Seminarprogramm

Homologische Algebra

Universität Duisburg-Essen, Wintersemester 2017/18

Veranstalter: Prof. Dr. J. Kohlhaase, Dr. A. Pal
Ort und Zeit: WSC-S-3.14, Di 14–16
Vorbesprechung & Anmeldung: 15.09.2017, 10:00 Uhr, WSC-S-U-3.01

Inhalt: Die homologische Algebra ist eine mathematische Theorie mit einem enorm breiten Anwendungsspektrum in der Topologie, der Algebra, der Geometrie und vielen weiteren Bereichen der Mathematik. Je nach Vorkenntnissen werden wir über Ringe und Moduln sprechen, über injektive bzw. projektive Auflösungen von Moduln, Grundbegriffe der Kategorientheorie und insbesondere über links- bzw. rechtsexakte Funktoren. Als Anwendung lernen wir Ext- und Tor-Gruppen kennen, sowie die Kohomologie von Gruppen und Garben.

1. Moduln (vgl. [1], §1.4): Moduln über einem Ring; freie Moduln; Homomorphismen und Isomorphismen von Moduln; Kerne und Bilder von Modulhomomorphismen; direkte Produkte und direkte Summen von Moduln; Quotientenmoduln und die Isomorphiesätze

2. Projektive & injektive Moduln (vgl. [1], §§5.1&5.3): projektive Moduln und freie Moduln; projektive Moduln und das Liften von Homomorphismen; jeder Modul ist Quotient eines freien Moduls; injektive Moduln und das Fortsetzen von Homomorphismen; injektive und divisible Moduln über Hauptidealringen (vgl. [1], Proposition 5.3.5); jeder Modul ist Untermodul eines injektiven Moduls (vgl. [1], Lemma 5.3.4)

3. Sequenzen & Komplexe (vgl. [1], §§1.5&5.1): Sequenzen von Moduln; exakte Sequenzen; das Schlangenlemma; Ketten- und Kokettenkomplexe von Moduln; die Homologie- bzw. Kohomologiegruppen eines Ketten- bzw. Kokettenkomplexes; Homomorphismen von Komplexen; kurze exakte Sequenzen von Komplexen; die lange exakte Kohomologiesequenz (vgl. [1], Proposition 5.1.1 & Corollary 5.1.2)

4. Homotopien & Auflösungen (vgl. [1], §§5.1&5.3/4): homotope Homomorphismen von Komplexen (vgl. [1], Definition 5.1.3 & Definition 5.4.1); homotope Homomorphismen induzieren dieselben Abbildungen auf den (Ko)homologiegruppen; (ko)homologische Auflösungen eines Moduls (vgl. [1], Definition 5.1.5 und Seite 182/183); jeder Modul besitzt eine projektive und eine injektive Auflösung (vgl. [1], Proposition 5.1.8 und Proposition 5.3.3); je zwei Auflösungen sind homotop (vgl. [1], Lemma 5.1.9 für den projektiven Fall)

5. Kategorien & Funktoren (vgl. [2], §§2.2&3.2/4): Definition einer Kategorie; Beispiele: die Kategorie der Mengen, Gruppen, Vektorräume, Moduln, Ringe, topologischen Räume (vgl. [2], Beispiele in 2.2); die duale Kategorie (vgl. [2], Definition 2.6.3); Definition kovarianter und kontravarianter Funktoren; Beispiele: GL_n, stetige Funktionen, Dualraum, Vergissfunktoren; natürliche Transformationen von Funktoren; Beispiel: der Bidualraum (vgl. [2], Beispiel 3.4.5)

6. Abgeleitete Funktoren (vgl. [1], §5.1 und [4], §§2.4&2.5): additive, links- bzw. rechtsexakte Funktoren von der Kategorie der Moduln in die Kategorie der abelsche Gruppen (vgl. [1], Seite 164 für den rechtsexakten Fall); recherchieren Sie, wann ein kontravarianter Funktor links- bzw. rechtsexakt heißt; linksabgeleitete Funktoren eines rechtsexakten Funktors (die Standardnotation ist L_nF und nicht F_n wie in [1]); die lange exakte Homologiesequenz (vgl. [1], §§5.1.10–12); formulieren und beweisen Sie die analogen Ergebnisse über die rechtsabgeleiteten Funktoren R^nF eines linksexakten Funktors F (dafür verwendet man injektive Auflösungen)

7. Hom-Funktoren & Ext-Gruppen (vgl. [1], §5.4): Additivität und Exaktheitseigenschaften der Hom-Funktoren (vgl. [1], Seite 181; Beweise bitte ausführen); Definition der Ext-Gruppen über projektive oder injektive Auflösungen (vgl. [1], Proposition 5.4.2); Charakterisierung projektiver bzw. injektiver Moduln über das Verschwinden von Ext-Gruppen (vgl. [1], 5.4.4–6); die Gruppe Ext^1 und das Erweiterungsproblem von Moduln (vgl. [1], Exercise 5.4.6; ohne Beweis erklären)

8. Tensorprodukte von Moduln (vgl. [1], §§4.1&4.2): Tensorprodukte von Moduln über kommutativen Ringen; grundlegende Eigenschaften des Tensorproduktes; Tensorprodukte linearer Abbildungen; Rechtsexaktheit des Tensorproduktes; das Tensorprodukt ist im Allgemeinen nicht linksexakt; Definition flacher Moduln; flache Moduln über Hauptidealringen

9. Tor-Gruppen (vgl. [1], §5.2): Definition der Tor-Gruppen; die Tor-Gruppen können über projektive Auflösungen jeder Variablen berechnet werden (vgl. [1], Proposition 5.4.3; Beweis höchstens skizzieren); Verschwindungseigenschaften und Flachheitskriterien (vgl. [1], 5.4.6–10 soweit möglich)

10. Kohomologie von Gruppen (vgl. [3], III.1&III.6): der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ einer Gruppe G (vgl. [1], Exercises 5.2.5&5.4.5 oder [3], Seite 12); Homologie- und Kohomologiegruppen eines $\mathbb{Z}[G]$-Moduls; die Gleichungen $H_0(G, M) = M_G$ und $H^0(G, M) = M^G$ (vgl. auch [4], §6.1); zeigen Sie nachträglich, dass die Funktoren $M \mapsto M_G$ bzw. $M \mapsto M^G$ rechts- bzw. linksexakt sind; Berechnung der (Ko)homologie im Fall einer zyklischen Gruppe (vgl. [3], III.1 Examples 1&2); die langen exakten (Ko)homologiesequenzen (vgl. [3], Proposition III.6.1)

11. Garben abelscher Gruppen (vgl. [1], §§6.3–4): Prägarben und Garben auf topologischen Räumen; induktive Limiten; der Halm $\mathcal{F}_x$ einer Garbe $\mathcal{F}$ im Punkt x; Homomorphismen von Prägarben und Garben; die Garbifizierung einer Prägarbe (ohne Beweis); das Verhalten der Halme bei Garbifizierung (vgl. [1], Remark 6.5.7); Kerne, Bilder und Kokerne von Homomorphismen zwischen Garben; exakte Sequenzen von Garben; das Halmkriterium für Exaktheit (vgl. [1], Proposition 6.5.9 mit Beweisskizze)

12. Garbenkohomologie (vgl. [1], §7.7): Linksexaktheit des globalen Schnittfunktors; injektive Garben; direkte Bilder; Konstruktion injektiver Auflösungen; Definition der Garbenkohomologie; die lange exakte Kohomologiesequenz

Literatur

[1] S. Bosch: *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Universitext, Springer (2013)

[2] M. Brandenburg: *Einführung in die Kategorientheorie*, Springer Spektrum (2016)

[3] K. Brown: *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics **87**, Springer (1982)

[4] C. Weibel: *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press (1994)