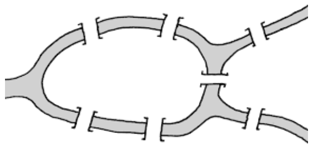
Graphentheorie **Sommeruni Natur- & Ingenieurwissenschaften**
Prof. Dr. Jan Kohlhaase **Universität Duisburg-Essen, 21. August 2018**

Entdecker der Graphentheorie: Leonhard Euler (*1707, Basel; †1783, St. Petersburg)

Königsberger Brückenproblem:

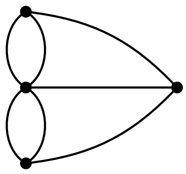


Gibt es einen Spaziergang (oder sogar einen Rundweg), auf dem jede Brücke genau einmal überquert wird?

Ansatz: (i) Stelle die Landgebiete durch Punkte dar (”Knoten“).
(ii) Stelle die Brücken durch Verbindungslinien dar (”Kanten“).

Man erhält das folgende Schema von Königsberg:

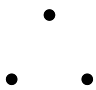
(1)



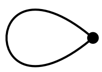
Ein solches Schema nennt man einen Graphen!

Definition: Ein Graph besteht aus einer Menge von Knoten (symbolisiert durch Punkte) und aus einer Menge von Kanten zwischen Knoten (symbolisiert durch Verbindungslinien). Genauer ist eine Kante eine Menge $\{x, y\}$, wobei x und y Knoten sind.

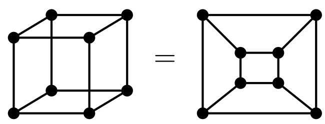
Beispiele:



ein Graph ohne Kanten



Graph mit Schleife

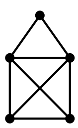


zwei Zeichnungen des Würfels

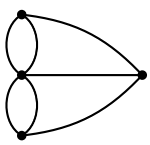
Anwendung der Graphentheorie: Modellierung von Netzwerken (Internet, soziale Medien etc.)

Umformulierung des Brückenproblems:

Kann man den Graphen (1) in einem Zug zeichnen, ohne eine Kante doppelt zu malen? Für das Haus vom Nikolaus ist das bekanntlich möglich:



”Das ist das Haus vom Nikolaus!“



”Findet Euler einen Weg?“

Definition: Ein nicht leerer Graph heißt zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt.

Beispiel:

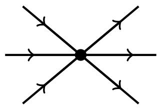
ein zusammenhängender Graph — ein nicht zusammenhängender Graph

Definition: Ein Eulerweg auf einem Graphen ist ein Weg, der alle Kanten genau einmal durchläuft. Falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, spricht man von einem Eulerkreis.

Umformulierung des Brückenproblems: Besitzt der Graph (1) einen Eulerweg?

Eulers Argumentation:

1. Angenommen ein Graph enthält einen Eulerweg. Betrachte einen Knoten, der weder Anfangs- noch Endpunkt dieses Weges ist:

   Wenn man auf den Knoten zuläuft, muss man auch wieder davon weglaufen – allerdings entlang einer anderen Kante! Daher muss der Knoten in 2, 4, 6 etc. Kanten enthalten sein.

2. Auf einem Eulerweg können damit höchstens Anfangs- und Endpunkt in einer ungeraden Zahl von Kanten enthalten sein.

3. Falls ein Graph einen Eulerweg besitzt, dann gibt es höchstens 2 Knoten, die in einer ungeraden Zahl von Kanten enthalten sind (nämlich Anfangs- und Endpunkt).

Definition: Der Grad eines Knotens ist die Zahl aller Kanten, die diesen Knoten enthalten.

Beispiel: Die Knoten des Graphen (1) haben die Grade 3, 3, 3, und 5.

Folgerung: In Königsberg gibt es keinen Spaziergang, auf dem jede Brücke genau einmal überquert wird!

Tatsächlich hat Euler den folgenden Satz vermutet, der 1873 von Carl Hierholzer bewiesen wurde:

Satz (Hierholzer): Für jeden zusammenhängenden Graphen gilt:

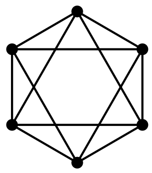
(i) Es gibt einen Eulerweg genau dann, wenn es genau 0 oder genau 2 Knoten ungeraden Grades gibt.

(ii) Es gibt einen Eulerkreis genau dann, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

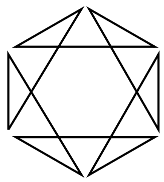
Beispiele:

1. Die Knoten im Nikolaushaus haben die Grade 2, 3, 3, 4, 4. Nach dem Satz gibt es also einen Eulerweg – das wussten wir schon. Es gibt aber keinen Eulerkreis! Hast Du Dich das jemals gefragt? Nach Eulers Argumentation müssen die Eulerwege außerdem stets am Boden des Hauses enden – auch das ist eine neue Erkenntnis!

2. Im Oktaeder haben alle Knoten den Grad 4:

   Nach dem Satz muss es einen Eulerkreis geben, z.B. den folgenden:

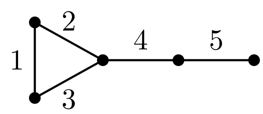
   

   Es gibt aber auch Eulerkreise, die einem anderen Muster folgen. Findest Du einen?

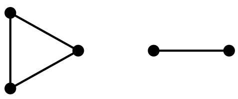
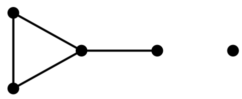
Frage: Wie kann man Eulerwege systematisch finden?

Definition: Eine Kante in einem Graphen heißt eine Brücke, falls sich die Zahl der zusammenhängenden Teilstücke des Graphen erhöht, wenn man die Kante weglässt.

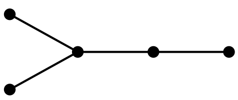
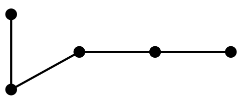
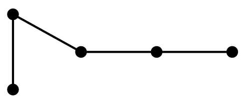
Beispiel: In dem zusammenhängenden Graphen



sind die Kanten 4 und 5 Brücken, denn durch Weglassen erhöht sich die Zahl der zusammenhängenden Teilstücke auf zwei:

 und 

Die Kanten 1, 2 und 3 sind keine Brücken, denn durch Weglassen bleibt der Graph zusammenhängend:

 und  und 

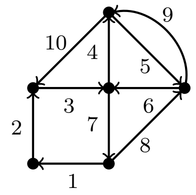
Fleury-Algorithmus: Gegeben sei ein Graph, in dem ein Eulerweg existiert (z.B. nach dem Kriterium im Satz von Hierholzer).

1. Starte mit einem Knoten, der einen ungeraden Grad hat. Falls ein solcher Knoten nicht existiert, starte mit einem beliebigen Knoten.

2. Laufe von hier aus entlang einer beliebigen Kante zu ihrem Endpunkt. Einzige Bedingung: Eine Brücke darf nur gewählt werden, falls es keine andere Möglichkeit gibt.

3. Lösche die Kante aus dem Graphen.
4. Gehe zu 2. und wiederhole den Vorgang bis der Eulerweg komplett ist.

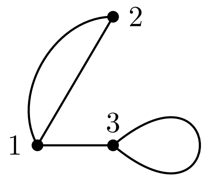
Beispiel:



Die Adjazenzmatrix eines Graphen (adjazent = benachbart):

1. Nummeriere die Knoten eines gegebenen Graphen von 1 bis n.
2. Sei A das Zahlenfeld mit n Zeilen und n Spalten, wo in der i-ten Zeile und j-Spalte die Anzahl der Kanten zwischen Knoten i und Knoten j steht.
3. Man erhält eine sogenannte $(n \times n)$-Matrix (sprich: "n Kreuz n"). Sie heißt die Adjazenzmatrix des Graphen.

Beispiel:

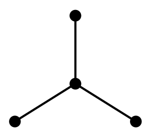


hat die Adjazenzmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Adjazenzmatrix speichert sämtliche Informationen über den Graphen. Das Verfahren lässt sich daher umkehren: Zu einer symmetrischen, quadratischen Matrix, deren Einträge natürliche Zahlen sind, gehört ein eindeutig bestimmter Graph.

Beispiel:

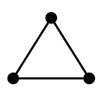
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ führt zu dem Graphen



Man kann mit $(n \times n)$-Matrizen rechnen. Man kann sie z.B. addieren und multiplizieren. Das lernt man in der Oberstufe oder im 1. Semester an der Uni. Damit kann man eine quadratische Matrix A auch potenzieren: $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k-\text{mal}}$.

Satz: Gegeben sei ein Graph mit Adjazenzmatrix A. Für alle $k \geq 1$ ist der Eintrag von A^k in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte gleich der Anzahl aller Wege vom Knoten i zum Knoten j, die aus k Kanten bestehen. Hierbei dürfen Kanten mehrfach durchlaufen werden.

Beispiel: Der Graph



hat die Adjazenzmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe: Überprüfe die Aussage des Satzes für $k = 2$ und $k = 3$!