grayson, 1985] (Seite 365-369). Sei R ein Ring. Ferner seien S, T kompatible Rechtsteilermengen von R, welche dem folgenden Axiom genügen:

Definition 4.0.1 (Überdeckungsaxiom)**:**
Sind $s \in S$ und $t \in T$, so gilt $sR + tR = R$.

Bemerkung 4.0.2:
Wir betrachten nun die Ringe $R, S, T, RS^{-1}, RT^{-1}$ und $R(ST)^{-1}$. Im folgenden werden Elemente aus den „unteren "Ringen in den „oberen "Ringen betrachtet und –aus Gründen der Übersichtlichkeit– wird auf die präzisere Schreibweise mit einer Einbettungsabbildung verzichtet. Ferner wird auch etwas ungenau anstelle von $\vartheta_S(s)^{-1}$, $\vartheta_T(t)^{-1}$ respektive $\vartheta_{ST}(z)^{-1}$ einfach nur s^{-1}, t^{-1} respektive z^{-1} geschrieben.

Im nächsten Abschnitt wird etwas Vorarbeit für die Äquivalenz der Kategorien $\mathscr{H}$ und $\Phi_K^{ét}$ geleistet.

4.1 Die Kategorienäquivalenz von Mod_R und $\mathscr{C}$

Definition 4.1.1:
Sei $\mathscr{C}$ die Kategorie mit:

- *Objekten (P, Q, θ), wobei P ein RS^{-1}-Rechtsmodul, Q ein RT^{-1}-Rechtsmodul und $\theta : P(ST)^{-1} \to Q(ST)^{-1}$ ein $R(ST)^{-1}$-Isomorphismus ist. Hier ist $PT^{-1} := P(ST)^{-1} := P \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}$ und $QS^{-1} := Q(ST)^{-1} := Q \otimes_{RT^{-1}} R(ST)^{-1}$.*
- *Morphismen $(P, Q, \theta) \to (P', Q', \theta')$. Ein Morphismus dieser Kategorie ist ein Paar (f, g) mit $f \in Hom_{RS^{-1}}(P, P')$ und $g \in Hom_{RT^{-1}}(Q, Q')$, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
PT^{-1} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f\otimes id_{R(ST)^{-1}}"'] & QS^{-1} \arrow[d, "g\otimes id_{R(ST)^{-1}}"] \\
PT'^{-1} \arrow[r, "\theta'"'] & Q'S'^{-1}
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ferner bezeichne Mod_R die Kategorie der R-Rechtsmoduln.

Lemma 4.1.2:
Erfüllen die Teilermengen S und T das Überdeckungsaxiom (4.0.1), so sind die Kategorien Mod_R und $\mathscr{C}$ äquivalent.

Beweis. Definiere einen Funktor $\mathcal{F} : \mathrm{Mod}_R \to \mathscr{C}$ durch $M \mapsto (MS^{-1}, MT^{-1}, \theta_M)$. Die Definition von θ_M dabei ist etwas technisch. Dazu benötigen wir vier Abbildungen. Zunächst liefert die Assoziativität des Tensorproduktes zwei Gruppenisomorphismen:

$$\begin{array}{lccc}
\alpha_1 : & (MS^{-1})T^{-1} = (M \otimes_R RS^{-1}) \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1} & \longrightarrow & M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}) \\
& (m \otimes a) \otimes b & \longmapsto & m \otimes (a \otimes b) \\
\alpha_2 : & M \otimes_R (RT^{-1} \otimes_{RT^{-1}} R(ST)^{-1}) & \longrightarrow & (M \otimes_R RT^{-1}) \otimes_{RT^{-1}} R(ST)^{-1} = (MT^{-1})S^{-1} \\
& m \otimes (a \otimes b) & \longmapsto & (m \otimes a) \otimes b
\end{array}$$

Ist $q \in R(ST)^{-1}$ und $(m \otimes a) \otimes b \in (MS^{-1})T^{-1}$ beliebig gegeben, so gilt $\alpha_1(((m \otimes a) \otimes b)q) = \alpha_1((m \otimes a) \otimes bq) = m \otimes (a \otimes bq) = m \otimes ((a \otimes b)q) = (m \otimes (a \otimes b)) \otimes q = \alpha_1((m \otimes a) \otimes b)q$. Analog ist auch α_2 ein $R(ST)^{-1}$-Rechtsmodulisomorphismus. Ferner liefert 5.0.8 die anderen beiden $R(ST)^{-1}$-Rechtsmodulisomorphismen

$$\begin{array}{lccc}
\beta_1 : & M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}) & \longrightarrow & M \otimes_R R(ST)^{-1} = M(ST)^{-1} \\
& m \otimes (a \otimes b) & \longmapsto & m \otimes ab \\
\beta_2 : & M(ST)^{-1} = M \otimes_R R(ST)^{-1} & \longrightarrow & M \otimes_R (RT^{-1} \otimes_{RT^{-1}} R(ST)^{-1}) \\
& m \otimes x & \longmapsto & m \otimes (1 \otimes x)
\end{array}$$

Damit ist $\theta_M := \alpha_2 \circ \beta_2 \circ \beta_1 \circ \alpha_1$ ein $R(ST)^{-1}$-Rechtsmodulisomorphismus und jedes $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ induziert einen Morphismus $(h \otimes \mathrm{id}_{RS^{-1}}, h \otimes \mathrm{id}_{RT^{-1}}) : (MS^{-1}, MT^{-1}, \theta_M) \to (NS^{-1}, NT^{-1}, \theta_N)$ in $\mathscr{C}$. Dass $\mathcal{F}$ ein Funktor ist, folgt nun unmittelbar aus den Eigenschaften des Tensorproduktes.

Konstruiere nun einen Funktor $\mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathrm{Mod}_R$. Für $(P, Q, \theta) \in \mathscr{C}$ sei $\mathcal{G}((P, Q, \theta))$ definiert als der Kern der Abbildung

$$P \times Q \longrightarrow QS^{-1} \quad (p, q) \longmapsto q \otimes 1 - \theta(p \otimes 1)$$

Dabei induziert ein Morphismus $(f, g) : (P, Q, \theta) \to (P', Q', \theta')$ einen R-Rechtsmodulhomomorphismus

$$\mathcal{G}((f, g)) : \mathcal{G}((P, Q, \theta)) \longrightarrow \mathcal{G}((P', Q', \theta')) \quad (p, q) \longmapsto (f(p), g(q)),$$

da f und g selbst R-Rechtsmodulhomomorphismen sind. Damit ist auch $\mathcal{G}$ ein Funktor.
1) Zeige, dass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}(M) \cong M$ für alle $M \in \mathrm{Mod}_R$. Sei M ein R-Rechtsmodul. Beachte zunächst, dass jedes Element in MS^{-1} in der Form $m \otimes s^{-1}$ mit $m \in M$ und $s \in S$ geschrieben werden kann. Induktiv genügt es dies für die Summe zweier einfacher Tensoren $m_1 \otimes s_1^{-1}, m_2 \otimes s_2^{-1} \in MS^{-1}$ zu zeigen. Die Ore-Bedingung liefert ein $r \in R$ und ein $s \in S$ mit $s_1 r = s_2 s$, dadurch wird r zur Einheit in RS^{-1}. Damit können wir die Summe der einfachen Tensoren in der gewünschten Form schreiben:

$$m_1 \otimes s_1^{-1} + m_2 \otimes s_2^{-1} = m_1 r \otimes (s_1 r)^{-1} + m_2 s \otimes (s_2 s)^{-1} = (m_1 r + m_2 s) \otimes (s_2 s)^{-1}.$$

Sei nun $(m' \otimes s^{-1}, m'' \otimes t^{-1}) \in \mathcal{G}(\mathcal{F}(M)) = \ker(MS^{-1} \times MT^{-1} \to M(ST)^{-1})$, d.h. es gilt $m' \otimes s^{-1} - m'' \otimes t^{-1} = 0$ in $M(ST)^{-1}$. Nach dem Überdeckungsaxiom gibt es $r', r'' \in R$ mit $sr' + tr'' = 1$. Setze $m_1 := m'r' + m''r''$. Dann gilt

$$\begin{aligned} m_1 \otimes 1 = (m'r' + m''r'') \otimes 1 &= m' \otimes s^{-1} sr' + m'' \otimes r'' = m' \otimes s^{-1} - m' \otimes s^{-1} tr'' + m'' \otimes r'' \\ &= m' \otimes s^{-1} + (-m' \otimes s^{-1} t + m'' \otimes t^{-1} t) r'' = m' \otimes s^{-1} + (-m' \otimes s^{-1} + m'' \otimes t^{-1}) tr = m' \otimes s^{-1} \end{aligned}$$

in $M(ST)^{-1}$. Damit liegt $m' \otimes s^{-1} - m_1 \otimes 1$ in $\ker(MS^{-1} \to M(ST)^{-1})$ und wird somit nach 5.0.7 von Rechts von einem $t' \in T$ annulliert . Das Überdeckungsaxiom liefert $x, x' \in R$ mit $1 = sx + t'x'$. Nun gilt

$$m' \otimes s^{-1} - m_1 \otimes 1 = (m' \otimes s^{-1} - m_1 \otimes 1)(sx + t'x') = m' \otimes x - m_1 \otimes sx$$

in MS^{-1}. Mit $m_2 := m'x + m_1(1 - sx)$ gilt dann $m' \otimes s^{-1} = m_2 \otimes 1$ in MS^{-1}. Wegen $m_1 \otimes 1 = m' \otimes s^{-1} = m'' \otimes t^{-1}$ in $M(ST)^{-1}$, liegt $m'' \otimes t^{-1} - m_1 \otimes 1$ in $\ker(MT^{-1} \to M(ST)^{-1})$. Erneut gibt es nach 5.0.7 ein $s' \in S$, welches dies in MT^{-1} von rechts annulliert. Schreibe nun $1 = s'y' + ty$ mit $y, y' \in R$. Dann gilt

$$m'' \otimes t^{-1} - m_1 \otimes 1 = (m'' \otimes t^{-1} - m_1 \otimes 1)(s'y' + ty) = m'' \otimes y - m_1 \otimes ty$$

in MT^{-1}. Mit $m_3 := m''y + m_1(1 - ty)$ gilt dann $m'' \otimes t^{-1} = m_3 \otimes 1$ in MT^{-1}. $m_2 - m_3$ liegt im Kern der Abbildung

$$M \longrightarrow M(ST)^{-1} \quad m \longmapsto m \otimes 1.$$

Betrachte dazu die Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} & MS^{-1} \arrow[dr] & \\ M \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & M(ST)^{-1} \\ & MT^{-1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

wonach m_2 auf $m_2 \otimes 1 = m' \otimes s^{-1}$ und m_3 auf $m_3 \otimes 1 = m'' \otimes t^{-1}$ abgebildet wird und es gilt $m' \otimes s^{-1} - m'' \otimes t^{-1} = 0$ in $M(ST)^{-1}$. Nach 5.0.7 gibt es ein Element in ST –etwa $s''t''$ mit s'' in S und t'' in T– mit $(m_2 - m_3)s''t'' = 0$ in $M(ST)^{-1}$. Da S und T kompatibel sind, gibt es ein $\tilde{t} \in T$ und ein $\tilde{s} \in S$ mit $s''t'' = \tilde{t}\tilde{s}$. Schreibe nun $1 = s''z_1 + \tilde{t}z_2$ mit $z_1, z_2 \in R$. Mit $n := (m_2 - m_3)s''z_1$ und $\tilde{n} := (m_2 - m_3)\tilde{t}z_2$ gilt dann $m_2 - m_3 = n + \tilde{n}$. Die Ore-Bedingung liefert ein $z_1' \in R$ und ein $t''' \in T$ mit $z_1 t''' = t'' z_1'$. Dann gilt $nt''' = (m_2 - m_3)s''z_1 t''' = (m_2 - m_3)s''t''z_1' = 0$. dh. n wird von t''' annulliert. Anderseits liefert die Ore-Bedingung auch ein $z_2' \in R$ und ein $\tilde{\tilde{s}} \in S$ mit $z_2\tilde{\tilde{s}} = \tilde{s}z_2'$. Es gilt dann $\tilde{n}\tilde{\tilde{s}} = (m_2 - m_3)\tilde{t}\tilde{s}z_2' = (m_2 - m_3)s''t''z_2' = 0$, d.h. $\tilde{n}$ wird von $\tilde{\tilde{s}}$ annulliert. Dann liefert 5.0.7 mit $\tilde{m} := m_2 - \tilde{n} = m_3 + n \in M$ einerseits $\tilde{m} \otimes 1 = m_2 \otimes 1 - \tilde{n} \otimes 1 = m_2 \otimes 1 = m' \otimes s^{-1}$ in MS^{-1} und anderseits $\tilde{m} \otimes 1 = m_3 \otimes 1 + n \otimes 1 = m_3 \otimes 1 = m'' \otimes t^{-1}$ in MT^{-1}. Damit liegt $(m' \otimes s^{-1}, m'' \otimes t^{-1})$ im Bild der Einbettung $M \hookrightarrow MS^{-1} \times MT^{-1}$. Die Injektivität dieser Abbildung folgt dabei unmittelbar aus dem Überdeckungsaxiom 4.0.1 und Satz 5.0.7. Umgekehrt liegt das Bild von M unter $M \hookrightarrow MS^{-1} \times MT^{-1}$ offenbar im Kern von

$$MS^{-1} \times MT^{-1} \longrightarrow M(ST)^{-1} \quad (m' \otimes s^{-1}, m'' \otimes t^{-1}) \longmapsto m' \otimes s^{-1} - m'' \otimes t^{-1}.$$

Also geht $M \hookrightarrow MS^{-1} \times MT^{-1}$ isomorph auf $\mathcal{G}(\mathcal{F}(M))$.

2) Zeige $\mathcal{F}(\mathcal{G}(P,Q,\theta)) \cong (P,Q,\theta)$ für alle $(P,Q,\theta) \in \mathscr{C}$. Sei $(P,Q,\theta) \in \mathscr{C}$ beliebig und setze $M := \mathcal{G}(P,Q,\theta)$. Die R-lineare Abbildung $M \hookrightarrow P \times Q \overset{proj_1}{\longrightarrow} P$ induziert eine RS^{-1} lineare Abbildung $f : MS^{-1} = M \otimes_R RS^{-1} \to P$ via $(p,q) \otimes s^{-1} \mapsto ps^{-1}$ und analog induziert die R-lineare Abbildung $M \hookrightarrow P \times Q \overset{proj_2}{\longrightarrow} Q$ eine RT^{-1} lineare Abbildung $g : MT^{-1} \to Q$ via $(p,q) \otimes t^{-1} \mapsto qt^{-1}$. Sei $m \otimes s^{-1} \in \ker f$. Dann ist wegen der RS^{-1}-Linearität von f auch $m \otimes 1$ im Kern enthalten. Und somit liegt m im Kern der Abbildung $M \hookrightarrow P \times Q \overset{proj_1}{\longrightarrow} P$. Schreibe $m = (p,q)$, sodass also $m = (0,q)$ gilt. Es gilt nun $0 = q \otimes 1 - \theta(p \otimes 1) = q \otimes 1$ in QS^{-1}. Nach 5.0.7 gibt es damit ein $s' \in S$ mit $qs' = 0$ und es gilt $ms' = (0, qs') = (0,0)$. Damit ist dann auch $m \otimes s^{-1} = ms' \otimes s'^{-1}s^{-1} = 0$ in MS^{-1} und somit $\ker f = \{0\}$. Analog zeigt man, dass $\ker g = \{0\}$. Sei $p \in P$ beliebig und schreibe $\theta(p \otimes 1) = q \otimes s^{-1}$ mit $q \in Q$ und $s \in S$. Das ist äquivalent zu $\theta(p \otimes 1)s = q \otimes 1$ und dies wiederum genau dann der Fall, wenn $\theta(p \otimes s) = q \otimes 1$ gilt. Eine letzte äquivalente Umformung liefert schließlich $\theta(ps \otimes 1) = q \otimes 1$. Setze nun $m := (ps, q) \in M$. Dann liegt $m \otimes s^{-1} \in MS^{-1}$ und es gilt $f(m \otimes s^{-1}) = p$, d.h. f ist surjektiv. Analog zeigt man, dass g surjektiv ist. Zeige nun, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
PT^{-1} \arrow[r, "\theta"] & QS^{-1} \\
(MS^{-1})T^{-1} \arrow[u, "f\otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}"] \arrow[r, "\theta_M"'] & (MT^{-1})S^{-1} \arrow[u, "g\otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}"']
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Bemerke zunächst, dass sich jedes $x \in (MS^{-1})T^{-1}$ schreiben lässt als $x = (m \otimes s^{-1}) \otimes t^{-1}$ mit $m = (p,q)$. Da S und T kompatibel sind, gibt es ein $s' \in S$ und ein $t' \in T$ mit $ts = s't'$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
g \otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}(\theta_M(x)) &= g \otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}((m \otimes 1) \otimes s^{-1}t^{-1}) = g \otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}((m \otimes 1) \otimes t'^{-1}s'^{-1}) \\
&= g \otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}((m \otimes t'^{-1}) \otimes s'^{-1}) = qt'^{-1} \otimes s'^{-1} \\
\theta(f \otimes \mathrm{id}_{R(ST)^{-1}}(x)) &= \theta(ps^{-1} \otimes t^{-1}) = \theta(p \otimes s^{-1}t^{-1}) = \theta(p \otimes 1)s^{-1}t^{-1} \\
&= (q \otimes 1)t'^{-1}s'^{-1} = qt'^{-1} \otimes s'^{-1}
\end{aligned}$$

Damit ist $(f,g) : \mathcal{F}(\mathcal{G}(P,Q,\theta)) \to (P,Q,\theta)$ ein Isomorphismus in $\mathscr{C}$. □

Korollar 4.1.3:
In der Äquivalenz von 4.1.2 gilt:

(i) M ist endlich erzeugt respektive endlich präsentiert genau dann, wenn P und Q endliche erzeugt respektive endlich präsentiert sind

(ii) Seien S und T zusätzlich Linksteilermengen. Dann ist M endlich erzeugt und projektiv genau dann, wenn P und Q endlich erzeugt und projektiv sind.

Beweis. Zu (i): Wir gehen nach folgendem Beweisplan vor

- RS^{-1} und RT^{-1} sind flache R-Linksmoduln:
Sei I ein Linksideal von R und $\varphi : I \otimes_R RS^{-1} \to R \otimes_R RS^{-1} \to RS^{-1}$ definiert durch $r \otimes s^{-1} \mapsto \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$. Ferner sei $r \otimes \vartheta(s)^{-1}$ im Kern von φ. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\vartheta(r) = 0$ ist. Also liegt r in ass S und somit gibt es ein $s' \in S$ mit $rs' = 0$ in R. Nun gilt $r \otimes \vartheta(s)^{-1} = r \otimes \vartheta(s')\vartheta(s')^{-1}\vartheta(s)^{-1} = rs' \otimes \vartheta(s')^{-1}\vartheta(s) = 0$, d.h. φ ist stets injektiv. Nach 5.0.10 ist RS^{-1} (und analog RT^{-1}) flach.

- $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ ist treuflach:
Sei I ein R-Rechtsideal. Dann ist die Abbildung $I \otimes_R (RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}) \cong I \otimes_R RS^{-1} \bigoplus I \otimes_R RT^{-1} = I \otimes_R RS^{-1} \times I \otimes_R RT^{-1} \hookrightarrow RS^{-1} \times RT^{-1}$ offenbar injektiv, d.h. $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ ist flach. Für die

Isomorphie $I \otimes_R (RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}) \cong I \otimes_R RS^{-1} \bigoplus I \otimes_R RT^{-1}$ sei auf 5.0.12 verwiesen. Sei nun X ein R-Rechtsmodul. Dann liefert 5.0.12 direkt $X \otimes_R (RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}) \cong XS^{-1} \bigoplus XT^{-1}$. Sei $x \in X$ und $s \in S$ und $t \in T$. Dann impliziert $(xs \otimes 1, xt \otimes 1) = 0$ sowohl $xs = 0$ als auch $xt = 0$. Das Überdeckungsaxiom liefert dann $\alpha, \beta \in R$ mit $1 = s\alpha + t\beta$. Nun gilt $x = x(s\alpha + t\beta) = xs\alpha + xt\beta = 0$. Es folgt $X = 0$, d.h. $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ ist treuflach.

- Nach [Lam, 1999] Lemma 4.79 ist $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \cong M \otimes_R (RS^{-1} \bigoplus RT^{-1})$ endlich erzeugt respektive endlich präsentiert über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ genau dann, wenn M endlich endlich erzeugt respektive endlich präsentiert über R ist.

- Ferner ist $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ endlich erzeugt respektive endlich präsentiert über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ genau dann, wenn MS^{-1} bzw. MT^{-1} endlich erzeugt respektive endlich präsentiert sind über RS^{-1} bzw. RT^{-1}. Beweis dazu: „$\Rightarrow$ “:

  - endlich erzeugt: Sei $A = \{(m_i \otimes a_i, n_i \otimes b_i) : i = 1, ..., n\}$ ein Erzeugendensystem von $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$. Sei $(m \otimes a, n \otimes b) \in MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ beliebig. Nun gibt es $(\lambda_i, \mu_i) \in RS^{-1} \times RT^{-1}$ mit $(m \otimes a, n \otimes b) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \otimes a_i \lambda_i, n_i \otimes b_i \mu_i)$ und wir haben somit –da A fix ist– jeweils ein endliches Erzeugendensystem für MS^{-1} und MT^{-1}. Beachte hierfür, dass jedes Element aus MS^{-1} eine Summe von einfachen Tensoren ist. Dies gilt analog für MT^{-1}

  - Sei $K \to F \xrightarrow{f} MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \to 0$ eine exakte Sequenz von $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ Moduln, wobei F frei von endlichem Rang und K endlich erzeugt ist. Die Projektion $proj_1 : RS^{-1} \bigoplus RT^{-1} \to RS^{-1}$ ist ein Ringhomomorphismus über den als RS^{-1} als $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$-Modul aufgefasst wird. Die Sequenz
$$RS^{-1} \otimes_{\tilde{R}} K \to RS^{-1} \otimes_{\tilde{R}} F \to RS^{-1} \otimes_{\tilde{R}} (MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}) \to 0$$
ist dann exakt, wobei $\tilde{R}$ definiert ist als die direkte Summe von RS^{-1} und RT^{-1}. Nach allgemeinen Eigenschaften des Tensorproduktes ist dabei der linke Term endlich erzeugt, und der mittlere Term endlich erzeugt und frei über RS^{-1}. Ferner ist $proj_1$ surjektiv mit $\ker proj_1 = (1,0)\tilde{R} =: I$. Es folgt
$$RS^{-1} \otimes_{\tilde{R}} (MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}) \cong (\tilde{R}/I\tilde{R}) \otimes_{\tilde{R}} (MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}) \cong (MS^{-1} \bigoplus MT^{-1})/I \cdot (MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}) \cong MS^{-}$$
wobei der letzte Isomorphismus durch die Abbildungsvorschrift $[(m, m')] \mapsto m$ gegeben ist. Das zeigt, dass MS^{-1} endlich präsentiert ist über RS^{-1}. Analog zeigt man, dass MT^{-1} endlich präsentiert ist über RT^{-1}.

„$\Leftarrow$ “:

  - endlich erzeugt: Sei $A = \{(m_i \otimes a_i) : i = 1, ..., n\}$ ein RS^{-1} Erzeugendensystem von MS^{-1} und $B := \{n_j \otimes b_j : j = 1, ..., m\}$ ein RT^{-1} Erzeugendensystem von MT^{-1}. Dann ist $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ein $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ Erzeugendensystem von $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$.
  - endlich präsentiert: Sei
$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow F_1 \longrightarrow MS^{-1} \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von RS^{-1}-Rechtsmoduln und
$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow F_2 \longrightarrow MT^{-1} \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von RT^{-1}-Rechtsmoduln, wobei K_1, K_2 endlich erzeugt und $F_1.F_2$ frei von endlichem Rang sind. Dann ist die folgendene Sequenz von $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$-Rechtsmoduln exakt:
$$0 \longrightarrow K_1 \times K_2 \longrightarrow F_1 \times F_2 \longrightarrow MS^{-1} \times MT^{-1} \longrightarrow 0$$

Zu (ii): Sei M ein projektiver endlich erzeugter R-Rechtsmodul. Wende nun Eilenbergs Trick an (5.0.11). Es gibt also einen projektiven R-Linksmodul N (vom Rang $n \in \mathbb{N}$) mit $M \bigoplus N \cong R^n$. Damit können wir schreiben $MS^{-1} \bigoplus NS^{-1} \cong (M \bigoplus N) \otimes_R RS^{-1} \cong R^n \otimes_R RS^{-1} \cong (RS^{-1})^n$, wobei $(RS^{-1})^n$ ein freier RS^{-1} Modul ist. Erneut liefert Eilenbergs Trick, dass MS^{-1} projektiv ist. Außerdem ist MS^{-1} endlich erzeugt über RS^{-1} nach (i). Analog zeigt man, dass MT^{-1} ebenfalls endlich erzeugt über RT^{-1} und

projektiv ist. Seien nun umgekehrt MS^{-1} und MT^{-1} endlich erzeugt über RS^{-1} respektive RT^{-1} und projektiv. Nach (i) ist dann $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \cong M \otimes_R (RS^{-1} \bigoplus RT^{-1})$ endlich erzeugt über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$. Da MS^{-1} und MT^{-1} projektiv sind, gibt es nach Eilenbergs Trick einen RS^{-1} Modul N_1 und $n \in \mathbb{N}$ und einen RT^{-1} Modul N_2 und $m \in \mathbb{N}$ mit $MS^{-1} \bigoplus N_1 \cong (RS^{-1})^n$ und $MT^{-1} \bigoplus N_2 \cong (RT^{-1})^m$. Damit ist $(MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}) \bigoplus (N_1 \bigoplus N_2) \bigoplus (RS^{-1})^m \bigoplus (RT^{-1})^n$ isomorph zum freien $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ Modul $(RS^{-1} \bigoplus RT^{-1})^{m+n}$. Erneutes Anwenden von Eilenbergs Trick liefert insgesamt, dass $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ endlich erzeugt über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ und projektiv ist. Nach 5.0.13 ist dieser Modul damit flach und es folgt, dass $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ ein flacher Rechtsmodul über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ ist. Anwenden von 5.0.14 liefert, dass $M(ST)^{-1} = MS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}$ (rechts) flach über $R(ST)^{-1}$ ist. Zeige nun, dass $M(ST)^{-1}$ auch flach über R ist. Zunächst sei an 2.4.5 erinnert wonach $R(ST)^{-1}$ ein beidseitig flacher R-Modul ist, da ST auch eine Linksteilermenge ist. Mit der Rechtsflachheit von $M(ST)^{-1}$ über $R(ST)^{-1}$ erhalten wir somit die Rechtsflachheit von $M(ST)^{-1}$ über R. Analog zeigt man, dass die Flachheit von $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ über $RS^{-1} \bigoplus RT^{-1}$ die Flachheit über R impliziert.
Betrachte nun die Sequenz $0 \longrightarrow M \longrightarrow MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \xrightarrow{\gamma} M(ST)^{-1} \longrightarrow 0$, wobei γ definiert ist durch $(m' \otimes s^{-1}, m'' \otimes t^{-1}) \mapsto m' \otimes s^{-1} - m'' \otimes t^{-1}$. Im Beweis von 4.1.2 haben wir schon $\ker \gamma = M$ gesehen (unter der kanonischen Einbettung von M in $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$). Um die Exaktheit der obigen Sequenz zu zeigen, müssen wir die Surjektivität von γ nachweisen. Sei dazu $m \otimes (st)^{-1} \in M(ST)^{-1}$ beliebig. Die Kompatibilität von S und T liefert ein $s' \in S$ und ein $t' \in T$ mit $st = t's'$. Nach der Überdeckungseigenschaft gibt es $r_1, r_2 \in R$ mit $1 = sr_1 + t'r_2$. Ferner gibt es $r_1', r_2' \in R$, $\tilde{t} \in T$, $\tilde{s} \in S$ mit $t^{-1}r_1 = r_1'\tilde{t}^{-1}$ und $s'^{-1}r_2 = r_2'\tilde{s}^{-1}$ in $R(ST)^{-1}$. Dann gilt

$$m \otimes (st)^{-1} = m \otimes t^{-1}s^{-1}(sr_1 + t'r_2) = m \otimes (t^{-1}r_1 + t^{-1}s^{-1}t's's'^{-1}r_2) = m \otimes (r_1'\tilde{t}^{-1} + r_2'\tilde{s}^{-1})$$

und somit ist $(m \otimes r_2'\tilde{s}^{-1}, m \otimes -r_1\tilde{t}^{-1})$ ein geeignetes Urbild. Betrachte jetzt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow Z' \longrightarrow Z'' \longrightarrow 0$$

von R-Linksmoduln. Da $M(ST)^{-1}$ als R-Rechtsmodul flach ist, sind die beiden Zeilen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & (MS^{-1} \oplus MT^{-1}) \otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & M(ST)^{-1} \otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes_R Z' \arrow[r] & (MS^{-1} \oplus MT^{-1}) \otimes_R Z' \arrow[r] & M(ST)^{-1} \otimes_R Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt. Die Abbildung γ ist injektiv, da $M(ST)^{-1}$ flach ist. Ebenso ist β injektiv, da $MS^{-1} \bigoplus MT^{-1}$ ebenfalls flach über R ist. Ferner sind die Abbildungen $M \otimes_R Z \to MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \otimes_R Z$ und $M \otimes_R Z' \to MS^{-1} \bigoplus MT^{-1} \otimes_R Z'$ injektiv, sodass auch α injektiv ist. Insgesamt ist also M flach über R als Rechtsmodul.
Wie schon in (i) gesehen ist letztendlich M endlich präsentiert über R. Da M endlich präsentiert und flach über R ist, sind die Voraussetzungen von Lazards Theorem erfüllt. Also ist M endlich erzeugt und projektiv über R. □

4.2 Die Kategorienäquivalenz von $\Phi_K^{ét}$ und $\mathscr{H}$

Als erstes benötigen wir noch einige Vorbereitungen, um die Kategorie $\mathscr{H}$ zu definieren. Im Anschluss definieren $\Phi_K^{ét}$. Von nun an sei K ein perfekter Körper der Charakteristik $p \in \mathbb{P}$, d.h. der Frobenius Endomorphismus ist bijektiv. Ferner bezeichne ab jetzt φ stets den Frobenius Automorphismus und es sei noch auf die Definitionen der Ringe und Teilmengen in 3.5 verwiesen. In der folgenden Definition steht $\mathscr{H}$ für die sogenannte projektive Schiefgerade – ein hypothetisches Objekt, das letzlich undefiniert bleibt.

Definition 4.2.1: *(i) $M_{\mathcal{X}}$:= Kategorie aller Moduln auf der projektiven Schiefgeraden := Kategorie mit Objekten (M^+, M^-, θ), wobei M^+ ein R^+-Rechtsmodul, M^- ein R^--Rechtsmodul und $\theta : M^+ \otimes_{R^+} R^\pm \to M^- \otimes_{R^-} R^\pm$ ein Isomorphismus von $R^\pm$-Rechtsmoduln ist. Die Homomorphismenn $(M_1^+, M_1^-, \theta_1) \to (M_2^+, M_2^-, \theta_2)$ dieser Kategorie sind Paare (f, g). Dabei ist $f : M_1^+ \to M_2^+$ eine R^+-lineare Abbildung* *und* $g : M_1^- \to M_2^-$ *eine* R^-*-lineare Abbildung, sodass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} M_1^+ \otimes_{R^+} R^\pm \arrow[r, "f\otimes id_{R^\pm}"] \arrow[d, "\theta_1"'] & M_2^+ \otimes_{R^+} R^\pm \arrow[d, "\theta_2"] \\ M_1^- \otimes_{R^-} R^\pm \arrow[r, "g\otimes id_{R^\pm}"] & M_2^- \otimes_{R^-} R^\pm \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

(ii) $P_{\mathcal{X}}$:= *Kategorie aller Vektorbündel auf der projektiven Schiefgeraden* := *Kategorie mit Objekten* (M^+, M^-, θ) *aus* $M_{\mathcal{X}}$, *sodass* M^+ *und* M^{-1} *endlich erzeugt und projektiv über* R^+ *respektive* R^- *sind. Die Homomorphismen in dieser Kategorie sind dieselben wie in* $M_{\mathcal{X}}$. *Man sagt, dass* $P_{\mathcal{X}}$ *eine volle Unterkategorie von* $M_{\mathcal{X}}$ *ist.*

(iii) *Eine Sequenz*

$$0 \longrightarrow (M, N, \theta) \xrightarrow{(f,g)} (M', N', \theta') \xrightarrow{(f',g')} (M'', N'', \theta'') \longrightarrow 0$$

in $M_{\mathcal{X}}$ *heißt exakt, falls die Sequenzen*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'' \longrightarrow 0$$

von R^+*-Rechtsmoduln respektive* R^-*-Rechtmoduln exakt sind.*

(iv) *Für* $M := (M^+, M^-, \theta) \in M_X$ *definieren wir einen* B*-Modul* $M \otimes_{\mathcal{X}} B$*: Bezeichne dafür*

$$\iota^+ : M^+ \otimes_{R^+} B^+ \longrightarrow M^+ \otimes_{R^+} B^\pm \quad m \otimes b \longmapsto m \otimes b$$

$$\iota^- : M^- \otimes_{R^-} B^- \longrightarrow M^- \otimes_{R^-} B^\pm \quad m \otimes b \longmapsto m \otimes b$$

die kanonischen Abbildungen und $\theta \otimes 1$ *den durch* θ *induzierten* $B^\pm$*-Modulisomorphismus:*

$$M^+ \otimes_{R^+} B^\pm \cong (M^+ \otimes_{R^+} R^\pm) \otimes_{R^\pm} B^\pm \xrightarrow{\theta\otimes 1} (M^- \otimes_{R^-} R^\pm) \otimes_{R^\pm} B^\pm \cong M^- \otimes_{R^-} B^\pm$$

Setze nun $M \otimes_{\mathcal{X}} B := \{(x, y) \in (M^+ \otimes_{R^+} B^+) \times (M^- \otimes_{R^-} B^-) : (\theta \otimes 1)(\iota^+(x)) = \iota^-(y)\}$. *Da* ι^+ B^+*-linear,* ι^- B^-*-linear und* $\theta\otimes 1$ $B^\pm$*-linear ist, sind all diese Abbildungen insbesondere* B*-linear. Damit ist* $M \otimes_{\mathcal{X}} B$ *ein* B*-Untermodul des* B*-Moduls* $(M^+ \otimes_{R^+} B^+) \times (M^- \otimes_{R^-} B^-)$ *bezüglich komponentenweiser Operation.*

Lemma 4.2.2:
4.1.2 und 4.1.3 können auf die multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen T^+ *und* T^- *von* B *angewandt werden.*

Beweis. Wir müsssen zeigen, dass diese beiden Mengen kompatibel sind und das Überdeckungsaxiom erfüllen. Sei $fg^{-1} \in T^\pm$ mit $f, g \in R^+ \setminus \{0\}$ (3.5.9) und setze $a := \deg g - \deg f \geq 0$. Dann gilt $fg^{-1} = (1 + x)^{-a}((1 + x)^a fg^{-1})$, wobei nach 3.5.19 $(1 + x)^a fg^{-1}$ in T^- und $(1 + x)^{-a}$ in T^+ liegt. Damit ist $T^\pm = T^+T^-$. Analog zeigt man auch, dass $T^\pm = T^-T^+$ gilt. Damit sind die beiden Mengen kompatibel. Nach 3.5.15 sind J_0 und J_∞ die einzigen maximalen Ideale von B. Ferner gilt $T^+ = B \setminus J_0$ und $T^- = B \setminus J_\infty$. Seien nun $t^+ \in T^+$ und $t^- \in T^-$ beliebig. Diese beiden Elemente erzeugen jeweils zwei verschiedene Rechtsideale. Damit ist auch die Summe $t^+B + t^-B$ ein Rechtsideal, welches weder eine Teilmenge von J_0 noch von J_∞ ist. Damit kann es sich um kein echtes Ideal handeln und es muss gelten $t^+B + t^-B = B$. □

Lemma 4.2.3:
Ist $M = (M^+, M^-, \theta) \in P_{\mathcal{X}}$, *so ist* $M \otimes_{\mathcal{X}} B$ *endlich erzeugt und projektiv über* B.

Beweis. Nach 4.2.2 können wir 4.1.2 und 4.1.3 auf B Anwenden mit den Lokalisierungen $B^+ = (T^+)^{-1}B$, $B^- = (T^-)^{-1}B$ und $B^\pm = (T^\pm)^{-1}B$. In der Notation des Beweises von 4.1.2 ist dann

$$M \otimes_{\mathscr{H}} B = \mathcal{G}((M^+ \otimes_{R^+} B^+, M^- \otimes_{R^-} B^-, \theta \otimes 1)),$$

was nach 4.1.3 endlich erzeugt und projektiv über B ist. □

Definition 4.2.4:
$\mathscr{H}$:= volle Unterkategorie von $M_{\mathcal{X}}$ bestehen aus allen Objekten $M = (M^+, M^-, \theta)$ mit den beiden Eigenschaften:

(i) In $M_{\mathcal{X}}$ existiert eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit $M_0, M_1 \in P_{\mathcal{X}}$

(ii) $M \otimes_{\mathcal{X}} B = 0$

Definition 4.2.5:
Sei R ein Ring und $\varphi : R \to R$ ein Endomorphismus.

(i) Sei M ein R-Rechtsmodul. Eine Abbildung $f : M \to M$ heißt φ-semilinear, falls sie additiv ist und für alle $m \in M$ und alle $\lambda \in R$ $f(m\lambda) = f(m)\varphi(\lambda)$ gilt.

(ii) Ein φ-Modul (über R) ist ein Paar (M, f) bestehend aus einem R-Rechtsmodul und einer φ-semilinearen Abbildung $f : M \to M$

(iii) Seien (M, f) und (N, g) φ-Moduln über R. Ein Morphismus $(M, f) \to (N, g)$ von φ-Moduln ist eine R-lineare Abbildung $F : M \to N$ mit $F \circ f = g \circ F$. Die Menge der Morphismen zwischen diesen beiden φ-Moduln bezeichen wir mit $Hom_{\varphi}(M, N)$.

Bemerkung 4.2.6:
Sei (M, f) ein φ-Modul. Betrachtet man R als R-Rechtsmodul via $r \cdot s := r \cdot \varphi(s)$ so setzen wir $M \otimes_{R,\varphi} R := M \otimes_R R$. Dies ist die sogenannte Skalar Erweiterung von M bezüglich φ. Diese abelsche Gruppe ist ein R-Rechtsmodul via

$$* : (M \otimes_{R,\varphi} R) \times R \longrightarrow M \otimes_{R,\varphi} R \quad (m \otimes r') * r \longmapsto m \otimes r'r$$

Hierbei ist $r'r$ die normale Multiplikation in R. Ferner ist die Abbildung

$$M \times R \longrightarrow M \quad (m, r) \longmapsto f(m)r$$

R-balanciert. Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert dann einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$f_{\varphi} : M \otimes_{R,\varphi} R \longrightarrow M,$$

welcher $f_{\varphi}(m \otimes r) = f(m)r$ genügt. f_{φ} ist sogar R-linear für die obige R-Rechtsmodulstruktur. In der Tat gilt

$$f_{\varphi}((m \otimes r') * r) = f_{\varphi}(m \otimes r'r) = f(m)r'r = f_{\varphi}(m \otimes r')r$$

für alle $m \otimes r' \in M \otimes_{R,\varphi} R$ und alle $r \in R$. Die Abbildung f_{φ} wird als R-Linearisierung von f bezeichnet.

Definition 4.2.7:
Ein φ-Modul (M, f) heißt étale, falls M als R-Modul endlich erzeugt ist und falls die R-Lineariserung f_{φ} von f bijektiv ist.

Definition 4.2.8:
$\Phi_R^{ét}$:= Kategorie der étalen φ-Moduln über R mit denselben Morphismen wie in 4.2.5 (iii).

Ab sofot betrachten wir wieder den perfekten Körper der K der Charakteristik $p \in \mathbb{P}$ und den Frobeniusautomorphismus φ von K. In diesem Fall hat man für étale φ-Moduln über K das folgende einfache Kriterium:

Proposition 4.2.9:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Rechtsvektorraum und $f : V \to V$ eine φ-semilineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $(V, f) \in \Phi_K^{ét}$

(ii) f ist injektiv

(iii) f ist surjektiv

Beweis. Da V endlich dimensional ist, sind *(ii)* und *(iii)* offenbar äquivalent.
(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $w \in V$ beliebig. Da f_φ surjektiv ist, gibt es ein v in V und ein $r \in K$ mit $f_\varphi(v \otimes r) = w$. Da φ bijektiv ist, gibt es ein $l \in K$ mit $l^p = r$ und es gilt $w = f_\varphi(v \otimes r) = f(v)r = f(v)l^p = f(v)\varphi(l) = f(vl)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $f_\varphi(v \otimes r) = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn $f(v)r = 0$ gilt. Da f injektiv ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $v = 0$ oder $r = 0$ gilt. Damit ist f_φ injektiv. Sei nun $w \in V$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $w = f(v) = f(v) \cdot 1 = f_\varphi(v \otimes 1)$. □

Proposition 4.2.10:
Sei $M = (M^+, M^-, \theta) \in M_{\mathcal{X}}$, wobei einerseits M^+ endlich erzeugt über R^+ sei und anderseits sei $M \otimes_{\mathcal{X}} B = 0$. Dann gilt

(i) $\dim_K M^+ < \infty$ *(via $K \subseteq R^+ = K[x, \varphi]$)*

(ii) die Abbildung $x : M^+ \to M^+$, $m \mapsto mx$ ist φ-semilinear

(iii) (M^+, x) liegt in $\Phi_K^{ét}$

Beweis. Zu (i): Seien $m_1, ..., m_j$ die Erzeuger von M^+ über R^+. Der Beweis von 4.1.2 liefert die folgende Isomorphie $M^+ \otimes_{R^+} B^+ \cong (M \otimes_{\mathcal{X}} B) \otimes_B B^+ = 0$. Wegen $B^+ = R^+(S_0^+)^{-1}$ und 5.0.7 gibt es zu jedem m_i ein $s_i \in S_0$ mit $m_i s_i = 0$. Die Ore-Bedingung liefert nun ein $r_1' \in R^+$ und ein $s_1' \in S_0$ mit $s_1 s_1' = s_2 r_1$. Induktiv liefert die Ore-Bedingung $r_i' \in R^+$ und $s_i' \in S_0$ mit $(s_1 s_1' \cdot ... \cdot s_{i-1}') s_i' = s_{i+1} r_i'$ für $i = 1, ..., j-1$. Setze nun $s := s_1 s_1' \cdot ... \cdot s_{j-1}' \in S_0$. Dann gilt $m_i s = 0$ für alle $i = 1, ..., j$. Deshalb faktorisiert die surjektive R^+-lineare Abbildung

$$(R^+)^j \longrightarrow M^+ \quad (r_1, ..., r_j) \longmapsto \sum_{i=1}^{j} m_i r_i$$

über eine surjektive R^+-lineare Abbildung $(R^+/sR^+)^j \longrightarrow M^+$. Es genügt daher zu zeigen, dass $\dim_K R^+/sR^+ < \infty$ gilt. Nach dem verallgemeinerten euklidischen Algorithmus für Schiefpolynomringe (3.4.5) gilt aber bereits $\dim_K R^+/sR^+ = \deg s < \infty$
Zu (ii): Seien $m, m' \in M^+$ und $\alpha \in K$ beliebig. Dann gilt

$$m + m' \overset{x}{\longmapsto} (m + m')x = mx + m'x$$

$$m\alpha \overset{x}{\longmapsto} (m\alpha)x = m(\alpha x) = m(x\varphi(\alpha)) = (mx)\varphi(\alpha)$$

Zu (iii): Wie im Beweis von (i) gesehen gibt es zu jedem $m \in M^+$ ein $s \in S_0$ mit $ms = 0$. Schreibe $s = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i \in K$ und $a_0 \neq 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} m &= -m(s - a_0)a_0^{-1} = -m(a_1 x + ... + a_n x^n)a_0^{-1} = -m(a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1})x a_0^{-1} \\ &= -m(a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1})\varphi^{-1}(a_0^{-1})x, \end{aligned}$$

d.h. $x : M^+ \to M^+$ ist surjektiv. Wegen 4.2.9 ist M^+ damit étale. □

Bemerkung 4.2.11:
Ist $M = (M^+, M^-, \theta) \in \mathscr{H}$, so gilt $M \otimes_{\mathscr{H}} B = 0$ und es gibt eine exakte Sequenz von R^+-Moduln

$$0 \longrightarrow M_1^+ \longrightarrow M_2^+ \longrightarrow M^+ \longrightarrow 0$$

mit M_1^+ und M_2^+ endlich erzeugt und projektiv. Daraus folgt, dass M^+ als R^+-Modul endlich erzeugt ist. Wir erhalten damit einen exakten Funktor

$$\mathcal{F} : \mathscr{H} \longrightarrow \Phi_K^{ét} \text{ via } (M^+, M^-, \theta) \longmapsto (M^+, x)$$

Wir wollen nun einen Funktor zu $\mathcal{F}$ quasi inversen exakten Funktor

$$\mathcal{G} : \Phi_K^{ét} \longrightarrow \mathscr{H}$$

definieren. Sei dann $(V, f) \in \Phi_K^{ét}$ und mache den K-Rechtsvektorraum V zu einem

- R^+-Modul V_f^+ via $v \cdot \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n f^i(v)\varphi^i(a_i) = \sum_{i=0}^n f^i(v a_i)$

- R^--Modul V_f^- via $v \cdot \sum_{i=0}^n a_i x^{-i} = \sum_{i=0}^n f^{-i}(v)\varphi^{-i}(a_i) = \sum_{i=0}^n f^{-i}(va_i)$ (f und φ sind bijektiv)

Lemma 4.2.12:
Die natürlichen Abbildungen

$$\iota_1 : V_f^+ = V \longrightarrow V_f^+ \otimes_{R^+} R^\pm, \quad m \longmapsto m \otimes 1$$
$$\iota_2 : V_f^- = V \longrightarrow V_f^- \otimes_{R^-} R^\pm, \quad m \longmapsto m \otimes 1$$

sind bijektiv und $\eta = \iota_2 \circ \iota_1^{-1} : V_f^+ \otimes_{R^+} R^\pm \longrightarrow V_f^- \otimes_{R^-} R^\pm$ ist ein Isomorphismus von $R^\pm$-Moduln. Insbesondere gilt $(V_f^+, V_f^-, \eta) \in M_{\mathcal{X}}$.

Beweis. Wegen 5.0.7 und der Bijektivität von f gilt $\ker \iota_1 = \{v \in V : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 = vx^{-n} = f^{-n}(v)\} = 0$. Sei nun $\sum_{i=-n}^n a_i x^i \in R^\pm = K[x, x^{-1}, \varphi]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in K$. In 3.4.8 haben wir gesehen, dass sich jedes Element so schreiben lässt. Für $v \in V_f^+$ gilt dann in $V_f^+ \otimes_{R^+} R^\pm$

$$\begin{aligned} v \otimes \sum_{i=-n}^n a_i x^i &= f^n(f^{-n}(v)) \otimes \sum_{i=-n}^n a_i x^i = f^{-n}(v) x^n \otimes \sum_{i=-n}^n a_i x^i \\ &= f^{-n}(v) \otimes \sum_{i=-n}^n \varphi^{-n}(a_i) x^{i+n} = f^{-n}(v) \sum_{i=-n}^n \varphi^{-n}(a_i) x^{i+n} \otimes 1 \\ &= \iota_1(f^{-n}(v) \sum_{i=-n}^n \varphi^{-n}(a_i) x^{i+n}) \end{aligned}$$

und damit ist ι_1 surjektiv, denn alle Elemente von $V_f^+ \otimes_{R^+} R^\pm$ lassen sich als endliche Summe einfacher Tensoren schreiben. Wir haben somit die Bijektivität von ι_1 gezeigt. Für ι_2 geht dies analog. Da ι_1 und ι_2 additiv sind, ist auch η additiv. Sei nun $v \in V_f^+$ und $\sum_{i=-n}^n a_i x^i \in R^\pm$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \eta(v \otimes \sum_{i=-n}^n a_i x^i) &= \iota_2(f^{-n}(v)(\sum_{i=-n}^n \varphi^{-n}(a_i) x^{i+n}) = f^{-n}(v)(\sum_{i=-n}^n \varphi^{-n}(a_i) x^{i+n}) \otimes 1 \\ &= v \otimes \sum_{i=-n}^n a_i x^i = (v \otimes 1) \sum_{i=-n}^n a_i x^i = \eta(v \otimes 1) \sum_{i=-n}^n a_i x^i \end{aligned}$$

Da alle Elemente in $V_f^+ \otimes_{R^+} R^\pm$ nur endliche Summen einfacher Tensoren sind, ist η somit ein $R^\pm$-Rechtsmodulisomorphismus. □

Wir erhalten somit eine Funktor

$$\mathcal{G} : \Phi_K^{\acute{e}t} \longrightarrow M_{\mathcal{X}} \text{ via } (V, f) \longmapsto (V_f^+, V_f^-, \eta)$$

und werden nun zeigen, dass es sich tatsächlich um einen Funktor nach $\mathscr{H}$ handelt.

Proposition 4.2.13:
Für $(V, f) \in \Phi_K^{\acute{e}t}$ gilt $(V_f^+, V_f^-, \eta) \in \mathscr{H}$.

Beweis. 1) Für $(V_f^+, V_f^-, \eta) \otimes_{\mathcal{X}} B = 0$ zeigen wir $V_f^+ \otimes_{R^+} B^+ = 0$, d.h. dass es zu jedem $v \in V_f^+$ ein Element $s \in S_0^+$ gibt mit $vs = 0$. Wegen $\dim_K V < \infty$ ist $(v, vx, vx^2, ...)$ linear abhängig in V. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in K$ mit $v \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$, wobei nicht alle a_i Null sind. Setze $n_0 := \min\{0 \leq i \leq n : a_i \neq 0\}$. Dann gilt $0 = v \cdot \sum_{i=n_0}^n a_i x^i = f^{n_0}(v \sum_{i=0}^{n-n_0} a_{i+n_0} x^i)$. Mit $s := \sum_{i=0}^{n-n_0} a_{i+n_0} x^i \in S_0^+$ gilt dann $vs = 0$, da f bijektiv ist.
2) Ferner müssen wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow (V_f^+, V_f^-, \eta) \longrightarrow 0$$

mit $M_1, M_0 \in P_{\mathcal{X}}$ konstruieren. Setze hierfür $M_0 = M_1 = (V \otimes_K R^+, V \otimes_K R^-, \mathrm{can})$ mit dem kanonischen $R^\pm$-Modulisomorphismus $(V \otimes_K R^+) \otimes_{R^+} R^\pm \cong V \otimes_K R^\pm \cong (V \otimes_K R^-) \otimes_{R^-} R^\pm$. Ferner sei angemerkt, dass $V \otimes_K R^+$ und $V \otimes_K R^-$ endlich erzeugt und frei über R^+ respektive R^- vom Rang $\dim_K V$ sind. Definiere

$$M_0 = (V \otimes_K R^+, V \otimes_K R^-, \mathrm{can}) \longrightarrow (V_f^+, V_f^-, \eta)$$

durch

- $V \otimes_K R^+ \longrightarrow V_f^+$ induziert von der R^+-balancierten Multiplikationsabbildung $V \times R^+ \to V = V_f^+$ $(v, g(x)) \mapsto v \cdot g(x)$
- $V \otimes_K R^- \longrightarrow V_f^-$ induziert von der R^--balancierten Multiplikationsabbildung $V \times R^- \to V = V_f^-$ $(v, g(x^{-1})) \mapsto v \cdot g(x^{-1})$

und $M_1 = (V \otimes_K R^+, V \otimes_K R^-, \mathrm{can}) \longrightarrow (V \otimes_K R^+, V \otimes_K R^-, \mathrm{can})$ durch

- $V \otimes_K R^+ \longrightarrow V \otimes_K R^+ \quad v \otimes g(x) \longmapsto f^{-1}(v) \otimes xg(x) - v \otimes g(x)$
- $V \otimes_K R^- \longrightarrow V \otimes_K R^- \quad v \otimes g(x^{-1}) \longmapsto f(v) \otimes x^{-1}g(x^{-1}) - v \otimes g(x^{-1})$

Zeige nun die Exaktheit der beiden entstehenden Sequenzen:

$$0 \longrightarrow V \otimes_K R^+ \xrightarrow{\mu} V \otimes_K R^+ \xrightarrow{\vartheta} V_f^+ \longrightarrow 0 \tag{39}$$

$$0 \longrightarrow V \otimes_K R^- \longrightarrow V \otimes_K R^- \longrightarrow V_f^- \longrightarrow 0 \tag{40}$$

Zu $v \in V_f^+ = V$ ist $v \otimes 1$ ein Urbild von ϑ, d.h. ϑ ist surjektiv. Sei nun $\{e_1, ..., e_n\}$ eine K-Basis von V. Dann ist $\{e_1 \otimes 1, ..., e_n \otimes 1\}$ eine R^+-Basis von $V \otimes_K R^+$. Sei $A_{f^{-1}} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ die darstellende Matrix der φ^{-1}-semilinearen Abbildung f^{-1} bezüglich der K-Basis $\{e_1, ..., e_n\}$ von V, d.h. es gilt $f^{-1}(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ für $j = 1, ..., n$. Nun ist $A_{f^{-1}}x - I_n$ die darstellende Matrix von μ bezüglich der R^+-Basis $\{e_1 \otimes 1, ..., e_n \otimes 1\}$. Ferner seien $g_1, ..., g_n \in R^+$ nicht alle 0 mit $\mu(\sum_j e_j \otimes g_j) = 0$. Falls alle g_j durch x teilbar sind, etwa $g_j = g_j' x$, so gilt auch $\mu(\sum_j e_j \otimes g_j')x = 0$ und daher $\mu(\sum_j e_j \otimes g_j') = 0$, da $V \otimes_K R^+$ ein freier und somit torsionsfreier R^+-Modul ist. Wir können ohne Einschränkung $g_1(0) \neq 0$ annehmen. Indem man nun die Abbildung $V \otimes_K R^+ \to V$ $v \otimes g(x) \mapsto v \cdot g(0)$ auf $0 = \mu(\sum_j e_j \otimes g_j) = \sum_j \sum_i (a_{ij} e_i \otimes x - \delta_{ij} e_i \otimes 1) g_j$ anwendet, erhält man $0 = \sum_i = e_j g_j(0)$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\{e_1, ..., e_n\}$, da $g_1(0) \neq 0$. Also ist μ injektiv. Ferner gilt

$$\vartheta(\mu(v \otimes g(x))) = \vartheta(f^{-1}(v) \otimes xg(x) - v \otimes g(x)) = (f^{-1}(v)x - v)g(x) = 0,$$

d.h. im $\mu \subseteq \ker \vartheta$. Sei schließlich $z \in \ker \vartheta$. Nun gibt es $g_i(x) = \sum_{j=0}^{r_i} b_{ij} x^j \in R^+$ mit

$$z = \sum_{i=1}^n e_i \otimes g_i(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^r e_i b_{ij} \otimes x^j = \sum_{j=0}^r \sum_{i=1}^n e_i b_{ij} \otimes x^j,$$

wobei $r := \max\{r_1, ...r_n\}$. Es gibt also $v_j := \sum_{i=1}^n e_i b_{ij} \in V$ mit $z = \sum_{j=0}^r v_i \otimes x^i$. Also gilt $0 = \vartheta(z) = \sum_{j=0}^r f^j(v_j) \in V$ und somit $z = \sum_{j=0}^r v_j \otimes x^j - \sum_{j=0}^r f^j(v_j) \otimes 1 = \sum_{j=1}^r v_j \otimes x^j - f^j(v_j) \otimes 1$. Ferner gilt $v_j \otimes x^j - f^j(v_j) \otimes 1 = \sum_{k=1}^j f^{j-k}(v_j) \otimes x^k - f^{j-k+1}(v_j) \otimes x^{k-1} = \sum_{k=1}^j \mu(f^{j-k+1}(v_j) \otimes x^{k-1})$, d.h. $z \in \mathrm{im}\, \mu$. Wir erhalten insgesamt die Exaktheit von (39). Formal identisch beweist man die Exaktheit von (40), indem man x durch x^{-1} und f durch f^{-1} ersetzt. □

Satz 4.2.14:
Die Kategorien $\mathscr{H}$ und $\Phi_K^{\acute{e}t}$ sind äquivalent.

Beweis. Per Definition ist $(V_f^+, x) = (V, f)$. Andererseits setze $(V, f) := (M^+, x)$, falls $(M^+, M^-, \theta) \in \mathscr{H}$. Dann ist per Definition $V_f^+ = M^+$ als R^+-Modul. Insbesondere ist die Multiplikation auf M^+ bijektiv. Nach der Argumentation von Lemma 4.2.12 sind dann die natürlichen Abbildungen

$$M^+ \xrightarrow{h^+} M^+ \otimes_{R^+} R^\pm \xrightarrow{\theta} M^- \otimes_{R^+} R^\pm \xleftarrow{h^-} M^-$$

bijektiv, wobei θ ein Isomorphismus ist. Damit ist

$$(\mathrm{id}, (h^-)^{-1} \circ \theta \circ h^+) : (V_f^+, V_f^-, \eta) \longrightarrow (M^+, M^-, \theta)$$

ein Isomorphismus in $\mathscr{H}$. Beachte hierbei, dass V_f^+, V_f^- und M^+ als K-Vektorräume gleich sind. □

4.3 Die Kategorienäquivalenz von $\Phi_K^{ét}$ und $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$

Zunächst definieren wir die Kategorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ der stetigen, endlich dimensionalen $\mathbb{F}_p$-linearen Darstellungen der absoluten Galoisgruppe von K und zeigen einige nützliche Eigenschaften dieser Kategorie. Danach konstruieren wir zwei zueinander inverse (exakte) Funktoren und erhalten damit die Kategorienäquivalenz zwischen $\Phi_K^{ét}$ und $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$, die auf Fontaine zurückgeht.

Bemerkung 4.3.1 (Krull-Topologie)**:**
Eine Teilmenge U von $G_K := Gal(K^{sep}|K)$ heißt offen genau dann, wenn es für jedes $g \in U$ einen Körper $K \subseteq L \subseteq K^{sep}$ gibt, sodass einerseits $L|K$ endlich ist und anderseits $g \cdot Gal(K^{sep}|L)$ eine Teilmenge von U ist. Wir erhalten so die sogenannte Krull-Topologie:

(i) Offenbar sind $\emptyset$ und G_K offen

(ii) Sei I eine Indexmenge und $(U_i)_{i\in I}$ eine Famile von offenen Mengen in G_K. Dann gibt es für alle $g \in \cup_{i\in I} U_i$ einen Index $i \in I$, sodass $g \in U_i$ liegt. Es gibt damit einen Körper $K \subseteq L \subseteq K^{sep}$, sodass einerseits $L|K$ endlich ist und anderseits $g \cdot Gal(K^{sep}|L)$ eine Teilmenge von $U_i \subseteq \cup_{i\in I} U_i$ ist. Damit ist die Vereinigung offener Mengen selbst offen.

(iii) Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine Famile von offenen Mengen in G_K, wobei I endlich ist. Dann gibt es für jedes $g \in \cap_{i\in I} U_i$ einen Körper $K \subseteq L_i \subseteq K^{sep}$, sodass $L_i|K$ endlich ist und anderseits $g \cdot Gal(K^{sep}|L_i)$ eine Teilmenge von U_i ist. Damit liegt auch das Kompositum der Körper L_i, $i \in I$, zwischen K und K^{sep} und $L|K$ ist endlich. Ferner gilt $g \cdot Gal(K^{sep}|L) \subseteq g \cdot Gal(K^{sep}|L_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in I$ und somit auch $g \cdot Gal(K^{sep}|L) \subseteq \cap_{i\in I} U_i$. Damit ist $\cap_{i\in I} U_i$ offen.

Definition 4.3.2: *(i) Eine stetige $\mathbb{F}_p$-Darstellung von G_K ist ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum V mit einer Abbildung $* : G_K \times V \to V$, welche den folgenden Anforderungen genügt:*

(a) Für alle $g \in G_K$ ist die Abbildung $(v \mapsto g * v) : V \to V$ $\mathbb{F}_p$-linear.

(b) Für alle $v \in V$ gilt $1_G * v = v$

(c) Für alle $g, h \in G$ und für alle $v \in V$ gilt $g * (h * v) = (gh) * v$

(d) Die Abbildung $G_K \times V \to V$ ist stetig für die Krulltopologie auf G_K, die diskrete Topologie auf V und die Produkttopologie links.

(ii) Seien V_1, V_2 stetige $\mathbb{F}_p$-Darstellungen von G_K. Eine $\mathbb{F}_p$-lineare Abbildung heißt $G_K-Homomorphismus$, falls für alle $g \in G_K$ und alle $v \in V_1$ $f(g * v) = g * f(v)$ gilt.

(iii) $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$ bezeichnet die Kategorie der endlich dimensionalen stetigen $\mathbb{F}_p$-Darstellungen von V mit G_K-Homomorphismen

Proposition 4.3.3:
Die Eigenschaft (d) in 4.3.2 ist äquivalent zu der Eigenschaft:
(d') Für alle $v \in V$ ist $C(v) := \{g \in G_K : gv = v\}$ offen bezüglich der Krull Topologie auf G_K.

Beweis. „⇒“: Sei $\pi : G_K \times V \to V$ die stetige Projektion. Für alle $v \in V$ ist die Teilmenge $\{v\} \subseteq V$ offen bezüglich der diskreten Topologie. Damit und mit der Stetigkeit von $*$ sind auch die Urbilder $\pi^{-1}(\{v\}) = G_K \times \{v\}$ und $*^{-1}(\{v\}) = \{(g, w) \in G_K \times V : g * w = v\}$ offen. Nun ist der Schnitt dieser beiden Mengen offen. Dieser ist gerade $C(v) \times \{v\}$ und somit ist auch $C(v)$ offen.
„⇐“: Da V mit der diskreten Topologie ausgestattet ist, genügt es zu zeigen, dass für alle v aus V das Urbild unter $*$ selbst wieder offen ist. Für das Urbild haben wir dabei die folgende Identität:

$$*^{-1}(\{v\}) = \{(g, w) \in G_K \times V : g * w = v\} = \bigcup_{w\in V} \{g \in G_K : gw = v\} \times \{w\}$$

Folglich genügt es zu zeigen, dass für alle $w \in V$ die Menge $B(w) := \{g \in G_K : gw = v\}$ offen ist bezüglich der Krull Topologie. Für $g \in B(w)$ ist $gC(w)$ eine offene Umgebung von g in G_K. Jedes Element in $gC(w)$ hat die Form gh mit $h \in C(w)$. Damit gilt $(gh)(w) = g(hw) = gw = v$. Zusammen mit g ist somit die ganze offene Umgebung $gC(w)$ in $B(w)$ enthalten und deshalb ist $B(w)$ offen für alle $w \in V$. □

Bemerkung 4.3.4:
Im folgenden schreiben wir anstelle von $g * v$ einfach nur gv für alle $g \in G_K$ und für ein v aus einer stetigen $\mathbb{F}_p$-Darstellung.

Lemma 4.3.5:
Ist $V \in Rep^{cont}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$, so ist V eine $\mathbb{F}_p$-Darstellung einer endlichen Galoisgruppe $Gal(K'|K)$.

Beweis. Wir verwenden die Notation aus dem vorigen Beweis: Sei $\{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis von V und sei U definiert als der Schnitt aller $C(v_i)$ für $i = 1, ..., n$. U ist eine offene Untergruppe von G_K und es gibt eine endlich galoissche Körperweiterung $K'|K$ mit $\mathrm{Gal}(K^{sep}|K') = U$ nämlich $K' := (K^{sep})^U$. Ferner sei an die Isomorphie $\mathrm{Gal}(K'|K) \cong G_K/\mathrm{Gal}(K^{sep}|K')$ erinnert. Nun faktorisiert die Darstellung wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
G_K \times V \arrow[r] \arrow[d, "proj \times \mathrm{id}_V"'] & V \\
\mathrm{Gal}(K'|K) \times V \arrow[ur, dotted, "(g\mathrm{Gal}(K^{sep}|K'), v) \mapsto gv"'] &
\end{tikzcd}$$

und ist somit eine $\mathbb{F}_p$-Darstellung der endlichen Gruppe $\mathrm{Gal}(K'|K)$. □

Wir beginnen nun mit der Konstruktion eines exakten Funktors

$$\mathbb{D} : \mathrm{Rep}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{F}_p}(G_K) \to \Phi^{ét}_K$$

Sei $V \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ beliebig. Dann agiert G_K auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ via $\sigma \otimes \sigma$ für alle $\sigma \in G_K$. Wir definieren $\mathbb{D}$ nun durch

$$\mathbb{D}(V) := (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{G_K} = \{m \in K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V | \forall \sigma \in G_K : \sigma(m) = m\}$$

Bemerkung 4.3.6: *(i) Nach 5.0.15 ist $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ ein K^{sep}-Vektorraum und via $K \subseteq K^{sep}$ auch ein K-Vektorraum. Wegen $K = (K^{sep})^{G_K}$ ist die G_K-Aktion auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ K-linear, denn für $\alpha \in K, \beta \in K^{sep}, \sigma \in G_K$ und $v \in V$ gilt stets:*

$$\sigma(\alpha(\beta \otimes v)) = \sigma(\alpha\beta \otimes v) = \sigma(\alpha\beta) \otimes \sigma(v) = \sigma(\alpha)\sigma(\beta) \otimes \sigma(v) = \alpha\sigma(\beta) \otimes \sigma(v) = \alpha \cdot \sigma(\beta \otimes v)$$

und damit ist $\mathbb{D}(V) \subseteq K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ ein K-Untervektorraum.

(ii) Der Frobeniusendomorphismus φ von K^{sep} kommutiert mit jedem Element $\sigma \in G_K$. In der Tat gilt für $x \in K^{sep}$ gilt $\sigma(\varphi(x)) = \sigma(x^p) = \sigma(x)^p = \varphi(\sigma(x))$, da σ multiplikativ ist.

(iii) Betrachte den Gruppenhomomorphismus $\varphi \otimes id_V : K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \longrightarrow K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Dieser schränkt sich wegen (ii) zu einem Gruppenhomomorphismus $f := f_{\mathbb{D}(v)} := (\varphi \otimes id_V)_{|_{\mathbb{D}(V)}} : \mathbb{D}(V) \to \mathbb{D}(V)$ ein. Ist nämlich $m = \sum_i \beta_i \otimes v_i \in \mathbb{D}(v)$ und $\sigma \in G_K$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sigma f(m) = \sigma(\varphi \otimes id_V(m)) = \sigma(\sum_i \varphi(\beta_i) \otimes v_i) = \sum_i \sigma(\varphi(\beta_i)) \otimes \sigma(v_i) &\overset{(ii)}{=} \sum_i \varphi(\sigma(\beta_i)) \otimes \sigma(v_i) \\
= (\varphi \otimes id_V)(\sum_i \sigma(\beta_i) \otimes \sigma(v_i)) = (\varphi \otimes id_V)(\sigma(m)) &= f(\sigma(m)) = f(m),
\end{aligned}$$

d.h. $f(m) \in \mathbb{D}(V)$. Ferner ist f sogar φ-semilinear. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
f(\alpha m) = (\varphi \otimes id_V)(\alpha \sum_i \beta_i \otimes v_i) &= \varphi \otimes id_V(\sum_i \alpha\beta_i \otimes v_i) = \sum_i \varphi(\alpha\beta_i) \otimes v_i \\
&= \varphi(\alpha) \sum_i \varphi(\beta_i) \otimes v_i = \varphi(\alpha)(\varphi \otimes id_V)(m) = \varphi(\alpha) f(m)
\end{aligned}$$

für $\alpha \in K$ und $m = \sum_i \beta_i \otimes v_i \in \mathbb{D}(V)$ beliebig.

Insgesamt haben wir bis jetzt gezeigt, dass für ein V aus $\mathrm{Rep}^{\mathrm{cont}}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ das Tupel $(\mathbb{D}(V), f)$ einen φ-Modul über K bildet. Wir müssen noch zeigen, dass dieser étale ist. Ferner müssen wir noch zeigen, dass $\mathbb{D}$ exakt ist.

Proposition 4.3.7: *(i) Sei $V \in Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$. Dann ist die natürliche K^{sep}-lineare Abbildung $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ ein G_K-Isomorphismus von φ-Moduln über K^{sep}.*

(ii) $\dim_K \mathbb{D}(V) < \infty$

(iii) Sei $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{g} V \xrightarrow{h} V'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz in $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$. Dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(V') \xrightarrow{id_{K^{sep}}\otimes g} \mathbb{D}(V) \xrightarrow{id_{K^{sep}}\otimes h} \mathbb{D}(V'') \longrightarrow 0$$

eine exakte und wohldefinierte Sequenz von φ-Moduln über K. Wohldefiniertheit bedeutet hier, dass sich die Abbildung $id_{K^{sep}} \otimes g : K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V' \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ zu einer Abbildung $\mathbb{D}(V') \to \mathbb{D}(V)$ einschränkt.

Beweis. Wir konstruieren zunächst die Abbildung $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Nach 5.0.15 ist $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ ein K^{sep}-Modul und $\mathbb{D}(V) = (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{G_K} \subseteq K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ ein K-Untermodul. Die Skalarmultiplikation $K^{sep} \times (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V) \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ schränkt sich zu einer K-balancierten Abbildung $K^{sep} \times \mathbb{D}(V) \to K^{sep} \otimes_K V$ ein. Diese induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \longrightarrow K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \quad \beta \otimes (\sum_i \alpha_i \otimes v_i) \longmapsto \sum_i \beta\alpha_i \otimes v_i,$$

welcher für die in 5.0.15 erklärte Modulstruktur auf beiden Seiten K^{sep}-linear ist. Außerdem haben wir auf beiden Seiten einerseits eine φ-Modul Struktur über K^{sep}:

- auf $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V)$ via $\varphi \otimes f_{\mathbb{D}(V)}$
- auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ via $\varphi \otimes \mathrm{id}_V$

und anderseits eine G_K-Aktion:

- auf $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V)$ via $\sigma \otimes \mathrm{id}_V$
- auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ via $\sigma \otimes \sigma$

für alle $\sigma \in G_K$. Der obige Gruppenhomomorphismus kommutiert mit diesen Strukturen. Seien dazu $\beta \in K^{sep}$ und $\sum_i \alpha_i \otimes v_i \in \mathbb{D}(V)$ beliebig. Dann gilt sowohl

$$\begin{aligned}\varphi \otimes f_{\mathbb{D}(V)}(\beta \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i) &= \varphi(\beta) \otimes f_{\mathbb{D}(V)}(\sum_i \alpha_i \otimes v_i) = \varphi(\beta) \otimes \sum_i \varphi(\alpha_i) \otimes v_i \\ &\mapsto \sum \varphi(\beta)\varphi(\alpha_i) \otimes v_i = \varphi \otimes \mathrm{id}_V(\sum_i \beta\alpha_i \otimes v_i)\end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}\sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{D}(V)}(\beta \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i) &= \sigma(\beta) \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i = \sigma(\beta) \otimes \sum_i \sigma(\alpha_i) \otimes \sigma(v_i) \\ &\mapsto \sum_i \sigma(\beta)\sigma(\alpha_i) \otimes \sigma(v_i) = (\sigma \otimes \sigma)(\sum_i \beta\alpha_i \otimes v_i),\end{aligned}$$

da $\sigma \in G_K$ trivial auf $\mathbb{D}(V)$ operiert.

Wegen 4.3.5 gibt es eine endliche galoissche Körpererweiterung $K'|K$, sodass die G_K-Aktion auf V durch $G_K/G_{K'} \cong \mathrm{Gal}(K'|K)$ faktorisiert, in dem Sinne, dass die Untergruppe $G_{K'} < G_K$ trivial auf V agiert. Setze $G := G_K$ und bemerke $(K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V) \cong (K^{sep} \oplus ... \oplus K^{sep})^{G_{K'}} = K' \oplus ... \oplus K' \cong K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Die Isomorphismen hierbei sind G-Isomorphismen von φ-Moduln. Nun gilt $\mathbb{D}(V) = (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^G = ((K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{G_{K'}})^G = (K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^G$ und es genügt zu zeigen, dass die K'-lineare Abbildung $K' \otimes_K (K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^G \to K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ bijektiv ist. Falls dies der Fall ist können wir $K^{sep} \otimes_{K'} (\cdot)$ anwenden und erhalten eine bijektive Abbildung $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Dies ist die Abbildung dessen Bijektivität in (i) gefordert ist.

Wir erreichen dies durch „Galois Abstieg für Vektorräume“. Sei $\{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ eine K-Basis von K' und schreibe $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_d\}$. In dem K'-Vektorraum $\mathrm{End}_K(K')$ von K-linearen Abbildungen $K' \to K'$ ist die Menge G nach Dedekinds Lemma linear unabhängig. Wir zeigen, dass daher die Matrix $(\sigma_j(\lambda_i))_{1\le i,j\le d}$ über K'

invertierbar ist. Andernfalls wären die Spalten linear abhängig über K'. Also gäbe es $a_1, ..., a_d \in K'$ nicht alle Null, sodass für alle $i \in \{1, ...d\}$ gilt: $\sum_{j=1}^{d} a_j \sigma_j(\lambda_i) = 0. Es folgt, dass \Rightarrow \sum_{j=1}^{d} a_j \sigma_j \in \mathrm{End}_K(K')$ auf der K-Basis $\{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ Null ist. Somit handelt es sich um die Nullabbildung. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von G.

Für $w \in K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ und für alle $i \in \{1, ..., d\}$ definiere $w_i := \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(\lambda_i w) \in K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$. Das Element w_i liegt in $(K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^G = \mathbb{D}(V)$, denn Anwenden von σ permutiert die Summanden. Sei nun $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ die inverse Matrix zu $(\sigma_j(\lambda_i))_{1 \leq i,j \leq d}$ (über K'). Direktes Nachrechnen liefert dann $\sigma_i(w) = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} w_j$. Im Fall $\sigma_i = 1_G$ also $w = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} w_j$. Dies ist das Bild von $\sum_j a_{ij} \otimes w_j \in K' \otimes_K \mathbb{D}(V)$ und somit ist die Abbildung $K' \otimes_K (K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^G \to K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ surjektiv.

Da diese Abbildung K'-linear ist, genügt es für die Injektivität zu zeigen, dass eine geeignete K'-Basis von $K' \otimes_K \mathbb{D}(V)$ auf eine linear unabhängige Familie in $K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ abgebildet wird. Sei $(v_i)_i$ eine K-Basis von $\mathbb{D}(V)$. Da das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert, ist $(1 \otimes v_i)_i$ eine K'-Basis von $K' \otimes_K \mathbb{D}(V)$. Wir zeigen nun, dass die Bilder von $(v_i)_i$ linear unabhängig über K' (in $K' \otimes_{\mathbb{F}_p} V$) sind. Angenommen dies ist nicht der Fall. Wir wählen dann eine Abhängigkeitsrelation

$$0 = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \tag{41}$$

über K' von minimaler Länge r. Die Minimalität liefert $a_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$ und $r \geq 2$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 = 1$. Da $(v_i)_i$ linear unabhängig über K ist, gibt es ein $a_i \notin K$ für ein $i \in \{1, ..., r\}$. Sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_2 \in K' \setminus K$. Wegen $K = (K')^G$ gibt es ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(a_2) \neq a_2$. Wegen $v_i \in \mathbb{D}(V)$ gilt nun

$$0 = \sigma(0) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(a_i)\sigma(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(a_i) v_i = v_1 + \sum_{i=2}^{r} \sigma(a_i) v_i \tag{42}$$

Subtraktion von (41) und (42) liefert $\sum_{i=2}^{r} (a_i - \sigma(a_i) v_i) = 0$ mit $a_2 - \sigma(a_2) \neq 0$. Dies steht im Widerspruch zur Minimalität von r und wir haben somit die Injektivität – und insgesamt die Bijektivität – der Abbildung $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \to K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ aus (i). Da das Tensorprodukt und direkte Summen vertauschbar sind erhalten wir somit (ii):

$$\dim_K \mathbb{D}(V) = \dim_{K^{sep}}(K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V)) \overset{(i)}{=} \dim_{K^{sep}}(K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V) = \dim_{\mathbb{F}_p} V < \infty$$

.
Bleibt noch (iii) zu zeigen. Da K^{sep} ein freier $\mathbb{F}_p$-Modul ist und daher flach, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V' \overset{\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes g}{\longrightarrow} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \overset{\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes h}{\longrightarrow} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V'' \longrightarrow 0$$

weiterhin exakt. Dabei lässt sich $\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes g$ zu $\mathbb{D}(V') \to \mathbb{D}(V)$ und $\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes h$ zu $\mathbb{D}(V) \to \mathbb{D}/V'')$ einschränken. Sei dazu $\alpha \otimes v \in \mathbb{D}(V)$. Dann gilt

$$(\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes g)(\alpha \otimes v) = (\mathrm{id}_{K^{sep}} \otimes g)(\sigma(\alpha) \otimes \sigma(v)) = \sigma(\alpha) \otimes g(\sigma(v)) = \sigma(\alpha) \otimes \sigma(g(v)) = \alpha \otimes g(v) \in \mathbb{D}(V')$$

Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V' \arrow[r] & K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \arrow[r] & K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V') \arrow[r] \arrow[u] & K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \arrow[r] \arrow[u] & K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V'') \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

in dem die obere Zeile exakt ist. Da die senkrechten Pfeile Isomorphismen sind, ist auch die untere Zeile exakt. Da K^{sep} ein freier und damit volltreuer K-Modul ist, folgt die Exaktheit der Sequenz $0 \to \mathbb{D}(V') \to \mathbb{D}(V) \to \mathbb{D}(V'') \to 0$ (vgl. [Lam, 1999], Example 4.72 (3)). $\square$

Korollar 4.3.8:
Sei $V \in Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$. Dann ist der φ-Modul $(\mathbb{D}(V), f_{\mathbb{D}(V)}) = ((K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{G_K}, \varphi \otimes id_V)$ über K étale.

Beweis. Wegen $\dim_K(K \otimes_{K,\varphi} \mathbb{D}(V)) = \dim_K(\mathbb{D}(V)) = \dim_{\mathbb{F}_p} V < \infty$die Surjektivität der Linearisierung $(f_{\mathbb{D}(V)})_K : K \otimes_{K,\varphi} \mathbb{D}(V) \to \mathbb{D}(V)$ zu zeigen. Wegen 5.0.17 genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$(s \otimes m \longmapsto s \otimes f_{\mathbb{D}(V)}(m)) : K^{sep} \otimes_{K,\varphi} \mathbb{D}(V) \longrightarrow K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V),$$

welche wir durch Anwenden von $K^{sep} \otimes_K (\cdot)$ auf $(f_{\mathbb{D}(V)})_K$ erhalten, surjektiv ist. Nach 4.3.7 ist aber der φ-Modul $K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V) \cong K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ über K^{sep} bezüglich $\varphi \otimes \mathrm{id}_V$ eine endliche direkte Summe von Kopien des φ-Moduls (K^{sep}, φ). Dieser ist aber étale, da die Abbildung $K^{sep} \otimes_{K^{sep},\varphi} K^{sep} \to K^{sep}$, $s \otimes r \mapsto \varphi(s)r$, surjektiv ist. □

Umgekehrt konstruieren wir jetzt einen exakten Funktor

$$\mathbb{V} : \Phi_K^{ét} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$$

und müssen zeigen, dass $\mathbb{V}$ und $\mathbb{D}$ invers zueinander sind. Sei dazu $(M, f) \in \Phi_K^{ét}$ beliebig. Dann bildet die Abbildung

$$K \times M \xrightarrow{\varphi \times f} K^{sep} \times M \xrightarrow{can} K^{sep} \otimes_K M$$

das Tupel (s, m) auf $\varphi(s) \otimes f(m)$ ab und ist offenbar K-balanciert. Somit wird ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi \otimes f : K^{sep} \otimes_K M \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M$$

induziert, welcher der Abbildungsvorschrift $s \otimes m \mapsto \varphi(s) \otimes f(m)$ genügt. Diese Abbildung ist sogar φ-semilinear. Seien dazu $\lambda \in K^{sep}$ und $s \otimes m \in K^{sep} \otimes_K M$ beliebig. Dann gilt

$$(\varphi \otimes f)(\lambda(s \otimes m)) = (\varphi \otimes f)(\lambda s \otimes m) = \varphi(\lambda s) \otimes f(m) = \varphi(\lambda)(\varphi \otimes f)(s \otimes m),$$

d.h. $\varphi \otimes f$ ist φ-semilinear. Somit ist $K^{sep} \otimes_K M$ ein φ-Modul über K^{sep}. Wir setzen nun

$$\mathbb{V}(M) := (K^{sep} \otimes_K M)^{\varphi=1} := \{x \in K^{sep} \otimes_K M : (\varphi \otimes f)(x) = x\}$$

und gehen nun ähnlich zur Konstruktion von $\mathbb{D}$ vor.

Bemerkung 4.3.9: *(i) $K^{sep} \otimes_K M$ ist ein K^{sep}-Vektorraum und somit via $\mathbb{F}_p \subseteq K^{sep}$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Damit ist $\mathbb{V}(M)$ ein $\mathbb{F}_p$-Untervektorraum von $K^{sep} \otimes_K M$, denn einerseits ist wegen der Additivität von $\varphi \otimes f$ offenbar $(\mathbb{V}(M), +)$ eine Untergruppe von $(K^{sep} \otimes_K M, +)$. Anderseits gilt*

$$(\varphi \otimes f)(\alpha \sum_i s_i \otimes m_i) = (\varphi \otimes f)(\sum_i \alpha s_i \otimes m_i) = \sum_i \varphi(\alpha)\varphi(s_i) \otimes f(m_i) = \alpha(\varphi \otimes f)(\sum_i s_i \otimes m_i)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{F}_p$ und für alle $\sum_i s_i \otimes m_i \in K^{sep} \otimes_K M$, da $\varphi(\alpha) = \alpha$ gilt. Somit gilt $\alpha \sum_i s_i \otimes m_i \in \mathbb{V}(M)$.

(ii) Wegen $K = (K^{sep})^{G_K}$ agiert G_K auf $K^{sep} \otimes_K M$ via $\sigma \otimes id_M$ für alle $\sigma \in G_K$. Ferner kommutiert der Frobenius-Automorphismus mit beliebige Automorphismen über K^{sep}, sodass sich die G_K-Aktion auf $K^{sep} \otimes_K M$ zu einer Aktion auf $\mathbb{V}(M) = (K^{sep} \otimes_K M)^{\varphi=1}$ einschränken lässt durch die $\mathbb{F}_p$-linearen Automorphismen $\sigma \otimes id_M$, $\sigma \in G_K$.

Proposition 4.3.10: *(i) Sei $(M, f) \in \Phi_K^{ét}$. Dann ist die natürliche K^{sep}-linare Abbildung $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \to K^{sep} \otimes_K M$ ein G_K-Isomorphismus von φ-Moduln über K^{sep}.*

(ii) Der unterliegende $\mathbb{F}_p$-Vektorraum von $\mathbb{V}(M)$ ist endlich erzeugt.

(iii) Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{F} M \xrightarrow{G} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in $\Phi_K^{ét}$. Dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{V}(M') \xrightarrow{id_{K^{sep}} \otimes F} \mathbb{V}(M) \xrightarrow{id_{K^{sep}} \otimes G} \mathbb{V}(M'') \longrightarrow 0$$

in $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$ exakt.

Beweis. Die Konstruktion der Abbildung aus (i) geht ähnlich wie in 4.3.7. Explizit haben wir eine Abbildung

$$(\alpha \otimes z \longmapsto \alpha z) : K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M,$$

denn $K^{sep} \otimes_K M$ ist ein K^{sep}-Vektorraum und $\mathbb{V}(M)$ ist ein $\mathbb{F}_p$-Untervektorraum. Außerdem haben wir auf beiden Seiten einerseits eine φ-Modul Struktur:

- auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M)$ via $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{V}(M)}$
- auf $K^{sep} \otimes_K M$ via $\varphi \otimes f$

und anderseits eine G_K-Aktion:

- auf $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M)$ via $\sigma \otimes \sigma$
- auf $K^{sep} \otimes_K M$ via $\sigma \otimes \mathrm{id}_M$

für alle $\sigma \in G_K$. Die Abbildung $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M$ kommutiert dabei mit diesen Strukturen. In der Tat gilt sowohl

$$\begin{aligned}\sigma(\beta \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i) = \sigma(\beta) \otimes \sigma(\sum_i \alpha_i \otimes v_i) &= \sigma(\beta) \otimes \sum_i \sigma(\alpha_i) \otimes v_i \\ &\mapsto \sum_i \sigma(\beta\alpha_i) \otimes v_i = (\sigma \otimes \mathrm{id}_M)(\sum_i \beta\alpha_i \otimes v_i)\end{aligned}$$

als auch

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{V}(M)}(\beta \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i) = \varphi(\beta) \otimes \sum_i \alpha_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i \varphi(\beta)\alpha_i \otimes v_i \\ &= \varphi(\beta) \sum_i \alpha_i \otimes v_i = (\varphi \otimes f)(\sum_i \beta\alpha_i \otimes v_i)\end{aligned}$$

für alle $\beta \in K^{sep}$ und für alle $\sum_i \alpha_i \otimes v_i \in \mathbb{V}(M)$. Es sei daran erinnert, dass M ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit $pM = 0$ ist. Wir müssen die Bijektivität der natürlichen Abbildung

$$K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} (K^{sep} \otimes_K M)^{\varphi=1} \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M$$

zeigen. Allgemeiner werden wir für einen étalen φ-Modul (N, g) (über K^{sep}) zeigen, dass die Abbildung $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} \to N$ bijektiv ist. Hierbei ist $N^{\varphi=1} := \{x \in N : g(x) = x\}$ und φ bezeichnet hier den Frobenius Automorphismus über K^{sep}. Zunächst sei noch angemerkt, dass $K^{sep} \otimes_K M$ ein φ-Modul via $\varphi \otimes f$ ist. Dieser ist sogar étale. Sei hierfür $(m_1, ..., m_d)$ eine K-Basis von M. Dann ist $(1 \otimes m_1, ..., 1 \otimes m_d)$ eine K^{sep}-Basis von $K^{sep} \otimes_K M$. Damit haben f auf M und $\varphi \otimes f$ auf $K^{sep} \otimes_K M$ dieselbe Darstellungsmatrix in $K^{d\times d} \subseteq (K^{sep})^{d\times d}$. Da f étale ist, ist f bijektiv und somit ist diese Matrix invertierbar. Dann ist auch $\varphi \otimes f$ bijektiv und somit ebenfalls étale.

1. Schritt $N \neq 0 \Rightarrow N^{\varphi=1} \neq 0$: Wähle $v \in N \setminus \{0\}$ und setze $v_i := g^i(v)$. Definiere nun $m := \min\{j \geq 1 : v_0, ..., v_j$ sind linear abhängig über $K^{sep}\}$. Dann gibt es $a_0, ..., a_m \in K^{sep}$ nicht alle Null mit $\sum_{i=0}^m a_i v_i = 0$. Die Minimalität von m liefert sofort $a_m \neq 0$. Sei nun (N, g) étale über K^{sep}. Zusammen mit der Injektivität von φ über K^{sep} erhalten wir die Injektivität von g. Man betrachtet hierfür eine K^{sep}-Basis $n_1, ..., n_d$ von N. Dann ist acuh $g(n_1), ..., g(n_d)$ eine K^{sep}-Basis von N als Bild der K^{sep}-Basis $1 \otimes n_1, ..., 1 \otimes n_d$ von $K^{sep} \otimes_{K^{sep},\varphi} N$ unter den Isomorphismus $g_{K^{sep}}$. Sei $g(n) = 0$. Dann gibt es $\lambda_i \in K^{sep}$ mit $n = \sum_{i=1}^d \lambda_i n_i$. Nun gilt $\sum_{i=1}^d \varphi(\lambda_i) g(n_i) = 0$. Wegen der Injektivtät von φ und der linearen Unabähnigkeit von $g(n_1), ..., g(n_d)$ muss dann jedes $\lambda_i = 0$ sein. Zusammen mit $v_0, ..., v_{m-1}$ sind auch $g(v_0) = v_1, ..., g(v_{m-1}) = v_m$ linear unabhängig über K^{sep} (als Bilder von linear unabhängigen Vektoren $1 \otimes v_0, ..., 1 \otimes v_{m-1} \in K^{sep} \otimes_{K^{sep},\varphi} N$ unter den K^{sep}-linearen Isomorphismus $g_{K^{sep}} : K^{sep} \otimes_{K^{sep},\varphi} N \to N$). Damit ist auch a_0 von Null verschieden. Für $c_0, ..., c_{m-1} \in K^{sep}$ betrachte $v := \sum_{i=0}^{m-1} c_i v_i$. Anwenden von g liefert dann $g(v) = \sum_{i=0}^{m-1} = c_i^p v_{i+1}$. Setzen wir $c_{-1} := c_m := 0$, so erhalten wir

$$v - g(v) = \sum_{i=0}^{m} (c_i - c_{i-1}^p) v_i \tag{43}$$

Das Polynom $a_0^{p^m} x^{p^m} + a_1^{p^{m-1}} x^{p^{m-1}} + ... + a_m x \in K^{sep}[x]$ ist seperabel, denn a_m ist von Null verschieden, und hat somit eine Wurzel $y \in K^{sep} \setminus \{0\}$. Wähle nun $c_i := \sum_{j=0}^{i} a_j^{p^{i-j}} y^{p^{i-j}}$, $0 \leq i \leq m-1$, in der Definition von v. Da y und a_0 von Null verschieden sind, ist auch $c_0 = a_0 y$ von Null verschieden. Damit ist $v \neq 0$, denn $v_0, ..., v_{m-1}$ sind linear unabhängig. Per Konstrukton gilt $c_{i-1}^p = c_i - a_i y$ für alle $0 \leq i \leq m$. Dann liefert (43) unmittelbar

$$v - g(v) = \sum_{i=0}^{m} a_i y v_i = y \sum_{i=0}^{m} a_i v_i = 0$$

und damit liegt v in $N^{\varphi=1} \setminus \{0\}$.

2. Schritt $\dim_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} \leq \dim_{K^{sep}} N$: Seien $u_1, ..., u_r \in N^{\varphi=1}$ linear unabhängig über $\mathbb{F}_p$ und linear abhängig über K^{sep} als Elemente von N. Wähle dabei r minimal, sodass es $b_1, ..., b_r \in K^{sep}$ gibt mit $\sum_{i=1}^{r} b_i u_i = 0$ in N. Die Minimalität liefert $b_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, ..., r\}$ und $r \geq 2$. Durch Multiplikation mit b_1^{-1} können wir $b_1 = 1$ annehmen. Dann gilt

$$0 = g(0) = \sum_{i=2}^{r} b_i^p g(u_i) \overset{u_i \in N^{\varphi=1}}{=} \sum_{i=1}^{r} b_i^p u_i$$

und Subtraktion liefert dann

$$\sum_{i=2}^{r} (b_i^p - b_i) u_i = 0,$$

wegen ($b_1 = 1 = 1^p$). Die Minimalität wiederum liefert somit $b_i^p = b_i$ für $2 \leq i \leq r$ und somit liegen $b_1 = 1, b_2, ..., b_r$ in $\mathbb{F}_p$. Dies steht im Widerspruch zur linearen Unabhängikeit der $u_1, ..., u_r$ über $\mathbb{F}_p$. Also gilt $\dim_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} \leq \dim_{K^{sep}} N$. Allgemeiner haben wir damit die Injektivität der K^{sep}-linearen Abbildung $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} \to N$ gezeigt, denn für die $\mathbb{F}_p$-Basis $u_1, ..., u_r$ von $N^{\varphi=1}$ ist $1 \otimes u_1, ..., 1 \otimes u_r$ eine K^{sep}-Basis von $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1}$, welche auf $u_1, ..., u_r$ abgebildet wird und linear unabhängig über K^{sep} ist.

3. Schritt $\dim_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} = \dim_{K^{sep}} N$: Beweis per Induktion über $d := \dim_{K^{sep}} N \geq 1$. Sei zunächst $d = 1$. Dann liefert der erste Schritt $N^{\varphi=1} \neq 0$. Somit liefert der zweite Schritt

$$\dim_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} \geq 1 = \dim_{K^{sep}} N \geq \dim_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1} (= \dim_{K^{sep}} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} N^{\varphi=1})$$

und somit die gewünschte Identität.
Induktionsschritt $d - 1 \to d$: Wir können, wegen dem ersten Schritt, ein $v_1 \in \mathbb{N}^{\varphi=1} \setminus \{0\}$ wählen. Definiere nun $N' := N/K^{sep} v_1$. Es gilt $g(v_1) = v_1$, sodass $(K^{sep} v_1, g_{|K^{sep} v_1})$ ein wohldefinierter φ-Modul über K^{sep} ist und auch (N', g') mit $g'(v + K^{sep} v_1) := g(v) + K^{sep} v_1$. Beide sind sogar étale. Um dies zu sehen benötigen wir noch das folgende Lemma:

Lemma 4.3.11:
Sei F ein Körper und ψ ein Endomorphismus über F. Ferner sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von ψ-Moduln über F. Nun ist M genau dann étale, wenn M' und M'' étale sind.

Beweis. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \otimes_{F,\psi} M' \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_{F,\psi} M \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_{F,\psi} M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Per Voraussetzung ist die untere Zeile exakt. Die obere Zeile ist exakt, da F ein Körper und daher als ψ-Modul frei und insbesondere flach ist. Ist M étale, so ist der rechte vertikale Pfeil surjektiv. Dabei haben der Ausgangsraum und der Zielraum dieselbe Dimension über F, sodass der rechte Pfeil sogar ein Isomorphismus ist. Analog ist der linke vertikale Pfeil injektiv und somit bijektiv. Sind nun M' und M'' étale, so sind die äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Eine einfache Diagrammjagd liefert dann die Bijektivität des mittleren vertikalen Pfeils. $\square$

Wenden wir uns nun wieder dem Beweis von 4.3.10 zu. Wir wenden nun das Lemma auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K^{sep}v_1 \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

von φ-Moduln über K^{sep} an. Die K^{sep}-Dimension von N' ist $d-1$, sodass per Induktionsvoraussetzung $\dim_{\mathbb{F}_p}(N')^{\varphi=1} = d-1$ gilt. Wähle nun eine $\mathbb{F}_p$-Basis $\overline{v}_2, ...\overline{v}_d$ von $(N')^{\varphi=1}$. Der Beweis des zweiten Schrittes und die Induktionsannahme liefern dann, dass $\overline{v}_2, ...\overline{v}_d$ eine K^{sep}-Basis von N' ist. Schreibe nun $\overline{v}_i = v_i' + K^{sep}v_1$ mit $v_i' \in N$. Die Familie $v_1, v_2', ..., v_d'$ bildet eine K^{sep}-Basis von N. $\overline{v}_i \in (N')^{\varphi=1}$ bedeutet, dass es ein $a_i \in K^{sep}$ gibt mit $g(v_i') - v_i' = a_i v_1$. Sei nun c_i eine Wurzel des separablen Polynoms $x^p - x + a_i \in K^{sep}[x]$. Für $2 \leq i \leq d$ setze $v_i := v_i' + c_i v_1$. Dann ist $v_1, v_2, ..., v_d$ weiterhin eine K^{sep}-Basis von N mit $g(v_1) = v_1$ und

$$g(v_i) = g(v_i') + c_i^p g(v_1) = g(v_i') + c_i^p v_1 = v_i' + a_i v_1 + c_i^p v_1 = v_i' + c_i v_1 = v_i$$

für $2 \leq i \leq d$, d.h. $v_1, ..., v_d$ liegen in $N^{\varphi=1}$. Damit haben wir (i) gezeigt. Ferner erhalten wir

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) = \dim_{K^{sep}} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \stackrel{i}{=} \dim_{K^{sep}} K^{sep} \otimes_K M = \dim_K M < \infty, d.h$$

$\mathbb{V}(M)$ ist endlich erzeugt als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Und somit haben wir (ii) gezeigt.
Sei nun die Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von Objekten aus $\Phi_K^{ét}$ exakt. Dann ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M' \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M \longrightarrow K^{sep} \otimes_K M'' \longrightarrow 0$$

exakt, da K^{sep} als K-Modu frei ist und somit auch flach. Dann liefert eine einfache Diagramjagd in dem kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (K^{sep} \otimes_K M')^{\varphi=1} \arrow[r] \arrow[d, "="] & (K^{sep} \otimes_K M)^{\varphi=1} \arrow[r] \arrow[d, "="] & (K^{sep} \otimes_K M'')^{\varphi=1} \arrow[d, "="] & \\
& \mathbb{V}(M') \arrow[d, "\subseteq"] & \mathbb{V}(M) \arrow[d, "\subseteq"] & \mathbb{V}(M'') \arrow[d, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[r] & K^{sep} \otimes_K M' \arrow[r] & K^{sep} \otimes_K M \arrow[r] & K^{sep} \otimes_K M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

die Exaktheit der oberen Zeile. Wir zeigen nun, dass $\mathbb{V}(M) \to \mathbb{V}(M'')$ surjektiv ist. Betrachte dazu das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \arrow[r] \arrow[d] & K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M'') \arrow[d] \\
K^{sep} \otimes_K M \arrow[r] & K^{sep} \otimes_K M''
\end{tikzcd}$$

Wegen (i) sind die horizontalen Pfeile bijektiv. Der untere vertikale Pfeil ist surjektiv, wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes. Damit ist auch der obere vertikale Pfeil surjektiv. Dann ist auch $\mathbb{V}(M) \to \mathbb{V}(M'')$ surjektiv, da $K^{sep}/\mathbb{F}_p$ treuflach ist. □

Korollar 4.3.12:
Sei $(M, f) \in \Phi_K^{ét}$. Dann liegt $\mathbb{V}(M)$ in $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$.

Beweis. Wegen 4.3.10 ist $\mathbb{V}(M)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{F}_p$-Modul. Die G_K-Aktion auf $\mathbb{V}(M) = (K^{sep} \otimes_K M)^{\varphi=1}$ ist via $\sigma \otimes \mathrm{id}_M$ für alle $\sigma \in G_K$ gegeben. Damit sind die Eigenschaften (a)-(c) aus 4.3.2 gegeben. Wir müssen also lediglich die Stetigkeitseigenschaft (d) nachweisen. Wegen 4.3.5 faktorisiert die Operation von G_K auf $\mathbb{V}(M)$ über die Gruppe $\mathrm{Gal}(K'|K)$, wobei K' eine endliche Körpererweiterung von K ist. Die Krull-Topologie auf $\mathrm{Gal}(K'|K)$ ist gerade die diskrete Topologie und damit ist die Stetigkeit trivialerweise erfüllt.

□

Satz 4.3.13 (Fontaine)**:**
Die Kategorien $\Phi_K^{ét}$ und $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$ sind äquivalent.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass

(i) für $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{cont}}(G_K)$ der natürliche $\mathbb{F}_p$-lineare G_K-Homomorphismus $V \to \mathbb{V}(\mathbb{D}(V))$ bijektiv ist.

(ii) für $M \in \Phi_K^{ét}$ die natürliche K-lineare Abbildung $M \to \mathbb{D}(\mathbb{V}(M))$ ein Isomorphismus von étalen φ-Moduln über K ist.

Zu (i): Es gilt $\mathbb{V}(\mathbb{D}(V)) = (K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(V))^{\varphi=1} \overset{4.3.7}{\cong} (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\varphi=1} = \{x \in K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} : (\varphi \otimes \mathrm{id}_V)(x) = x\}$. Die natürliche Abbildung ist nun diejenige, welche $v \in V$ auf $1 \otimes v \in K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$ abbildet. Diese ist $\mathbb{F}_p$-linear, wohldefiniert (d.h. das Bild liegt in $(K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\varphi=1} = \mathbb{V}(\mathbb{D}(V))$) und es handelt sich um einen G_K-Homomorphismus, da die G_K-Aktion auf $\mathbb{V}(\mathbb{D}(V)) \cong (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{\varphi)=1}$ via $\sigma \otimes \sigma$ für alle $\sigma \in G_K$ gegeben ist. Für die Bijektivität benutzen wir 5.0.17. Konkret wenden wir $K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} (\cdot)$ an. Bei der entstehende Abbildung

$$K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V \longrightarrow K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(\mathbb{D}(V)) \overset{4.3.10}{\cong} K^{sep} \otimes \mathbb{D}(V) \overset{4.3.7}{\cong} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} V$$

handelt es sich aber um die Identität.

Zu (ii): Es gilt $\mathbb{D}(\mathbb{V}(M)) = (K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M))^{G_K} \overset{4.3.10}{\cong} (K^{sep} \otimes_K M)^{G_K}$. Dies ist eine Teilmenge von $K^{sep} \otimes_K M$, welche mit der G_K-Aktion via $\sigma \otimes \mathrm{id}_M$ für alle $\sigma \in G_K$ ausgestattet ist. Die Abbildung $M \to \mathbb{D}(\mathbb{V}(M))$ ist durch $m \mapsto 1 \otimes m$ gegeben. Diese ist damit K-linear und wohldefiniert (d.h. das Bild liegt in $(K^{sep} \otimes_K M)^{G_K} \cong \mathbb{D}(\mathbb{V}(M))$). Die φ-Modulstruktur auf M ist via f gegeben und die φ-Modulstruktur auf $\mathbb{D}(\mathbb{V}(M)) \cong (K^{sep} \otimes_K M)^{G_K}$ ist via $\varphi \otimes f$ gegeben. Damit ist die Abbildung $M \to \mathbb{D}(\mathbb{V}(M))$ ein Homomorphismus von étalen φ-Moduln über K. Die Bijektivität kann erneut via 5.0.17 gezeigt werden. Wende $K^{sep} \otimes_K (\cdot)$ an und erhalte die Abbildung

$$K^{sep} \otimes_K M \longrightarrow K^{sep} \otimes_K \mathbb{D}(\mathbb{V}(M)) \overset{4.3.7}{\cong} K^{sep} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{V}(M) \overset{4.3.10}{\cong} K^{sep} \otimes_K M$$

und auch hier ist diese Abbildung die Identität. □

4.4 Paarweise Kategorienäquivalenz

Wir haben nun das Ziel dieser Arbeit erreicht und den folgenden Satz beweisen:

Satz 4.4.1:
Die Kategorien $\mathscr{H}, \Phi_K^{ét}$ und $Rep_{\mathbb{F}_p}^{cont}(G_K)$ sind paarweise äquivalent.

Beweis. Der Satz ist die Zusammenfassung von 4.3.13 und 4.2.14 □

5 Anhang

Im Folgenden werden einige Standardaussagen der Algebra erwähnt, welche in dieser Arbeit verwendet werden.

Satz 5.0.1 (Rechtsexaktheit des Tensorproduktes)**:**
Sei R ein Ring und N ein rechtsseitiger R-Modul. Ferner sei die Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von linksseitigen R-Moduln exakt. Dann ist auch die Sequenz $M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen.

Beweis. Siehe [Lang, 1978] Seite 416 Proposition 6. □

Definition 5.0.2:
Sei R ein Ring.

(1) Sei I eine Menge mit einer Ordnungsrelation $\leq$. Das Tupel $(I, \leq)$ heißt gerichtet geordnet genau dann, wenn es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

(2) Sei $(I, \leq)$ eine gerichtet geordente Menge. Ein induktives System von R-Rechtsmoduln über I ist eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Rechtsmoduln zusammen mit R-Rechtsmodulhomomorphismen $\varphi_{ij} : M_i \to M_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$, sodass folgende beide Eigenschaften erfüllt sind:

- *$\varphi_{ii} = id_{M_i}$ für alle $i \in I$*
- *$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k$*

(3) Seien die Gegebenheiten wie in 2). Setze $\mathcal{V} := \bigsqcup_{i \in I} M_i := \{(i, x) : x \in M_i, i \in I\}$ und definiere eine Relation $\sim$ auf $\mathcal{V}$: Zwei Elemente $x_i := (i, x)$ und $y_j := (j, y)$ aus $\mathcal{V}$ stehen in der Relation $\sim$ genau dann, wenn es ein $k \in I$ gibt mit $i \leq k, j \leq k$ und $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$.

Lemma 5.0.3:
$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$.

Beweis. Die Reflexivität und Symmetrie ergeben sich sofort aus der Definition. Seien nun $x_i, y_j, z_k \in \mathcal{V}$ mit $x_i \sim y_j$ und $y_j \sim z_k$ gegeben, d.h. es gibt $k_1, k_2 \in I$ mit $\varphi_{ik_1}(x) = \varphi_{jk_1}$ und $\varphi_{jk_2}(y) = \varphi_{kk_2}(z)$. Sei nun $l \in I$ mit $k_1 \leq l$ und $l \leq k_2$. Dann gilt

$$\varphi_{il}(x) = \varphi_{k_1 l} \circ \varphi_{ik_1}(x) = \varphi_{k_1 l} \circ \varphi_{jk_1}(y) = \varphi_{jl}(y) = \varphi_{k_2 l} \circ \varphi_{jk_2}(y) = \varphi_{k_2 l} \circ \varphi_{kk_2}(z) = \varphi_{kl}(z),$$

d.h. $x_i \sim z_k$. □

Lemma 5.0.4:
$V/\sim$ hat eine eindeutige R-Rechtsmodulstruktur, sodass für alle $i \in I$ die kanonische Abbildung $\varphi : M_i \hookrightarrow \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\sim$ ein R-Rechtsmodulhomomorphismus ist.

Beweis. Eindeutigkeit:
Sei φ ein R-Rechtsmodulhomomorphismus. Dann muss für alle $i \in I, x, y \in M_i$ und $r \in R$ gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) = [(i,x) + (i,y)] = [(i, x+y)] \overset{!}{=} \varphi(x) + \varphi(y) = [(i,x)] + [(i,y)] \\ \varphi(xr) = [(i, xr)] \overset{!}{=} \varphi(x) \cdot r = [(i,x)] \cdot r \end{aligned} \tag{44}$$

Durch die letzte Gleichung ist die Skalarmultiplikation eindeutig. Die Eindeutigkeit der Addition hingegen erfordert etwas mehr Aufwand. Seien $[(i,x)], [(j,y)] \in \mathcal{V}/\sim$ beliebig. Wähle nun ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Dann gilt sowohl $[(i,x)] = [(k, \varphi_{ik}(x))]$ als auch $[(j,y)] = [(k, \varphi_{jk}(y))]$. Somit und nach (44) muss die Addition wie folgt definiert sein: $[(i,x)] + [(j,y)] = [(k, \varphi_{ik}(x))] + [(k, \varphi_{jk}(y))] := [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))]$
Existenz:
Wir definieren die Addition und die Skalarmultiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} &+ : (\mathcal{V}/\sim) \times (\mathcal{V}/\sim) \longrightarrow \mathcal{V}/\sim, \quad ([(i,x)], [(j,y)]) \longmapsto [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))], \text{wobei } k \in I \text{ mit } i \leq k \text{ und } j \leq k \\ &\cdot : (\mathcal{V}/\sim) \times R \longrightarrow \mathcal{V}/\sim, \quad ([(i,x)], r) \longmapsto [(i, xr)] \end{aligned}$$

$+$ wohldefiniert: Seien $[(i_1,x)] = [(i_2,x')], [(j_1,y)] = [(j_2,y')] \in \mathcal{V}/\sim$ beliebig. Wir müssen nun zeigen, dass die folgende Identität gilt

$$[(i_1,x)] + [(j_1,y)] = [(k_1, \varphi_{i_1k_1}(x) + \varphi_{j_1k_1}(y))] \overset{!}{=} [(k_2, \varphi_{i_2k_2}(x') + \varphi_{j_2k_2}(y'))] = [(i_2,x')] + [(j_2,y')]$$

für $k_1,k_2 \in I$ mit $k_1 \geq i_1,j_1$ und $k_2 \geq i_2,j_2$. Wir müssen also ein $k \in I$ finden mit $k \geq k_1,k_2$, welches der Gleichung

$$\varphi_{k_1k}(\varphi_{i_1k_1}(x) + \varphi_{j_1k_1}(y)) = \varphi_{k_2k}(\varphi_{i_2k_2}(x') + \varphi_{j_2k_2}(y'))$$

genügt. Wegen $[(i_1,x)] = [(i_2,x')]$ und $[(j_1,y)] = [(j_2,y')]$ gibt es $l,l' \in I$ mit $l \geq i_1,i_2$ und $l' \geq j_1,j_2$, sodass sowohl $\varphi_{i_1l}(x) = \varphi_{i_2l}(x')$ als auch $\varphi_{j_1l'}(y) = \varphi_{j_2l'}(y')$ gilt. Sei nun $k \in I$ größer als k_1,k_2 und damit insbesonderes größer als i_1,i_2,j_1 und j_2. Dann gilt $\varphi_{i_1k}(x) = \varphi_{i_2k}(x')$, $\varphi_{j_1k}(y) = \varphi_{j_2k}(y')$ und somit auch

$$\varphi_{k_1k}(\varphi_{i_1k_1}(x) + \varphi_{j_1k_1}(y)) = \varphi_{i_1k}(x) + \varphi_{j_1k}(y) = \varphi_{i_2k}(x') + \varphi_{j_2k}(y') = \varphi_{k_2k}(\varphi_{i_2k_2}(x') + \varphi_{j_2k_2}(y'))$$

$\cdot$ wohldefniert: Seien $[(i,x)] = [(j,y)] \in \mathcal{V}/\sim$ und $r \in R$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $[(i,xr)] = [(j,yr)]$ gilt d.h. wir müssen ein $k \in I$ mit $k \geq i,j$ und $\varphi_{ik}(xr) = \varphi_{jk}(yr)$ finden. Wegen $[(i,x)] = [(j,y)]$ gibt es ein $k \in I$ mit $k \geq i,j$ und $\varphi_{ik}(x) = \varphi_{jk}(y)$. Multiplizieren wir von rechts mit r, so erhalten wir die gewünschte Identität.

$(\mathcal{V}/\sim,+)$ ist eine Halbruppe: Seien $[(i,x)],[(j,y)],[(k,z)] \in \mathcal{V}/\sim$ und $l \in I$ mit $l \geq i,j,k$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}([(i,x)] + [(j,y)]) + [(k,z)] &= [(l, \varphi_{il}(x) + \varphi_{jl}(y))] + [(k,z)] = [(l, \varphi_{il}(x) + \varphi_{jl}(y) + \varphi_{kl}(z))] \\ &= [(i,x)] + [(l, \varphi_{jl}(y) + \varphi_{kl}(z))] = [(i,x)] + ([(j,y)] + [(k,z)])\end{aligned}$$

$(\mathcal{V}/\sim,+)$ ist ein Monoid: : Sei $[(i,x)] \in \mathcal{V}/\sim$ beliebig. Sei $0_i \in M_i$ das neutrale Element bezüglich der Addition. Nun gilt

$$[(i,x)] + [(i,0_i)] = [(i,x+0_i)] = [(i,x)]$$

Offenbar gilt $[(i,0_i)] = [(j,0_i)]$ für alle $i,j \in I$. Wir definieren $0 := [(i,0_i)]$.

$(\mathcal{V}/\sim,+)$ ist eine Gruppe: Sei $[(i,x)] \in \mathcal{V}/\sim$ beliebig. Es gilt

$$[(i,x)] + [(i,-x)] = [(i,x+(-x))] = [(i,0_i)] = 0$$

$(\mathcal{V}/\sim,+)$ ist eine abelsche Gruppe: Seien $[(i,x)],[(j,y)] \in \mathcal{V}/\sim$ und $k \in I$ mit $k \geq i,j$ beliebig. Nun gilt

$$[(i,x)] + [(j,y)] = [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))] = [(k, \varphi_{jk}(y) + \varphi_{ik}(x))] = [(j,y)] + [(i,x)]$$

$(\mathcal{V}/\sim,+,\cdot)$ ist ein Modul: Seien $[(i,x)],[(j,y)] \in \mathcal{V}/\sim$ und $k \in I$ mit $k \geq i,j$ und $r,s \in R$ beliebig. Nun gilt:

$$\begin{aligned}([(i,x)] \cdot r) \cdot s &= [(i,xr)] \cdot s = [i,xrs] = [(i,x)] \cdot (rs), \\ [(i,x)] \cdot (r+s) &= [(i,x(r+s)] = [(i,xr+xs)] = [(i,xr)] + [(i,xs)] = [(i,x)] \cdot r + [(i,x)] \cdot s, \\ ([(i,x)] + [(j,y)]) \cdot r &= [(k, \varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y))] \cdot r = [(k, (\varphi_{ik}(x) + \varphi_{jk}(y)) \cdot r)] \\ &= [(k, \varphi_{ik}(x)r + \varphi_{jk}(y)r)] = [(i,x)] \cdot r + [(j,y)] \cdot r\end{aligned}$$

□

Definition 5.0.5 (Induktiver Limes)**:**
Seien die Voraussetzungen wie in 5.0.2. Dann ist der induktive Limes wie folgt definiert:

$$\varinjlim_{i \in I} M_i := \mathcal{V}/\sim$$

Beispiel 5.0.6:
Sei M ein R-Rechtsmodul und $X := \{P : P \subseteq M$ ist endlich erzeugter R-Untermodul $\}$. Offenbar ist $(X, \subseteq)$ gerichtet geordnet. X ist auch ein induktives System von Moduln über sich selbst via $\varphi_{PQ} : P \to Q \quad p \mapsto p$ für alle $P, Q \in X$ mit $P \subseteq Q$. Nun stehen $x_P := (P, x)$ und $y_Q := (Q, y)$ aus $\mathcal{V}$ genau dann zueinander in Relation, wenn es ein $K \in X$ mit $P, Q \subseteq K$ und $\varphi_{PK}(x) = \varphi_{QK}(y)$ gibt. Das ist aber genau dann der Fall, wenn es ein $K \in X$ gibt mit $P, Q \subseteq K$ und $x = y$ in $K \subseteq M$, d.h. $x = y$ in M. Damit haben wir den induktiven Limes bestimmt:

$$\varinjlim_{P \in X} P := \mathcal{V}/\sim \,\cong M$$

Satz 5.0.7:
Sei R ein Ring, S eine Rechtsteilermenge und M ein R-Rechtsmodul. Dann ist $\varphi : M \to M \otimes_R RS^{-1}$ R-Linear und es gilt $\ker \varphi = \{m \in M : \exists s \in S$ mit $ms = 0\}$.

Beweis. Seien $r \in R$ und $m \in M$, dann gilt $\varphi(mr) = mr \otimes 1 = m \otimes r = (m \otimes 1)r = \varphi(m)r$.
„$\supseteq$ “: Sei $ms = 0$, dann gilt $\varphi(m) = m \otimes 1 = m \otimes ss^{-1} = ms \otimes s^{-1} = 0 \otimes s^{-1} = 0$.
„$\subseteq$ “: Setze $X := \{P : P \subseteq RS^{-1}$ ist endlich erzeugter R-Untermodul $\}$. X ist über $\subseteq$ gerichtet geordnet und nach 5.0.6 ist RS^{-1} der induktive Limes über alle $P \in X$. Definiere nun für alle $P, Q \in X$ mit $P \subseteq Q$ Abbildungen

$$\tilde{\varphi}_{PQ} : M \otimes_R P \to M \otimes_R Q \quad m \otimes p \mapsto m \otimes p.$$

Wir können also den induktiven Limes

$$\varinjlim_{P \in X} (M \otimes P)$$

bilden. Wir wollen nun die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes ausnutzen. Definiere dazu eine R-bilineare Abbildung

$$f : M \times \varinjlim_{P \in X} P \to \varinjlim_{P \in X} (M \otimes P) \text{ via } (m, [x_P]) \mapsto [(m \otimes x)_P],$$

wobei $x_P := (P, x) \in \bigsqcup_{P \in X} P$ und $(m \otimes x)_P := (P, m \otimes x) \in \bigsqcup_{P \in X} M \otimes P$.

- f ist wohldefiniert: Sei $(m, [x_P]) = (n, [y_Q])$. Also ist $m = n$ und es gibt ein $K \in X$, sodass $P, Q \subseteq K$ und $x = y$ in K gilt. Dann gilt auch $m \otimes x = n \otimes y$ in $M \otimes K$, d.h. es gilt $[(m \otimes x)_P] = [(n \otimes y)_Q]$.
- f ist R-balanciert: Seien $m, n \in M$, $r \in R$ und $[x_P], [y_Q] \in \bigsqcup_{P \in X} P$ beliebig und $K \in X$ geeignet gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(m + n, [x_P]) &= [((m + n) \otimes x)_P] = [(m \otimes x)_P + (n \otimes x)_Q] \\
&= [(m \otimes x)_P] + [(n \otimes x)_Q] = f(m, [x_P]) + f(n, [y_Q]) \\
f(m, [x_P] + [x_Q]) &= f(m, [(x + y)_K) = [(m \otimes (x + y))_K] = [(m \otimes x)_K] + [(m \otimes y)_K] \\
&= [(m \otimes x)_P] + [(m \otimes y)_Q] = f(m, [x_P]) + f(n, [y_Q]) \\
f(mr, [x]_P) &= [(mr \otimes x)_P] = [(m \otimes rx)_P] = f(m, [rx]_P) = f(m, r[x]_P)
\end{aligned}$$

Nun liefert uns die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes den Gruppenhomomorphismus:

$$M \otimes_R (\varinjlim_{P \in X} P) \cong M \otimes_R RS^{-1} \longrightarrow \varinjlim_{P \in X} M \otimes_R P$$

Man kann zeigen, dass er bijektiv ist (vgl. [col,] Lemma 11.9). Es folgt, dass es ein $P \in X$ gibt mit $m \otimes 1 = 0$ in $M \otimes_R P$. Seien nun $\{\vartheta(r_i)\vartheta(s_i)^{-1}\}_{i=1,\dots,n}$ die Erzeuger von P (als R-Linksmodul). Wir zeigen nun, dass es ein $s \in \vartheta(S)$ gibt mit $Ps \subseteq \vartheta(R)$. Wir nutzen dazu die Ore-Bedingung. Da s_1 in S und somit in R und s_2 in$S$ liegt, gibt es ein $s'_1 \in S$ und ein $r'_1 \in R$ mit $s_1 s'_1 = s_2 r'_1$. Nun liegt wiederum $s_1 s'_1$ in R und s_3 in S, sodass es ein $s'_2 \in S$ und ein $r'_2 \in R$ gibt mit $s_1 s'_1 s'_2 = s_3 r'_2$. Induktiv erhält man nun $s'_1, \dots, s'_{n-1} \in S$ und $r'_1, \dots, r'_{n-1} \in R$ mit $s := s_1 \prod_{i=1}^{n} s'_i = s_n r_{n-1}$. Sei nun $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vartheta(r_i)\vartheta(s_i)^{-1} \in P$ beliebig. Dann ist $x\vartheta(s)$ in $\vartheta(R)$. Also gilt $P \subseteq \vartheta(R)\vartheta(s)^{-1}$.

Betrachte nun die exakte Sequenz von R-Linksmoduln $0 \to \ker g \to R \xrightarrow{g} \vartheta(R)\vartheta(s)^{-1} \to 0$ mit g definiert durch $r \mapsto \vartheta(r)\vartheta(s)^{-1}$. Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes auch die Sequenz

$$M \otimes_R \ker g \to M \otimes_R R \overset{\mathrm{id}_M \otimes g}{\to} M \otimes_R \vartheta(R)\vartheta(s)^{-1} \to 0$$

exakt, wobei $M \otimes_R R$ offensichtlich zu M isomorph ist. Da $m \otimes 1 = 0$ in $M \otimes_R P \subseteq M \otimes_R \vartheta(R)\vartheta(s)^{-1}$ gilt, liegt $m \otimes 1$ in $\ker(\mathrm{id}_M \otimes g) \cong \mathrm{im}\,(M \otimes_R \ker g \to M) = M \cdot \ker g$. Also lässt sich m schreiben als $m = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ mit $m_i \in M$ und $r_i \in \ker g$. $r_1 \in \ker g$ bedeutet aber auch, dass r_1 in $\ker(R \to RS^{-1})$ liegt. Damit gibt es ein $s_1 \in S$ mit $\vartheta(r_1 s_1) = 0$ und somit ist $ms_1 =: m \cdot \vartheta(s_1) = m_1\vartheta(r_1 s_1) + \sum_{i=2}^{r} m_i r_i s_1$, wobei weiterhin $r_i s_i \in \ker(R \to RS^{-1})$ für $2 \le i \le n$ gilt. Induktiv erhält man $s_1, ..., s_n \in S$ mit $m \cdot s_1 \cdot ... \cdot s_r = 0$. □

Satz 5.0.8 (Kürzungsregel für das Tensorprodukt)**:**
Sei R ein Ring und S, T kompatible Rechtsteilermengen von R. Ferner sei M ein R-Rechsmodul. Dann gibt es einen Isomorphismus zwischen $M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1})$ und $M \otimes_R R(ST)^{-1}$ als $R(ST)^{-1}$-Rechtsmoduln.

Beweis. Sei η der kanonische Ringhomomorphismus von $RS^{-1} \longrightarrow R(ST)^{-1}$. Dann ist die Abbildung

$$f : RS^{-1} \times R(ST)^{-1} \to R(ST)^{-1} \quad (a, b) \mapsto \eta(a)b$$

RS^{-1}-balanciert. Seien dazu $a, a', r \in RS^{-1}$ und $b, b' \in R(ST)^{-1}$ beliebig. Dann gilt $f(a+a', b) = \eta(a+a')b = \eta(a)b + \eta(a')b = f(a, b) + f(a', b)$, $f(a, b + b') = \eta(a)(b + b') = \eta(a)b + \eta(a)b' = f(a, b) + f(a, b')$ und $f(ar, b) = \eta(ar)b = \eta(a)\eta(r)b = f(a, \eta(r)b) = f(a, r \cdot b)$. Nun liefert uns die universelle Eigenschaft des Tensoprodukte einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\chi : RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1} \to R(ST)^{-1}$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
RS^{-1} \times R(ST)^{-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1} \arrow[dl, dotted, "\exists!\chi"] \\
& R(ST)^{-1} &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht, dabei ist χ sogar ein R-Linksmodulhomomorphismus. In der Tat gilt $\chi(r \cdot (a \otimes b)) = \chi(\vartheta_S(r)a \otimes b) = \eta(\vartheta_S(r)a)b = \eta(\vartheta_S(r))\eta(a)b = r \cdot (\eta(a)b) = r \cdot \chi(a \otimes b)$ für alle $a \otimes b \in RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}$ und $r \in R$. Nun ist auch die Abbildung

$$g : M \times (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}) \longrightarrow M \times R(ST)^{-1} \longrightarrow M \otimes_R R(ST)^{-1}, (m, x) \longmapsto (m, \chi(x)) \longmapsto m \otimes \chi(x)$$

R-balanciert. Die Additivität in beiden Komponenten ist sofort klar und es gilt auch $g(m \cdot r \otimes \chi(x)) = m \cdot r \otimes \chi(x) = r \cdot \chi(x)$ für alle $m \in M$, $r \in R$ und $x \in R(ST)^{-1}$. Dann liefert die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\beta_1 : M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1}) \to M \otimes_R R(ST)^{-1}$, welcher der Abbildungsvorschrift $m \otimes (a \otimes b) \mapsto m \otimes \eta(a)b$ genügt. Für alle $m \otimes (a \otimes b) \in M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1})$ und $q \in R(ST)^{-1}$ gilt auch $\beta_1((m \otimes (a \otimes b)) \cdot q) = \beta_1(m \otimes (a \otimes bq)) = m \otimes \eta(a)bq = (m \otimes \eta(a)b)q = \beta_1(m \otimes (a \otimes b))q$, d.h. β_1 ist ein $R(ST)^{-1}$-Rechtsmodulhomomorphismus. Auf ähnliche Weise erhält man einen $R(ST)^{-1}$-Rechtsmodulhomomorphismus $\beta_2 : M \otimes_R R(ST)^{-1} \to M \otimes_R (RS^{-1} \otimes_{RS^{-1}} R(ST)^{-1})$ mit der Abbildungsvorschrift $m \otimes x \mapsto (m \otimes (1 \otimes x))$. Man sieht sofort, dass β_1 und β_2 zueinander invers sind. □

Definition 5.0.9:
Sei M ein R-Linksmodul. M heißt

- *endlich erzeugt genau dann, wenn es eine Teilmenge $E := \{a_1, ..., a_n\} \subseteq M$ gibt, sodass es für jedes $x \in M$ $r_1, ..., r_n \in R$ gibt mit $x = r_1a_1 + ... + r_na_n$. Eine solche Menge E heißt Erzeugendensystem*
- *frei genau dann, wenn M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem besitzt.*
- *endlich präsentiert genau dann, wenn es eine exakte Sequenz $0 \to K \to F \to M \to 0$ von R-Linksmoduln – mit F frei von endlichem Rang und K endlich erzeugt– gibt.*
- *projektiv genau dann, wenn es für alle surjektiven R-Linksmodulhomomorphismen $f : A \to B$ und für alle R-Linksmodulhomomorphismen $g : M \to B$ einen R-Linksmodulhomomorphismus $h : M \to A$ gibt mit $f \circ h = g$. Dabei muss h nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt sein. Dies ist damit keine universelle Eigenschaft.*

- *flach genau dann, wenn der Funktor $(\cdot) \otimes_R M$ exakt ist*

- *treuflach genau dann, wenn M flach ist und, wenn für alle R-Rechtsmoduln A aus $A \otimes_R M = 0$ stets $A = 0$ folgt.*

Die oben genannten Definitionen lassen sich völlig analog auf einen R-Rechtsmodul übertragen.

Proposition 5.0.10:
M ist ein flacher R-Linksmodul genau dann, wenn für alle R-Rechtsideale $I \subseteq R$ die Sequenz $0 \to I \otimes_R M \to R \otimes_R M$ exakt ist.

Beweis. Siehe [bos,] Seite 3 Theorem 1.4. □

Proposition 5.0.11:
Ein R-Linksmodul M ist projektiv genau dann, wenn M isomorph zu einem direkten Summanden eines freien freien Moduls ist.

Beweis. Siehe [Lam, 1999] Seite 22 Korollar 2.3. □

Proposition 5.0.12:
Sei $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ eine direkte Summe von R-Linksmoduln. Ferner sei F ein R-Rechtsmodul. Dann gilt $F \otimes_R E \cong \bigoplus (F \otimes_R E_i)$.

Beweis. Siehe [Lang, 1978] Seite 413 Proposition 3. □

Proposition 5.0.13:
Jeder projektive R-Rechtsmodul ist flach.

Beweis. Siehe [Lam, 1999] Seite 123 Propostion 4.3. □

Proposition 5.0.14:
Wenn N ein flacher A-Rechtsmodul ist, so ist $N \otimes_A B$ ein flacher B-Rechtsmodul.

Beweis. Siehe [Lam, 1999] Seite 122 Proposition 4.1. □

Proposition 5.0.15:
Sei M ein (S, R)-Bimodul und N ein R-Linksmodul (respektive M ein R-Rechtsmodul und N ein (R, S)-Bimodul). Dann ist $M \otimes_R N$ ein S-Linksmodul via $s(x \otimes y) = sx \otimes y$ respektive ein S-Rechtsmodul via $(x \otimes y)s = x \otimes ys$.

Beweis. Wir betrachten nur den ersten Fall. Der zweite Fall wird analog bewiesen. Sei $\delta_S : M \to M$ definiert durch $m \mapsto sm$. Dies ist ein R-Modulhomomorphismus und wir erhalten einen Endomorphismus $\eta_s := \delta_S \otimes \mathrm{id}_N : M \otimes_R N \to M \otimes_R N$. Sei nun $\sum_i m_i \otimes n_i \in M \otimes_R N$ beliebig. Dann gilt $\eta_S(\sum_i m_i \otimes n_i) = \sum_i \eta_S(m_i \otimes n_i) = \sum_i sm_i \otimes n_i$ und wir erhalten eine wohldefnierte Abbildung

$$S \times M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \quad (s, \sum_i m_i \otimes n_i) \longmapsto \sum_i sm_i \otimes n_i$$

□

Bemerkung 5.0.16:
Ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ heißt flach (bzw. treuflach), wenn er S zu einen flachen (bzw. treuflachen) R-Modul macht. Sind (R, m) und (S, n) lokale Ringe und $\varphi : R \to S$ ein flacher Ringhomomorphismus, so ist φ genau dann treuflach, wenn $\varphi(m)S = n$ gilt. Das zeigen wir im folgenden Lemma.

Lemma 5.0.17:
Seien $(R, m), (S, n)$ lokale Ringe und $\varphi : R \to S$ ein flacher Ringhomomorphismus mit $\varphi(m)S = n$. Dann ist eine R-lineare Abbildung $f : M \to N$ surjektiv respektive injektiv genau dann, wenn $id_S \otimes f : S \otimes_R M \to S \otimes_R N$ surjektiv respektive injektiv ist. Insbesondere ist φ treuflach.

Beweis. Ist f surjektiv, so ist $\mathrm{id}_S \otimes f$ surjektiv wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes. Ist f injektiv, so ist $\mathrm{id}_S \otimes f$ injektiv wegen der Flachheit von φ. Sei nun $\mathrm{id}_S \otimes f$ surjektiv respektive injektiv. Im ersten Fall setzen wir $C := N/\mathrm{im}\,(f)$. Dann ist $M \xrightarrow{f} N \to C \to 0$ exakt und somit auch

$$S \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes f} S \otimes_R N \to S \otimes_R C \to 0$$

Wegen der Surjektivität von $\mathrm{id}_S \otimes f$ ist damit $S \otimes_R C = 0$. Im zweiten Fall setzen wir $C := \ker(f)$. Dann ist $0 \to C \to M \xrightarrow{f} N$ exakt. Da φ flach ist, ist auch die Sequenz

$$S \otimes_R C \to S \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes f} S \otimes_R N \to 0$$

exakt und somit ist $S \otimes_R C = 0$, da $\mathrm{id}_S \otimes f$ injektiv ist. Zeige nun, dass die Bedingung $\varphi(m)S = n$ stets $C = 0$ impliziert. Sei $c \in C$. Dann ist $Rc \subseteq C$ und wegen der Flachheit von φ haben wir $S \otimes_R Rc \hookrightarrow S \otimes_R C = 0$ und somit $S \otimes Rc = 0$. Angenommen $c \neq 0$ und somit $Rc \neq 0$. $Rc \neq 0$ ist endlich erzeugt über R und damit gibt es nach dem Lemma von Zorn in der Menge der in Rc enthaltenden Linksideale von R ein maximales Element P. Wähle nun $x \in Rc \setminus P$. Die Maximalität liefert dann $Rc = Rx + P$. Damit ist dann die R-lineare Abbildung $(r \mapsto rx + P) : R \to Rc/P$ surjektiv. Sei nun $I \subseteq R$ dessen Kern. Da P ein echtes Ideal von Rc ist, ist $Rc/P \neq 0$ und damit ist $I \neq R$. Dann ist $I \subseteq m$, da R lokal ist. Wegen $m/I \overset{\neq}{\hookrightarrow} R/I \cong Rc/P$ ist $m/I = 0$, denn das Urbild von m/I unter $Rc \twoheadrightarrow Rc/P$ ist ein Untermodul von Rc, der P echt enthält. Damit ist $m = I$ und $Rc/P \cong R/m =: k$. Nun ist

$$0 = S \otimes_R Rc \twoheadrightarrow S \otimes_R (Rc/P) \cong S \otimes_R k$$

und daher $S \otimes_R k = 0$. Nun betrachte die exakte Sequenz

$$0 \to m \to R \to k \to 0$$

Da φ flach ist, ist auch die Sequenz

$$S \otimes_R m \to S \otimes_R R \to S \otimes_R k \to 0$$

exakt, wobei $S \otimes_R R \cong S$ und $S \otimes_R k = 0$ gilt. Also ist die Abbildung $S \otimes_R m \to S$ surjektiv, welche durch $s \otimes r \mapsto s\varphi(r)$ gegeben ist. Sie hat aber das Bild $\varphi(m)S = n \subset S$. Dies steht im Widerspruch zur Treuflachheit von φ. Also muss $c = 0$ und da c beliebig war auch $C = 0$ gelten.

$\square$

Literatur

[col,] Commutative algebra. Unveröffentlicht, Erhältlich bei http://stacks.math.columbia.edu/download/algebra.pdf; besucht am 13.10.2016.

[bos,] Flatness. Unveröffentlicht, Erhältlich bei https://www2.bc.edu/brian-lehmann/papers/flatness.pdf; besucht am 21.10.2016.

[pad, 2015] (2015). p-adic galois representations. http://www.esaga.uni-due.de/jan.kohlhaase/lehre/AlgZT3.

[Emerton, 2008] Emerton, M. (2008). *On class of coherent rings with applications to the representation theory of* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *in characteristic* p. Chicago. Unveröffentlicht, Erhältlich bei http://www.math.uchicago.edu/∼emerton/pdffiles/frob.pdf; besucht am 4.10.2016.

[Grayson, 1985] Grayson, D. R. (1985). *The K-Theory of Semilinear Endomorphisms*, volume 113. Journal of Algebra, Illinois. Erhältlich bei http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869388901652; besucht am 8.08.2016.

[J.C. McConnell, 1987] J.C. McConnell, J. R. (1988 (Original: 1987)). *Noncommutative Noetherian Rings*, volume 30. American Mathematical Society (Original: Chichester[West Sussex]), New York (Original: Brighton).

[Lam, 1999] Lam, T. (1999). *Lectures on Modules and Rings*. Springer, New York u.a.

[Lang, 1978] Lang, S. (1978). *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, New York u.a.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die Masterarbeit zum Thema Galoisdarstellungen und Vektorbündel auf der projektiven Schiefgerade unter Betreuung von Prof. Dr. Jan Kohlhaase selbständig verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe. Andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel wurden von mir nicht benutzt. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Duisburg, den 3.11.2016

Christian Linz