Bachelorarbeit

Der Körper der p-adischen Perioden

Vorgelegt der
Fakultät für Mathematik
der Universität Duisburg-Essen

Von:
Daniel Wahlers
Matr.-Nr. 2286622

Betreut von:
Prof. Dr. J. Kohlhaase

04. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit geht es darum, den Körper der p-adischen Perioden zu konstruieren und einige Eigenschaften kennen zu lernen. Wir werden damit beginnen, Grundkenntnisse über diskrete Bewertungsringe und projektive Limiten einzuführen, um dann mit der Theorie der Wittvektoren und des Tiltingverfahrens die wesentlichen Bausteine für den Körper der p-adischen Perioden zu erlernen. Dafür starten wir mit einem vollständigen, diskret bewerteten Körper K der Charakteristik 0 und positiver Restklassencharakteristik p und erweitern diesen zu einem vollständigen, algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}_K$. Auf diesen Körper können wir zunächst die Tiltingtheorie anwenden, um anschließend mit Hilfe der Wittvektoren und des projektiven Limes den Körper der p-adischen Perioden B_{dR} zu konstruieren. Dabei werden wir sehen, dass dieser konstruierte Körper selbst diskret bewertet und vollständig ist und dass dessen Restklassenkörper wieder $\mathbb{C}_K$ ist. Abschließend werden wir kurz darauf eingehen, inwiefern B_{dR} für die algebraische Zahlentheorie von Bedeutung ist. Dabei beschränken wir uns darauf, die Unterkategorie der de Rham Darstellungen der Kategorie der stetigen $\mathbb{Q}_p$-linearen Darstellungen der absoluten Galoisgruppe gewisser Körper einzuführen.
Diese Arbeit baut auf die Vorlesung „p-adische Galoisdarstellungen" von Prof. Dr. J. Kohlhaase aus dem Sommersemester 2015 auf, in der ausführlich auf die Theorie der Wittvektoren und die Tiltingtheorie eingegangen wurde. Die Konstruktion des Körpers B_{dR} geht über den Stoff der Vorlesung hinaus und orientiert sich an [uBC]. In den Abschnitten 2, 4 und insbesondere 5 dieser Arbeit werden alle Beweise ausführlich ausgearbeitet. Lediglich der Abschnitt 3 über Wittvektoren hat den Charakter eines Überblicks und enthält viele Referenzen auf das Standardwerk [Bou83].

2 Grundlagen

2.1 Diskrete Bewertungsringe

Wir beginnen mit einer grundlegenden Art von Ringen, die für diese Arbeit von großer Bedeutung ist.

Definition 2.1.

i) Ein kommutativer Ring R mit 1 heißt *diskreter Bewertungsring*, falls R ein lokaler Hauptidealring ist, dessen maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von 0 verschieden ist.

ii) Jeder Erzeuger des maximalen Ideals wird *Uniformisierer* genannt. Es handelt sich dabei um von 0 verschiedene Primelemente von R.

Bemerkung 2.2. Sei R ein diskreter Bewertungsring und π ein Uniformisierer. Dann gelten

i) $R^* = R \backslash \mathfrak{m}$,

ii) die Abbildung $((u,n) \mapsto u\pi^n) \colon R^* \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to R \backslash \{0\}$ ist eine Bijektion. Insbesondere gilt
$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \pi^n R = \{0\},$$

iii) die Abbildung $v \colon R \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, die durch Inversion der Abbildung aus ii) und Verknüpfung mit der Projektion auf $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ hervorgeht, ist surjektiv und besitzt die Eigenschaften

a) für alle $x, y \in R \backslash \{0\}$ gilt $v(xy) = v(x) + v(y)$,

b) für alle $x, y \in R \backslash \{0\}$ gilt die starke Dreiecksungleichung
$$v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}.$$

Beweis:

i) Mit dem Lemma von Zorn zeigt sich, dass jedes echte Ideal in einem kommutativen Ring mit 1 in einem maximalen Ideal enthalten ist (vgl. Satz 6 des dritten Kapitels von [Bos09]). Ist nun $a \in R \backslash \mathfrak{m}$, so kann das von a erzeugte Ideal kein echtes sein, denn $\mathfrak{m}$ ist das einzige maximale Ideal von R. Folglich ist a eine Einheit. Andererseits enthält $\mathfrak{m}$ als maximales Ideal keine Einheiten.

ii) Da R ein Hauptidealring ist, ist jedes von 0 verschiedene Primideal maximal (vgl. Satz 6 des zweiten Kapitels von [Bos09]). Damit erhalten wir, dass alle Primelemente assoziiert zueinander sind. Nach der eindeutigen Primfaktorzerlegung existieren zu $a \in R \backslash \{0\}$ eindeutige Elemente $u \in R^*$, $n \in \mathbb{N}$ mit $a = u\pi^n$, woraus wir die Bijektivität der Abbildung folgern. Ist nun $a \in \bigcap_n \pi^n R$ mit $a \neq 0$, so existieren $u \in R^*$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $a = u\pi^k$. Damit ergibt sich aber wegen $u\pi^k = a \in \bigcap_n \pi^n R \subseteq \pi^{k+1}R$ und der Nullteilerfreiheit von R der Widerspruch $u \in \pi R = R \backslash R^*$.

iii) Die Surjektivität von v folgt aus der Bijektivität in ii) und der Surjektivität der Projektion. Weiter ist für $u_1, u_2 \in R^*$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$v(u_1\pi^{n_1} \cdot u_2\pi^{n_2}) = v(u_1u_2\pi^{n_1+n_2}) = n_1 + n_2 = v(u_1\pi^{n_1}) + v(u_2\pi^{n_2})$$

und für $n_1 \leq n_2$

$$\begin{aligned} v(u_1\pi^{n_1} + u_2\pi^{n_2}) &= v(\pi^{n_1}) + v(u_1 + u_2\pi^{n_2-n_1}) \\ &\geq n_1 = \min\{v(u_1\pi^{n_1}), v(u_2\pi^{n_2})\}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.3. *Sei R ein diskreter Bewertungsring, π ein Uniformisierer, v_R die induzierte Abbildung aus Bemerkung 2.2iii), $K := \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von R, dann gelten*

i) Die Abbildung $v\colon K^* \to \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto v_R(a) - v_R(b)$, für $a, b \in R\backslash\{0\}$, ist wohldefiniert, surjektiv und unabhängig von der Wahl von π.

ii) Für $x, y \in K^*$ gilt $v(xy) = v(x) + v(y)$.

iii) Für $x, y \in K^*$ gilt $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

iv) Als Teilmengen von K^* betrachtet gilt $\{z \in K^* \mid v(z) \geq 0\} = R\backslash\{0\}$ und $\{z \in K^* \mid v(z) > 0\} = \mathfrak{m}\backslash\{0\}$.

Bemerkung 2.4. Setzen wir v durch $v(0) = \infty$ auf K fort, so besitzt diese Abbildung dieselben Eigenschaften, indem wir $x + \infty = \infty$ setzen für $x \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Eine solche Abbildung wird *diskrete Bewertung von K* genannt. Wir erhalten außerdem $\{z \in K \mid v(z) \geq 0\} = R$ und $\{z \in K \mid v(z) > 0\} = \mathfrak{m}$. Es ist einfach zu sehen, dass ein diskret bewerteter Körper (K, v) einen diskreten Bewertungsring $\mathfrak{o}_K := \{z \in K \mid v(z) \geq 0\}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_K := \{z \in K \mid v(z) > 0\}$ liefert. Für eine genauere Betrachtung sei dazu auf den dritten Abschnitt aus dem zweiten Kapitel von [Neu92] und insbesondere auf Satz 3.9 verwiesen. Es gilt $K = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_K)$, denn zu $x \in K^*$ existiert $0 \neq a \in \mathfrak{o}_K$ mit $v(xa) = v(x) + v(a) > 0$, also $xa \in \mathfrak{o}_K$. Damit folgt $x = xaa^{-1} \in \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_K)$.

Beweis:

i) Für die Wohldefiniertheit seien $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in K^*$ gleich, das bedeutet $ad = bc$ in R. Folglich gilt

$$\begin{aligned} v\left(\frac{a}{b}\right) &= v_R(a) - v_R(b) = v_R(ad) - v_R(d) - v_R(b) \\ &= v_R(bc) - v_R(b) - v_R(d) = v_R(c) - v_R(d) \\ &= v\left(\frac{c}{d}\right), \end{aligned}$$

also ist v wohldefiniert.

Die Surjektivität der Abbildung folgt aus $v(1) = v(\pi^0) = 0$, $v(\pi^n) = n$ und $v(\frac{1}{\pi^n}) = v(1) - v(\pi^n) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Da zwei Uniformisierer assoziiert zueinander sind, ist v unabhängig von der Wahl von π. Sind nämlich π_1, π_2 Uniformisierer und $\tilde{u} \in R^*$ mit $\tilde{u}\pi_1 = \pi_2$, so ergibt sich für $u \in R^*$ und $n \in \mathbb{N}$

$$u\pi_2^n = u\tilde{u}^n\pi_1^n$$

und $u\tilde{u}^n$ ist noch immer eine Einheit.

ii) & iii) Die beiden Aussagen folgen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} v\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) &= v\left(\frac{ac}{bd}\right) = v_R(ac) - v_R(bd) = v_R(a) + v_R(c) - (v_R(b) + v_R(d)) \\ &= v_R(a) - v_R(b) + v_R(c) - v_R(d) \\ &= v\left(\frac{a}{b}\right) + v\left(\frac{c}{d}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) &= v\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) \\ &= v_R(ad + bc) - v_R(bd) \\ &\geq \min\{v_R(a) + v_R(d), v_R(b) + v_R(c)\} - v_R(b) - v_R(d) \\ &= \min\{v_R(a) - v_R(b), v_R(c) - v_R(d)\} \\ &= \min\left\{v\left(\frac{a}{b}\right), v\left(\frac{c}{d}\right)\right\}. \end{aligned}$$

iv) Seien $a = u_a\pi^{n_a}, b = u_b\pi^{n_b}$ wie zuvor und $v\left(\frac{a}{b}\right) = n_a - n_b \geq 0$. Wegen $\pi^{n_a - n_b} \in R\backslash\{0\}$ und $u_b^{-1} \in R^*$ erhalten wir $\frac{a}{b} = u_a u_b^{-1}\pi^{n_a - n_b} \in R\backslash\{0\}$, also $\{z \in K^* \mid v(z) \geq 0\} \subseteq R\backslash\{0\}$. Die andere Inklusion folgt sofort aus Bemerkung 2.2ii).

Es gilt $\{z \in K^* \mid v(z) = 0\} = R^*$, denn $v(1) = v(\frac{1}{1}) = v_R(1) - v_R(1) = 0$ und daher $0 \leq v(r) \leq v(r) + v(r^{-1}) = v(1) = 0$ für eine Einheit $r \in R^*$, also $v(r) = 0$. Andererseits ist für $\frac{a}{b} \in K^*$ mit $v(a) - v(b) = 0$ und $a = u_a \pi^{v(a)}$ bzw. $b = u_b \pi^{v(b)}$ das Element $\frac{a}{b} = u_a u_b^{-1} \pi^{v(a)-v(b)} = u_a u_b^{-1} \in R^*$. Da R ein lokaler Ring ist, erhalten wir $\mathfrak{m} = R \backslash R^* = \{z \in K \mid v(z) > 0\}$, wobei wir wie in Bemerkung 2.4 $v(0) = \infty$ setzen. □

2.2 Nicht-archimedische Körper

Bemerkung 2.5.

i) Sei (K, v) ein diskret bewerteter Körper und $e \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann erfüllt die Abbildung $|\cdot| := e^{-v(\cdot)}\colon K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $x, y \in K$ die Eigenschaften

   a) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,

   b) $|xy| = |x||y|$,

   c) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$.

   Eine solche Abbildung wird *nicht-archimedischer Absolutbetrag* genannt. Für nicht-archimedische Absolutbeträge setzen wir stets voraus, dass sie nicht trivial sind, d.h. $|K| \neq \{0, 1\}$.

ii) Gilt $|x| \neq |y|$ für $x, y \in K$, so ist $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

iii) Ist K ein Körper und $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Absolutbetrag auf K, so ist $\mathfrak{o}_K := \{x \in K\colon |x| \leq 1\}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_K := \{x \in K\colon |x| < 1\}$ und Quotientenkörper K. Insbesondere gilt: Ist R ein diskreter Bewertungsring und K sein Quotientenkörper, so gilt $R = \mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_K$.

iv) Durch $d(x, y) := |x - y|$ werden K und sein Bewertungsring $\mathfrak{o}_K$ zu metrischen und topologischen Räumen. Dabei hängt die Topologie nicht von der gewählten Zahl $e \in \mathbb{R}_{>1}$ ab.

v) Ein nicht-archimedischer Körper K ist genau dann vollständig, wenn sein Bewertungsring $\mathfrak{o}_K$ vollständig ist.

Beweis:

i) Dies folgt direkt aus den Eigenschaften der diskreten Bewertung.

ii) Angenommen, es gilt $|x| < |y|$ und $|x + y| < \max\{|x|, |y|\} = |y|$, so erhalten wir mit

$$|y| = |x + y - x| \leq \max\{|x + y|, |-x|\} = \max\{|x + y|, |x|\} < |y|$$

   einen Widerspruch.

iii) Die Abgeschlossenheit der Addition und Multiplikation für $\mathfrak{o}_K$ folgt aus den Eigenschaften des nicht-archimedischen Absolutbetrags. Für Elemente $x \in \mathfrak{o}_K$ und $a \in \mathfrak{m}_K$ ist wegen $|ax| = |a||x| < 1$ auch $ax \in \mathfrak{m}_K$. Zusammen mit der Tatsache, dass $\mathfrak{m}_K$ eine Untergruppe bzgl. der Addition von $\mathfrak{o}_K$ ist, sehen wir, dass $\mathfrak{m}_K$ ein Ideal von $\mathfrak{o}_K$ ist. Weiter gilt $1 = |1| = |xx^{-1}| = |x||x^{-1}|$ für ein Element $x \in \mathfrak{o}_K^*$, also $|x| = 1 = |x^{-1}|$. Andererseits ist ein Element $x \in K$ mit $|x| = 1$ invertierbar in $\mathfrak{o}_K$, denn aus obiger Gleichung erhalten wir $1 = |x^{-1}|$, also $x^{-1} \in \mathfrak{o}_K$. Es folgt, dass $\mathfrak{o}_K$ ein lokaler Ring ist. Die letzte Aussage folgt aus Lemma 2.3iv).

iv) Dies folgt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags. Sind $e, f \in \mathbb{R}_{>1}$ und $r > 0$, so ist

$$\{x \in K : |x|_f \leq r^{\frac{1}{\log_f e}}\} = \{x \in K : f^{-v(x)\log_f e} \leq r\} = \{x \in K : |x|_e \leq r\}.$$

Damit sind offene Kugeln bzgl. einer Topologie auch offene Kugeln bzgl. der anderen.

v) Ist $(r_n)_n \subseteq \mathfrak{o}_K \subseteq K$ eine Cauchyfolge bzgl. $|\cdot|$, so ist sie nach Annahme konvergent in K gegen ein $x \in K$. Wegen der vorigen Bemerkung und $|x| = \lim_{n\to\infty} |r_n| \leq 1$ ist $x \in \mathfrak{o}_K$ und daher $(r_n)_n$ ebenfalls in $\mathfrak{o}_K$ konvergent. Dabei haben wir die (Lipschitz-)Stetigkeit von $|\cdot|$ ausgenutzt, die aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt.
Sei andererseits $(x_n)_n \subseteq K$ eine Cauchyfolge, also insbesondere betragsmäßig beschränkt durch eine Schranke $M \in \mathbb{N}$. Da $|K| \neq \{0, 1\}$ existiert $b \in K$ mit $1 \neq |b| \neq 0$. Indem wir gegebenenfalls b durch b^{-1} ersetzen, können wir $0 < |b| < 1$ annehmen. Eine gewünschte Potenz liefert uns die Existenz von $a \in R$ mit $0 < |a| \leq 1/M$. Wir sehen mit $|ax_n| = |a||x_n| \leq |a|M \leq 1$, dass die Folge $(ax_n)_n$ auch in R eine Cauchyfolge bildet und daher konvergent gegen ein $\tilde{x} \in R$ ist. Wir setzen $x := \tilde{x} \cdot a^{-1} \in K$ und können $|x_n - x| = |a^{-1}||ax_n - \tilde{x}| \to 0$ zeigen. □

Proposition 2.6. *Sei R ein diskreter Bewertungsring und F sein Quotientenkörper und sei weiter $S \subseteq R$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathfrak{K} = R/\mathfrak{m}$ mit $0 \in S$. Ferner wählen wir ein uniformisierendes Element $\pi \in R$. Jedes $x \in F$ ist dann von der Form einer konvergenten Reihe $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \pi^m a_m$ mit eindeutig bestimmten Elementen $a_m \in S$, wobei $a_m = 0$ für fast alle $m \in \mathbb{Z}_{<0}$. Es gilt $v(x) = \min\{m \in \mathbb{Z} \mid a_m \neq 0\}$.*

Beweis: Für den Beweis sei auf den Satz 4.4 aus dem vierten Paragraphen des zweiten Kapitels von [Neu92] verwiesen. □

Bemerkung 2.7. *Seien F vollständig und $a_m \in S$ mit $a_m = 0$ für fast alle $m \in \mathbb{Z}_{<0}$. Die Reihe $\sum_m a_m \pi^m$ ist konvergent in F, denn die Folge der Partialsummen bildet eine Cauchyfolge in F. Das folgt aus der starken Dreiecksungleichung.*

Satz 2.8. *Ist* $(F, |\cdot|)$ *ein nicht-archimedischer Körper, so existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger vollständiger, nicht-archimedischer Körper* $(\hat{F}, |\cdot|^{\wedge})$ *und ein Körperhomomorphismus* $\iota: F \to \hat{F}$, *sodass gilt*

i) ι *ist isometrisch,*

ii) $\iota(F) \subseteq \hat{F}$ *ist dicht,*

iii) $(\hat{F}, |\cdot|^{\wedge})$ *ist vollständig.*

Beweis: Wir verweisen dafür auf Satz 2 des 23. Abschnitts aus [Lor97]. □

Bemerkung 2.9. Zu einem nicht-archimedischen Körper F und seiner Vervollständigung $\hat{F}$ existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathfrak{o}_F/\mathfrak{m}_F \cong \mathfrak{o}_{\hat{F}}/\mathfrak{m}_{\hat{F}}.$$

Beweis: Es gilt $\mathfrak{o}_F = \{x \in F : |x| \leq 1\}$ und $\mathfrak{m}_F = \{x \in F : |x| < 1\}$. Die Abbildung ist dann gegeben durch $x + \mathfrak{m}_F \mapsto \iota(x) + \mathfrak{m}_{\hat{F}}$ und sei bezeichnet mit Φ, wobei ι der eindeutige Körperhomomorphismus aus 2.8 ist. Aus der Isometrie von ι erhalten wir $\mathfrak{m}_F = \ker(\mathfrak{o}_F \xrightarrow{\iota} \mathfrak{o}_{\hat{F}} \xrightarrow{\text{can}} \mathfrak{o}_{\hat{F}}/\mathfrak{m}_{\hat{F}})$, woraus sowohl die Wohldefiniertheit als auch die Injektivität von Φ folgen. Für die Surjektivität von Φ sei $\hat{x} \in \mathfrak{o}_{\hat{F}}$. Da $\iota(F) \subseteq \hat{F}$ dicht liegt, existiert $x \in F$ mit $|\iota(x) - \hat{x}|^{\wedge} < 1$. Damit gilt

$$|x| = |\iota(x)|^{\wedge} = |\iota(x) - \hat{x} + \hat{x}|^{\wedge} \leq \max\{|\iota(x) - \hat{x}|^{\wedge}, |\hat{x}|^{\wedge}\} \leq 1.$$

Insbesondere ist damit $x \in \mathfrak{o}_F$ und $\hat{x} - \iota(x) \in \mathfrak{m}_{\hat{F}}$. Wir sehen

$$\Phi\left(x + \mathfrak{m}_F\right) = \iota(x) + \mathfrak{m}_{\hat{F}} = \iota\left(x\right) + \left(\hat{x} - \iota\left(x\right)\right) + \mathfrak{m}_{\hat{F}} = \hat{x} + \mathfrak{m}_{\hat{F}}.$$ □

Anstelle der Ideale $\mathfrak{m}_F$ und $\mathfrak{m}_{\hat{F}}$ können wir auch die Ideale $\alpha\mathfrak{o}_F$ bzw. $\alpha\mathfrak{o}_{\hat{F}}$ betrachten, wobei $\alpha \in \mathfrak{o}_F \backslash \{0\}$. Es gilt $\alpha\mathfrak{o}_F = \{x \in F : |x| \leq |\alpha|\}$ und der Beweis von $\mathfrak{o}_F/\alpha\mathfrak{o}_F \cong \mathfrak{o}_{\hat{F}}/\alpha\mathfrak{o}_{\hat{F}}$ folgt der gleichen Strategie.
Eine weitere wichtige Eigenschaft des nicht-archimedischen Betrags wird geliefert durch

Satz 2.10. *Sei* $(F, |\cdot|)$ *ein vollständiger nicht-archimedischer Körper und* L *eine algebraische Körpererweiterung. Dann existiert ein eindeutiger nicht-archimedischer Absolutbetrag* $|\cdot|_L$ *auf* L, *der auf* F *mit* $|\cdot|$ *übereinstimmt. Ist* L *über* F *endlich vom Grad* n, *so ist diese Fortsetzung gegeben durch*

$$|\cdot|_L = \sqrt[n]{|N_{L|F}(\cdot)|}.$$

Beweis: Für einen Beweis sei auf Theorem 4.8 des vierten Abschnitts aus dem zweiten Kapitel von [Neu92] verwiesen. □

Lemma 2.11. *Sei p eine Primzahl und A ein kommutativer Ring mit 1_A. Weiter sei $I \subseteq A$ ein Ideal mit $p \cdot 1_A \in I$ und $m, n \geq 1$. Gilt für $a, b \in A$ die Kongruenz $a \equiv b \mod I^m$, dann gilt auch $a^{p^n} \equiv b^{p^n} \mod I^{m+n}$.*

Beweis: Der Beweis läuft per Induktion über n. Betrachten wir den Fall $n = 1$ und beliebiges $m \geq 1$. Sei $P(X,Y) := \sum_{i=0}^{p-1} X^i Y^{p-1-i} \in \mathbb{Z}[X,Y]$. Dann gilt wegen $a \equiv b \mod I^m$ die Kongruenz

$$P(a,b) \equiv P(a,a) \equiv pa^{p-1} \mod I^m,$$

also $P(a,b) \in I$, da $pa^{p-1} \in I$ und $I^m \subseteq I$. Wir erhalten, wegen $a - b \in I^m$ und $P(a,b) \in I$, $a^p - b^p = (a-b)P(a,b) \in I^{m+1}$. Für den Induktionsschluss benutzen wir den Induktionsanfang für $m' = m + n$, $a' = a^{p^n}$, $b' = b^{p^n}$. □

Satz 2.12. *Sei $\mathfrak{o}$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Angenommen $\mathfrak{K} = \mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ ist ein perfekter Körper mit positiver Charakteristik p. Dann existiert eine eindeutige multiplikative Abbildung $s\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{o}$, sodass $s \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathfrak{K}}$, wobei $\alpha\colon \mathfrak{o} \twoheadrightarrow \mathfrak{K}$ die kanonische Abbildung ist. Es gilt $s(0) = 0$ und $s(1) = 1$.*

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{K}$ perfekt ist, können wir induktiv Elemente a_i für $i \geq 1$ wählen mit $\alpha(a_1)^p = x$ und $\alpha(a_{i+1})^p = \alpha(a_i)$. Weiter erhalten wir aus der Multiplikativität von α für $i \geq 1$ die Kongruenz $a_{i+1}^p \equiv a_i \mod \mathfrak{m}$. Aus 2.11 folgt $a_{i+1}^{p^{i+1}} \equiv a_i^{p^i} \mod \mathfrak{m}^{i+1}$. Das bedeutet, dass $\left(a_i^{p^i}\right)_i$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{o}$ und damit konvergent ist, denn für alle $n > m$ in $\mathbb{N}$ gilt $v(a_n^{p^n} - a_m^{p^m}) > m$. Wir setzen $s(x) := \lim_{i\to\infty} a_i^{p^i} \in \mathfrak{o}$. Zunächst bemerken wir, dass $s(x)$ unabhängig von der Wahl der a_i's ist. Ist nämlich $(b_i)_i$ eine weitere Wahl, dann gilt $\alpha(a_i)^{p^i} = x = \alpha(b_i)^{p^i}$ für $i \geq 1$. Da $x \mapsto x^p$ auf $\mathfrak{K}$ injektiv ist, folgt $\alpha(a_i) = \alpha(b_i)$ und damit $a_i \equiv b_i \mod \mathfrak{m}$. Die Folge $\left(a_i^{p^i} - b_i^{p^i}\right)_i$ ist nach Lemma 2.11 eine Nullfolge in $\mathfrak{o}$ und wir erhalten $\lim_{i\to\infty} a_i^{p^i} = \lim_{i\to\infty} b_i^{p^i}$. Damit ist $s\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{o}$ wohldefiniert. Außerdem existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s(x) - a_i^{p^i} \in \mathfrak{m}$ gilt für alle $i \geq N$. Damit folgt auch $\alpha(s(x)) = \alpha(a_i)^{p^i} = x$.
Sind nun $x, y \in \mathfrak{K}$ und $(a_i)_i, (b_i)_i$ zugehörige Cauchyfolgen, so liefert $(a_i b_i)_i$ eine passende Cauchyfolge für $xy \in \mathfrak{K}$. Daraus folgt die Multiplikativität von s. Für $0, 1 \in \mathfrak{K}$ wählt man die konstanten Folgen $(0)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{o}$ und erhält somit $s(0) = 0$ und $s(1) = 1$.
Es bleibt zu zeigen, dass s eindeutig ist. Sei $\tilde{s}\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{o}$ eine weitere multiplikative Abbildung mit $\alpha \circ \tilde{s} = \mathrm{id}_{\mathfrak{K}}$. Für $x \in \mathfrak{K}$ und $i \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\alpha\left(s\left(x^{p^{-i}}\right)\right) = x^{p^{-i}} = \alpha\left(\tilde{s}\left(x^{p^{-i}}\right)\right),$$

also

$$s\left(x^{p^{-i}}\right) \equiv \tilde{s}\left(x^{p^{-i}}\right) \mod \mathfrak{m}.$$

Mit 2.11 erhalten wir

$$s(x) = s\left(x^{p^{-i}}\right)^{p^i} \equiv \tilde{s}\left(x^{p^{-i}}\right)^{p^i} = \tilde{s}\,(x) \mod \mathfrak{m}^{i+1}.$$

Daraus folgt $s(x) - \tilde{s}(x) \in \bigcap_i \mathfrak{m}^{i+1} = \{0\}$, also $s = \tilde{s}$. □

2.3 Der Projektive Limes

Im Folgenden werden wir den projektiven Limes einführen. Dieser ist wesentlich für die nachfolgenden Konstruktionen, denn es ist möglich, mit ihm einen Modul bezüglich einer gewissen Topologie zu vervollständigen.

Definition 2.13.

i) Sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Falls zu jedem Paar $i, j \in I$ ein $k \in I$ existiert, sodass $i \leq k$ und $j \leq k$ gilt, so heißt $(I, \leq)$ *gerichtete Menge.*

ii) Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge. Unter einem *projektiven System* (von Mengen, Gruppen, Moduln oder Ringen) über I versteht man eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von Mengen, Gruppen, Moduln oder Ringen M_i mit Homomorphismen $f_{ij}: M_j \to M_i$ für $i, j \in I$ mit $i \leq j$, die die Eigenschaften

   a) für alle $i \in I$ gilt $f_{ii} = id_{M_i}$,
   b) für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k$ gilt $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$

   erfüllen.

iii) Sei $\left((M_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}\right)$ ein projektives System über I. Dann ist der zugehörige *projektive Limes* definiert durch

$$\varprojlim_{i\in I} M_i := \left\{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid f_{ij}(m_j) = m_i \;\; \forall i, j \in I : i \leq j\right\}.$$

Bemerkung 2.14.
Durch direkte Berechnung zeigt sich, dass $\varprojlim_i M_i$ ein(e) Untergruppe, -modul oder -ring von $\prod_{i\in I} M_i$ ist, falls M_i für alle $i \in I$ eine Gruppe, ein Modul oder ein Ring ist und falls alle f_{ij} die entsprechenden Homomorphismen sind.

Lemma 2.15 (Universelle Eigenschaft des projektiven Limes)**.**
Sei $((M_i)_{i\in I}, (f_{ij})_{i\leq j})$ ein projektives System über I und sei N ein weiteres Objekt des gleichen Typs wie die M_i zusammen mit Homomorphismen $g_j: N \to M_j$ für alle $j \in I$ mit $f_{ij} \circ g_j = g_i$ für $i \leq j$. Dann gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $g: N \to \varprojlim_{i\in I} M_i$, sodass für alle $i \in I$ die Abbildung

$$N \xrightarrow{g} \varprojlim_{j\in I} M_j \hookrightarrow \prod_{j\in J} M_j \xrightarrow{proj_i} M_i$$

mit g_i übereinstimmt.

Beweis: Sei dafür $n \in N$. Das Element $(g_i(n))_{i\in I} \in \prod M_i$ erfüllt für $i \leq j$:

$$f_{ij}(g_j(n)) = f_{ij} \circ g_j(n) = g_i(n)$$

und liegt daher in $\varprojlim M_i$. Wir definieren nun die wohldefinierte Abbildung $g := \prod g_i \colon N \to \varprojlim M_i \subseteq \prod M_i$. Zusammen mit g_i ist auch g ein Homomorphismus und erfüllt die gewünschte Eigenschaft. Für die Eindeutigkeit sei $\tilde{g} \colon N \to \varprojlim M_i$ ein weiterer Homomorphismus mit der Eigenschaft $\mathrm{proj}_i \circ \tilde{g} = g_i$ für alle $i \in I$. Wir erhalten dann für $n \in N$

$$g(n) = (\mathrm{proj}_i(g(n)))_{i\in I} = (\mathrm{proj}_i(\tilde{g}(n)))_{i\in I} = \tilde{g}(n),$$

also $g = \tilde{g}$. □

Wir möchten gewisse Typen von Topologien auf einem R-Modul M definieren. Es zeigt sich, dass diese bei diskreten Bewertungsringen in bestimmten Situationen mit der durch v definierten Topologie übereinstimmen.

Definition 2.16. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von R-Untermoduln von M.

i) Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen* bzgl. der Familie $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$, falls für alle $x \in U$ ein $j \in \mathbb{N}$ existiert mit $x + M_j := \{x + y \mid y \in M_j\} \subseteq U$.

ii) Eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in M heißt *Cauchyfolge* bzgl. der Familie $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$, falls für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n - x_m \in M_j$ für alle natürlichen Zahlen $m, n \geq N$ gilt.

iii) M ist *vollständig* bzgl. der Familie $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$, falls jede Cauchyfolge in M konvergiert.

Bemerkung 2.17.

i) Diese Definition von offenen Mengen gibt uns tatsächlich eine Topologie.

ii) Ist (R, v) ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so entspricht die von der oben definierten Metrik induzierte Topologie (vgl. 2.5) derjenigen, die durch die Familie $(\mathfrak{m}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiert wird.

Beweis:

i) Trivialerweise sind $\varnothing$ und M offen. Sei nun I eine Indexmenge und zu jedem $i \in I$ eine offene Menge $U_i \subseteq M$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass auch die Vereinigung dieser Mengen offen ist, also wählen wir uns $x \in \bigcup U_i$. Nun existiert

$k \in I$ mit $x \in U_k$ und, weil U_k offen ist, $j \in \mathbb{N}$ mit $x + M_j \subseteq U_k \subseteq \bigcup U_i$. Damit sind beliebige Vereinigungen offener Mengen offen. Ist nun I zusätzlich endlich und $x \in \bigcap U_i$, so existieren $j_i \in \mathbb{N}$ mit $x + M_{j_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. Setzen wir $j := \max\{j_i\colon\ i \in I\}$, so erhalten wir $x + M_j \subseteq x + M_{j_i} \subseteq U_i$ für alle $i \in I$, also $x + M_j \subseteq \bigcap U_i$. Folglich sind endliche Schnitte offener Mengen offen.

ii) Sei π ein Uniformisierer und $|\cdot| = e^{-v(\cdot)}$ mit $e \in \mathbb{R}_{>1}$. Dann ist $\mathfrak{m}^j = \pi^j \mathfrak{o} = \{x \in \mathfrak{o}\colon\ |x| < |\pi|^j\}$ eine offene Kugel mit beliebig kleinem Radius, da $|\pi|^j \to 0$. Damit entsprechen sich die Topologien. □

Im Folgenden betrachten wir eine wichtige Familie von projektiven Systemen. Sei dafür M ein R-Modul und $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von R-Untermoduln. Dann ist $(M/M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von R-Moduln, wobei wir $\mathbb{N}$ mit der Standardordnung versehen und die Übergangsabbildungen gegeben sind durch die kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned} f_{ij}\colon M/M_j &\to M/M_i \\ m + M_j &\mapsto m + M_i \end{aligned}$$

für $i \leq j$.
Mit Hilfe der universellen Eigenschaft des projektiven Limes aus Lemma 2.15 konstruieren wir eine R-lineare Abbildung $g\colon M \to \varprojlim_{i\in I} M/M_i$ aus der Familie von kanonischen Abbildungen $g_j\colon M \to M/M_j$ für $j \in \mathbb{N}$. Es zeigt sich, dass g gegeben ist durch $m \mapsto (m + M_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.18.
Für diese kanonische R-lineare Abbildung $g\colon M \to \varprojlim_{i\in I} M/M_i$, $m \mapsto (m + M_i)_{i\in I}$ gilt

i) a) g ist injektiv genau dann, wenn

b) $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j = 0$ genau dann, wenn

c) M Hausdorff (d.h. separiert) ist bzgl. der Topologie, die durch die Familie $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gegeben wird.

ii) Weiter gilt

a) g ist surjektiv genau dann, wenn

b) M vollständig ist (Definition 2.16iii)).

Beweis:

i) Für die erste Äquivalenz bemerken wir, dass $\ker g = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} M_j$.
Nun gelte b) und damit a). Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Damit ist $g(x-y) \neq g(0) = 0$,

also existiert $j \in \mathbb{N}$ mit $x - y \notin M_j$, sodass wir mit $x + M_j$ und $y + M_j$ zwei disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y gefunden haben. Ist andererseits $M \neq 0$ Hausdorff und $x \in M \backslash \{0\}$, so existiert eine offene Umgebung U von 0, in der x nicht enthalten ist. Da U offen ist, finden wir $j \in \mathbb{N}$ mit $M_j \subseteq U$, also insbesondere $x \notin \bigcap_i M_i$ und damit $\bigcap_i M_i = 0$.

ii) Sei zunächst g surjektiv und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M und sei $j \in \mathbb{N}$. Nach Definition 2.16 existiert $N_j \in \mathbb{N}$, sodass $x_n - x_{N_j} \in M_j$ für alle $n \geq N_j$ gilt. Damit ist $(x_m + M_j)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M/M_j, die wegen $x_m + M_j = x_{N_j} + M_j$ für $m \geq N_j$ konstant wird.

Ist nun $i \leq j$ und $n \geq \max\{N_i, N_j\}$, dann haben wir wegen

$$x_{N_j} + M_i = x_{N_j} + M_j + M_i = x_n + M_j + M_i = x_n + M_i = x_{N_i} + M_i$$

ein wohldefiniertes Element $y := (x_{N_j} + M_j)_j \in \varprojlim M/M_j$. Aus der Surjektivität von g schließen wir auf die Existenz von $x \in M$ mit $y = g(x) = (x + M_j)_j$, also $x - x_{N_j} \in M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Weiter gilt für $n \geq N_j$ $x - x_n = x - x_{N_j} + x_{N_j} - x_n \in M_j$, was zeigt, dass x ein Grenzwert von $(x_j)_j$ ist.

Nehmen wir nun an, M sei vollständig und $(x_j + M_j)_j \in \varprojlim M/M_j$. Nach Definition des projektiven Limes erhalten wir $x_i - x_j \in M_i$ für alle $i \leq j$, also für $n, m \geq j$

$$x_n - x_m = x_n - x_j + x_j - x_m \in M_j.$$

Die Folge $(x_j)_j$ bildet also eine Cauchyfolge in M und ist nach Annahme konvergent. Sei $x \in M$ ein Grenzwert. Zu $j \in \mathbb{N}$ wählen wir $n \geq j$ mit $x - x_n \in M_j$. Damit ist $x - x_j = x - x_n + x_n - x_j \in M_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit $g(x) = (x + M_j)_j = (x_j + M_j)$. □

3 Wittvektoren

Im Folgenden soll die Konstruktion des Rings der Wittvektoren eingeführt werden. Dieser ist einer der zwei grundlegenden Bausteine für den Körper der p-adischen Perioden. Dabei geht es darum, für einen Ring A auf der Menge $A^{\mathbb{N}}$ eine Ringstruktur zu entwickeln. Zwischen diesem Ring, den wir mit $W(A)$ bezeichnen werden, und dem Ring $A^{\mathbb{N}}$ mit den komponentenweisen Operationen werden wir einen Ringhomomorphismus finden, was es uns ermöglicht, die Struktur von $W(A)$ weiter zu untersuchen. Hauptquelle dieses Kapitels ist dabei das Buch *Algèbre commutative* [Bou83], auf welches wir für die meisten Beweise verweisen.

3.1 Die Wittpolynome

Definition 3.1.
Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt das Polynom

$$\Phi_n (X_0, \dots, X_n) := \sum_{i=0}^{n} p^i X_i^{p^{n-i}} \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n] \subseteq \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots]$$

das *n-te Wittpolynom.*

Bemerkung 3.2 (Beziehung zwischen Wittpolynomen)**.**
Aus der Definition der Wittpolynome erhalten wir die zwei Beziehungen

(i) $\Phi_0(X_0) = X_0$ und $\Phi_1(X_0, X_1) = X_0^p + pX_1$,

(ii) für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} (X_0, \dots, X_{n+1}) &= \Phi_n \left(X_0^p, \dots, X_n^p\right) + p^{n+1} X_{n+1} \\ &= X_0^{p^{n+1}} + p\Phi_n (X_1, \dots, X_{n+1}) . \end{aligned}$$

Sei nun stets A ein kommutativer Ring mit Einselement 1_A.

Lemma 3.3. *Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in A$.*

i) Falls $a_i \equiv b_i \mod p^m A$ für alle $0 \leq i \leq n$ gilt, so gilt für alle $0 \leq i \leq n$

$$\Phi_i(a_0, \dots, a_i) \equiv \Phi_i(b_0, \dots, b_i) \mod p^{m+i} A.$$

ii) Falls $p \cdot 1_A \in A$ kein Nullteiler ist, dann ist auch die umgekehrte Richtung in i) wahr.

Beweis: Diese Aussage findet sich in Proposition 1 aus dem ersten Paragraphen aus dem neunten Kapitel von [Bou83] wieder. □

Betrachten wir nun den Ring

$$A^{\mathbb{N}} := \prod_{n\geq 0} A = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A\}$$

mit den komponentenweisen Operationen und die Abbildungen

$$\begin{array}{ll}
f_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots) & \text{Ringhom.,} \\
v_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, pa_0, pa_1, \dots) & \text{Hom. add. Gruppen,} \\
\Phi_n : A^{\mathbb{N}} \to A \ \ , (a_0, a_1, \dots) \mapsto \Phi_n(a_0, \dots, a_n) \in A & \text{Polynomabb.,} \\
\Phi_A : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}, (a_0, a_1, \dots) \mapsto (\Phi_n(a_0, \dots, a_n))_{n\in\mathbb{N}} & \text{Abb. von Mengen.}
\end{array}$$

Lemma 3.4.

i) Falls $p \cdot 1_A \in A$ kein Nullteiler ist, dann ist Φ_A injektiv.

ii) Falls $p \cdot 1_A \in A$ eine Einheit ist, so ist Φ_A bijektiv.

Beweis: Dies entspricht der Proposition 2 des ersten Paragraphen aus dem neunten Kapitel von [Bou83]. □

Proposition 3.5. *Sei $\phi: A \to A$ ein Ringhomomorphismus mit $\phi(a) \equiv a^p \mod pA$ für alle $a \in A$. Dann ist $A' := \Phi_A\left(A^{\mathbb{N}}\right) \subseteq A^{\mathbb{N}}$ ein Unterring von $A^{\mathbb{N}}$ mit*

i) $f_A(A') \subseteq A'$,

ii) $v_A(A') \subseteq A'$,

iii) $A' = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} : \ \phi(u_n) \equiv u_{n+1} \mod p^{n+1}A \forall n \geq 0\right\}$.

Beweis: Hierfür sei auf Proposition 2 des ersten Paragraphen aus dem neunten Kapitel von [Bou83] verwiesen. □

Wir betrachten nun den Ring $A = \mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots]$ der unendlich vielen Unbekannten $X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots$ über $\mathbb{Z}$ und den Ringhomomorphismus $\phi : A \to A$, $f(X_0, X_1, \dots, Y_0, Y_1, \dots) \mapsto f(X_0^p, X_1^p, \dots, Y_0^p, Y_1^p, \dots)$ zusammen mit den Elementen $X := (X_0, X_1, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ und $Y := (Y_0, Y_1, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$.

Bemerkung 3.6.

i) Die Multiplikation mit p ist injektiv auf A, also ist Φ_A injektiv nach Lemma 3.4i).

ii) Da $A/pA \cong \mathbb{F}_p[X_0, X_1 \dots, Y_0, Y_1 \dots]$ und $x \mapsto x^p$ auf $\mathbb{F}_p$ die Identiät ist, erhalten wir die Kongruenz $\phi(f) \equiv f^p \mod pA$ für alle $f \in A$.

3.2 Die Ringstruktur des Rings der Wittvektoren

Proposition 3.7.

i) Es existieren eindeutige Elemente $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F = (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A^{\mathbb{N}}$, sodass in $A^{\mathbb{N}}$ Folgendes gilt:

a) $\Phi_A(S) = \Phi_A(X) + \Phi_A(Y)$,

b) $\Phi_A(P) = \Phi_A(X) \cdot \Phi_A(Y)$,

c) $\Phi_A(I) = -\Phi_A(X)$,

d) $\Phi_A(F) = f_A(\Phi_A(X))$.

ii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $S_n, P_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots X_n, Y_0, \dots Y_n]$, $I_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ und $F_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n+1}]$.

iii) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Kongruenz $F_n \equiv X_n^p \mod pA$.

Beweis: Für den ersten Teil bemerken wir, dass die Eindeutigkeit der Polynome aus der Injektivität von Φ_A folgt. Die Existenz folgt aus Proposition 3.5. Für den restlichen Beweis sei auf den dritten Abschnitt des ersten Paragraphen aus Kapitel IX von [Bou83] verwiesen. □

Bemerkung 3.8. Es ist

i) $S_0(X_0, Y_0) = X_0 + Y_0$,

ii) $P_0(X_0, Y_0) = X_0 Y_0$ und $P_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1) = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + pX_1 Y_1$,

iii) $I_0(X_0) = -X_0$ und $I_1(X_0, X_1) = \frac{1}{p}\left(-(X_0^p + pX_1) - (-1)^p X_0^p\right)$.

Beweis: Es ist

$$\Phi_0(X_0 + Y_0) = X_0 + Y_0 = (0.\text{ Folgenglied von } \Phi_A(X) + \Phi_A(Y)) = \Phi_0(S) = S_0,$$

$$-\Phi_0(X_0) = -X_0 = (0.\text{ Folgenglied von } \Phi_0(I)) = I_0$$

und

$$\Phi_0(X_0 Y_0) = X_0 Y_0 = (0.\text{ Folgenglied von } \Phi_A(X)\Phi_A(Y)) = \Phi_0(P) = P_0.$$

Damit erhalten wir bereits die Polynome S_0, P_0 und I_0.
Weiter ist $\Phi_1(X)\Phi_1(Y) = (X_0^p + pX_1)(Y_0^p + pY_1) = X_0^p Y_0^p + p(X_1 Y_0^p + X_0^p Y_1) + p^2 X_1 Y_1$, also mit Bemerkung 3.2

$$\begin{aligned} pP_1 &= \Phi_1(P_0, P_1) - P_0^p = \Phi_1(X)\Phi_1(Y) - P_0^p \\ &= p(X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p) + p^2 X_1 Y_1. \end{aligned}$$

Nun ist p kein Nullteiler in A, sodass wir $P_1 = X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p + pX_1Y_1$ erhalten. Wegen $\Phi(X_0, X_1) = X_0^p + pX_1$ ist mit gleichem Argument wie zuvor

$$pI_1 = -(X_0^p + pX_1) - (-X_0)^p.$$

Für $p = 2$ ergibt sich $pI_1 = -pX_0^p + pX_1$ und für $p \geq 3$ erhalten wir $pI_1 = -pX_1$. Das Polynom $I_1 = \frac{1}{p}\left(-(X_0^p + pX_1) - (-1)^p X_0^p\right)$ besitzt also Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. □

Sei nun B ein kommutativer Ring mit $1 = 1_B$. Sei weiter $W(B) = B^{\mathbb{N}}$ als Menge mit den binären Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$, gegeben durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (S_n(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots))_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\text{und } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \odot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (P_n(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Setzen wir $0_{W(B)} := (0_B, 0_B, \ldots)$ und $1_{W(B)} := (1_B, 0_B, 0_B, \ldots)$, so können wir den ersten wichtigen Satz des Kapitels formulieren:

Satz 3.9 (Witt)**.**

i) $(W(B), \oplus, \odot)$ *ist ein kommutativer Ring mit Nullelement* $0_{W(B)}$ *und Einselement* $1_{W(B)}$. *Das additive Inverse von* $(b_n)_n$ *ist* $(I_n(b_0, \ldots, b_n))_n$.

ii) Die Abbildung $\Phi_B : W(B) \to B^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_n \mapsto (\Phi_n(b_0, \ldots, b_n))_n$ *ist ein Ringhomomorphismus.*
Insbesondere ist $\Phi_m : W(B) \to B$, $(b_n)_n \mapsto \Phi_m(b_0, \ldots, b_m)$ *ein Ringhomomorphismus für alle* $m \geq 0$.

iii) Falls $\rho : B_1 \to B_2$ *ein Homomorphismus von kommutativen Ringen mit* 1 *ist, dann ist* $W(\rho) = \rho^{\mathbb{N}} = \left((b_n)_n \mapsto (\rho(b_n))_n\right) : W(B_1) \to W(B_2)$ *ein Ringhomomorphismus.*

Beweis: Wir verweisen hier auf Théorème 1 des ersten Paragraphen aus dem Kapitel IX von [Bou83]. □

3.3 Die Frobenius- und Verschiebungsabbildung

Definition 3.10.

i) $(W(B), \oplus, \odot)$ wird *Ring der Wittvektoren mit Koeffizienten in B* genannt,

ii) für $b = (b_0, b_1, \ldots) \in W(B)$ heißt $\Phi_n(b_0, \ldots, b_n) \in B$ die *n-te Geisterkomponente von b*,

iii) $F : W(B) \to W(B)$, $(b_n)_n \mapsto (F_n(b_0, b_1, \ldots))_n$ heißt *Frobeniusabbildung*,

iv) $V : W(B) \to W(B), (b_0, b_1 \ldots) \mapsto (0, b_0, b_1, \ldots)$ heißt *Verschiebungsabbildung.*

Bemerkung 3.11. Nach Konstruktion von $(F_n)_n$ und Bemerkung 3.2 kommutieren die Diagramme:

$$\begin{tikzcd} W(B) \arrow[r, "\phi_B"] \arrow[d, "F"] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "f_B"] \\ W(B) \arrow[r, "\phi_B"] & B^{\mathbb{N}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W(B) \arrow[r, "\phi_B"] \arrow[d, "V"] & B^{\mathbb{N}} \arrow[d, "v_B"] \\ W(B) \arrow[r, "\phi_B"] & B^{\mathbb{N}}. \end{tikzcd}$$

Proposition 3.12.

i) F ist ein Ringendomorphismus von $W(B)$,

ii) V ist ein Homomorphismus additiver Gruppen bezüglich $\oplus$,

iii) für alle $b \in W(B)$ gilt $(F \circ V)(b) = p \cdot b := \underbrace{b \oplus \ldots \oplus b}_{p\text{-mal}}$,

iv) für alle $a, b \in W(B)$ gilt $V(a \odot F(b)) = V(a) \odot b$,

v) für alle $b \in W(B)$ gilt $F(b) \equiv b^p := \underbrace{b \odot \ldots \odot b}_{p\text{-mal}} \mod pW(B)$.

Beweis: Hierfür sei auf Proposition 3 aus dem ersten Paragraphen von Kapitel IX von [Bou83] verwiesen. □

Für $m \geq 0$ definieren wir

$$V_m(B) := \operatorname{Im}(V^m) = \{(b_n)_n \in W(B) \colon\ b_0 = \ldots = b_{m-1} = 0\}.$$

Es gilt

$$W(B) = V_0(B) \supseteq V_1(B) \supseteq \ldots$$

und

$$\bigcap_{m \geq 0} V_m(B) = \left\{0_{W(B)}\right\}.$$

Außerdem handelt es sich wegen 3.12ii) und iv) bei $V_m(B)$ um ein Ideal von $W(B)$.

Definition 3.13.
$W_m(B) := W(B)/V_m(B)$ heißt *Ring der Wittvektoren der Länge m.*

Lemma 3.14.

i) Für $m \geq 1$ und $(b_n)_n \in W(B)$ gilt

$$(b_n)_n = (b_0, \ldots, b_{m-1}, 0, 0, \ldots) \oplus (0, \ldots, 0, b_m, b_{m+1}, \ldots),$$

ii) die Abbildung $B^m \to W_m(B)$, $(b_0, \ldots, b_{m-1}) \mapsto (b_0, \ldots, b_{m-1}, 0, 0, \ldots) \oplus V_m(B)$ ist für $m \geq 1$ eine Bijektion von Mengen.

Beweis: Für die erste Aussage verweisen wir auf Lemma 4 des ersten Paragraphen von Kapitel IX von [Bou83]. Die Surjektivität der Abbildung in ii) folgt aus i). Für die Injektivität seien $b_i, c_i \in B$ für $0 \le i < m$ mit

$$(b_0, \dots, b_{m-1}, 0, 0, \dots) \oplus V_m(B) = (c_0, \dots, c_{m-1}, 0, 0, \dots) \oplus V_m(B).$$

Wir finden also $(0, \dots, 0, b_m, b_{m+1}, \dots) \in V_m(B)$ mit

$$\begin{aligned}(c_0, \dots, c_{m-1}, 0, 0, \dots) &= (b_0, \dots, b_{m-1}, 0, 0, \dots) \oplus (0, \dots, 0, b_m, b_{m+1} \dots) \\ &\overset{i)}{=} (b_0, \dots, b_{m-1}, b_m, b_{m+1} \dots),\end{aligned}$$

also $c_i = b_i$ für alle $0 \le i < m$. □

Bemerkung 3.15. Nach 3.9ii) und 3.14ii) ist $\Phi_0 : W(B) \to B$, $(b_n)_n \mapsto b_0$ ein Ringhomomorphismus mit Kern $V_1(B)$. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$W_1(B) = W(B)/V_1(B) \cong B.$$

Lemma 3.16. *Die Abbildung $\tau : B \to W(B)$, $b \mapsto (b, 0, 0, \dots)$ ist multiplikativ.*

Beweis: Dies findet sich in Gleichung 38 aus Paragraph 1 des Kapitels IX von [Bou83] wieder. □

Bemerkung 3.17. τ ist ein mengentheoretischer Schnitt des Ringhomomorphismus $W(B) \to B$, $b = (b_n)_n \mapsto b_0$. Damit ist

$$b + V_1(B) = \tau(b_0) + V_1(B).$$

τ wird auch *Teichmüller-Lift* genannt.

Lemma 3.18. *Für alle $k \ge 1$ gilt $V_1(B)^k = p^{k-1} \cdot V_1(B)$.*

Beweis: Der Beweis läuft über Induktion nach k. Dabei ist der Induktionsanfang für $k = 1$ offensichtlich. Für den Induktionsschritt benötigen wir auch den Fall $k = 2$: Seien $a, b \in W(B)$. Nutzen wir 3.12iii) und iv) und die Additivität von V aus, so erhalten wir

$$V(a) \odot V(b) = V\big(a \odot F(V(b))\big) = V(a \odot pb) = pV(a \odot b)$$

und damit $V_1(B)^2 = pV_1(B) = p\,\mathrm{Im}(V)$. Gilt nun für ein $k \ge 2$ die Behauptung, so ist

$$V_1(B)^{k+1} = V_1(B)^k V_1(B) = p^{k-1} V_1(B) V_1(B) = p^k V_1(B).$$ □

3.4 Eigenschaften des Rings der Wittvektoren

Definition 3.19. Sei B ein kommutativer Ring mit 1 und Charakteristik p. Dann ist $(b \mapsto b^p)\colon B \to B$ ein Ringendomorphismus, der *Frobenius* genannt wird.

Satz 3.20. *Sei wie zuvor* $\mathrm{char}(B) = p$.

i) Für $b = (b_n)_n \in W(B)$ gilt $F(b) = (b_n^p)_n$,

ii) es ist $pb = V \circ F(b) = F \circ V(b) = (0, b_0^p, b_1^p, \dots)$ für $b = (b_n)_n \in W(B)$,

iii) für alle $n, m \geq 0$ und $a, b \in W(B)$ gilt

$$V^m(a) \odot V^n(b) = V^{m+n}(F^n(a) \odot F^m(b)),$$

iv) für alle $n, m \geq 0$ gilt $V_m(B) \odot V_n(B) \subseteq V_{m+n}(B)$,

v) für alle $k \geq 1$ gilt $p^k W(B) \subseteq V_1(B)^k \subseteq p^{k-1} W(B)$,

vi) der natürliche Ringhomomorphismus $W(B) \to \varprojlim_k W(B)/p^k W(B)$ ist bijektiv. Nach Proposition 2.18 bedeutet das, dass $W(B)$ p-adisch vollständig und separiert ist.

Beweis: Die ersten drei Aussagen entsprechen den Gleichungen 51, 52 und 53 (erster Paragraph, Kapitel IX von [Bou83]). Die vierte Aussage folgt direkt aus der dritten. Nun gilt für $k \geq 1$ unter Verwendung der zweiten Aussage

$$\begin{aligned} p^k W(B) &= (pW(B))^k = ((V \circ F)(W(B)))^k \\ &\subseteq (V_1(B))^k = p^{k-1} V_1(B) \\ &\subseteq p^{k-1} W(B). \end{aligned}$$

Für die letzte Behauptung verweisen wir auf Proposition 6 aus Kapitel IX von [Bou83]. □

Proposition 3.21. *Sei* $\mathrm{char}(B) = p$ *und B perfekt, d.h. $(x \mapsto x^p)\colon B \to B$ ist bijektiv.*

i) Für $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in W(B)$ und $m \geq 1$ gilt

$$b \oplus V_m(B) = \sum_{i=0}^{m-1} p^i \tau\left(b_i^{p^{-i}}\right) \oplus V_m(B),$$

ii) für alle $k \geq 0$ gilt $V_k(B) = p^k W(B) = V_1(B)^k$.

Beweis: Die Gleichheit in i) kann mit 3.14i) und 3.20ii) direkt nachgerechnet werden. Für ii) bemerken wir, dass F wegen der Perfektheit von B und 3.20i) ein Ringautomorphismus von $W(B)$ ist. Damit erhalten wir erneut mit 3.20

$$\begin{aligned} p^k W(B) &= (V \circ F)^k (W(B)) = V^k (F^k W(B)) = V^k (W(B)) = \operatorname{Im}(V^k) \\ &= V_k(B). \end{aligned}$$

Dadurch folgt auch $V_1(B)^k = (pW(B))^k = p^k W(B)$. □

Satz 3.22. *Sei B ein Körper der Charakteristik p. Dann gilt:*

i) W(B) ist ein Integritätsbereich mit eindeutigem maximalem Ideal $V_1(B) = \operatorname{Im}(V)$,

ii) $W(B)$ ist $V_1(B)$-adisch separiert und vollständig,

iii) Falls B zusätzlich perfekt ist, so ist $W(B)$ ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Uniformisierer p und Restklassenkörper B. Für $b = (b_n)_n \in W(B)$ gilt $b = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \tau\left(b_n^{p^{-n}}\right)$.

Beweis:

ii) Wegen $p^k W(B) \subseteq V_1(B)^k \subseteq p^{k-1} W(B)$ (vgl. 3.20v)) entsprechen sich die Topologien, die durch die absteigenden Folgen $(p^k W(B))_k$ und $(V_1(B)^k)_k$ definiert werden. Nun ist $W(B)$ p-adisch separiert und vollständig nach 3.20vi), also auch bzgl. der Topologie durch $(V_1(B)^k)_k$.

i) Wir haben in Bemerkung 3.15 gesehen, dass $W(B)/V_1(B) \cong B$. Daraus folgt bereits, dass $V_1(B)$ ein maximales Ideal ist. Um zu zeigen, dass $W(B)$ nullteilerfrei ist, seien $a = (0 \ldots, 0, a_n, a_{n+1}, \ldots), b = (0, \ldots, 0, b_m, b_{m+1}, \ldots) \in W(B)$ mit $a_n \neq 0 \neq b_m$. Es zeigt sich, dass dann $a \odot b \neq 0_{W(B)}$ gilt, denn

$$\begin{aligned} a \odot b &= V^n(a_n, a_{n+1}, \ldots) \odot V^m(b_m, b_{m+1}, \ldots) \\ &\overset{3.20iii)}{=} V^{n+m}(F^m(a_n, \ldots) \odot F^n(b_m, \ldots)) \\ &\overset{3.20i)}{=} V^{n+m}((a_n^{p^m}, \ldots) \odot (b_m^{p^n}, \ldots)) \\ &= V^{n+m}(a_n^{p^m} b_m^{p^n}, *, \ldots) \\ &= (0 \ldots, 0, a_n^{p^m} b_m^{p^n}, *, \ldots) \\ &\neq 0_{W(B)}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $V_1(B)$ das einzige maximale Ideal von $W(B)$ ist. Das folgern wir daraus, dass jedes $b = (b_n)_n \in W(B) \backslash V_1(B)$ eine Einheit ist.

Sei also $b = (b_n)_n \in W(B)\backslash V_1(B)$. Damit ist $b_0 \in B\backslash\{0\} = B^*$. Setzen wir $a := \tau(b_0^{-1}) = (b_0^{-1}, 0, 0, \dots)$, so erhalten wir mit Lemma 3.14i)

$$a \odot b = (1, c_1, c_2, \dots) = 1_{W(B)} \oplus (0, c_1, c_2, \dots)$$

mit geeignetem $c := (0, c_1, c_2, \dots) \in V_1(B)$. Damit ist $(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c^i)_n$ eine Cauchyfolge bzgl. der Topologie, die durch $(V_1(B)^k)_k$ definiert wird, also nach 3.22ii) konvergent in $W(B)$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir, dass der Grenzwert das multiplikative Inverse von $1 \oplus c = a \odot b$ ist. Damit ist auch b invertierbar in $W(B)$.

iii) Da $p \cdot 1_{W(B)} \overset{3.20ii)}{=} (0, 1, 0, 0, \dots) \neq 0$, ist $V_1(B) = pW(B)$ von Null verschieden. Nun ist nach den ersten beiden Teilen $W(B)$ ein lokaler Integritätsring, der p-adisch separiert und vollständig ist. Damit können wir jedes Element von $W(B)$ darstellen als Produkt einer Einheit und einer eindeutigen Potenz von p. Für ein von 0 verschiedenes Ideal $I \subseteq W(B)$ bezeichne $d := \min\{n \in \mathbb{N}\colon\ p^n \in I\}$. Es gilt dann $I = p^d W(B)$, insbesondere ist $W(B)$ ein Hauptidealring und damit ein vollständiger diskreter Bewertungsring. □

Bemerkung 3.23. Aus dem Beweis geht Folgendes hervor: Ist B lediglich ein nullteilerfreier Ring mit Charakteristik p, so ist $W(B)$ noch immer ein Integritätsbereich mit Primideal $V_1(B) = \mathrm{Im}(V)$. Außerdem gilt 3.22ii) noch immer.

Lemma 3.24. *Sei B ein Körper mit Charakteristik p. Dann hat der Körper* $\mathrm{Quot}(W(B))$ *die Charakteristik* 0.

Beweis: Sei l eine Primzahl mit $l \cdot 1_{W(B)} = 0$ in $W(B)$. Dann ist $l = 0$ in $B \cong W(B)/V_1(B)$, also $l = p = \mathrm{char}(B)$. Dies steht im Widerspruch zu $p \cdot 1_{W(B)} \overset{3.20ii)}{=} (0, 1, 0, \dots) \neq 0$. □

Satz 3.25 (Eindeutigkeit der Wittvektoren)**.** *Angenommen, (R, m) ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring, dessen Restklassenkörper $R/m =: \mathfrak{K}$ perfekt ist mit Charakteristik p.*

i) Es gibt einen eindeutigen Ringhomomorphismus $\gamma\colon W(\mathfrak{K}) \to R$, sodass $\gamma(x) \equiv x_0$ mod *m in $\mathfrak{K}$ für alle $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W(\mathfrak{K})$.*

ii) Der Homomorphismus γ ist stetig und erfüllt

$$\gamma((x_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n s\left(x_n^{p^{-n}}\right),$$

wobei $s\colon \mathfrak{K} \to R$ der multiplikative Schnitt der Restklassenabbildung $\alpha\colon R \to \mathfrak{K}$ aus 2.12 ist.

iii) Falls $p \cdot 1_R \neq 0$, dann ist γ injektiv.

Beweis: Für die erste Aussage und die Stetigkeit verweisen wir auf Théorème 2 des zweiten Abschnitts aus Kapitel IX von [Bou83]. Die Darstellung von γ finden wir in Gleichung (4) an gleicher Stelle wieder. Für die dritte Aussage wählen wir einen Uniformisierer $\pi \in R$. Da $0 \neq p \in \mathfrak{m} = \pi R$, finden wir eine natürliche Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $v(p) = e$, wobei v die diskrete Bewertung von R sei (vgl. Lemma 2.3). Für $m \in e\mathbb{N}$ setzen wir $\pi_m := p^{\frac{m}{e}}$. Sei nun $(x_n)_n \in \ker(\gamma)$, also

$$0 = \gamma((x_n)_n) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n s(x_n^{p^{-n}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ne} s(x_n^{p^{-n}}).$$

Aus der Eindeutigkeit von 2.6 erhalten wir $s(x_n^{p^{-n}}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und folglich $x_n = 0$. Damit ist γ injektiv. $\square$

4 Der Tilt

In diesem Kapitel wird das zweite wesentliche Verfahren für die Konstruktion des Körpers der p-adischen Perioden eingeführt. Hierbei stützen wir uns auf die Vorlesung zu p-adischen Galoisdarstellungen aus dem Sommersemester 2015 bei Herrn Prof. Dr. J. Kohlhaase.

Definition 4.1. Ein Körper K mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|: K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *perfektoid*, falls

i) K vollständig bezüglich $|\cdot|$ ist,

ii) $|K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dicht ist,

iii) die Abbildung $(x \mapsto x^p): \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ surjektiv ist, wobei $p := \mathrm{char}(\mathfrak{K}_K) > 0$ und $\mathfrak{K}_K$ den Restklassenkörper von K bezeichnet.

Als Beispiel zeigen wir dies für die Klasse von Körpern, die im nachfolgenden Kapitel für uns von Bedeutung sein werden. Sei p eine Primzahl, $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger, diskret bewerteter Körper mit perfektem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$, sodass $\mathrm{char}(K) = 0$ und $\mathrm{char}(\mathfrak{K}) = p$, zum Beispiel $\mathbb{Q}_p$. Wir setzen $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$ und wissen aus 2.8 und 2.10, dass sich der Absolutbetrag von K auf $\mathbb{C}_K$ fortsetzen lässt.

Lemma 4.2. $(\mathbb{C}_K, |\cdot|)$ *ist perfektoid.*

Beweis:

i) $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$ ist nach Konstruktion vollständig bezüglich $|\cdot|$.

ii) Zu zeigen: $|\mathbb{C}_K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ ist dicht. Da der Absolutbetrag auf K als nicht-trivial vorausgesetzt wird, existiert $x \in K^*$ mit $q := |x| \neq 1$. Es folgt $q^{\mathbb{Z}} \subseteq |K^*|$. Wegen $K^* \subseteq \mathbb{C}_K^*$ folgt $q^{\mathbb{Z}} \subseteq |\mathbb{C}_K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. Da alle Wurzeln von x als Nullstellen der Polynome $t^n - x \in \overline{K}[t]$ in $\overline{K} \subseteq \mathbb{C}_K$ liegen (für alle $n \in \mathbb{N}$), erhalten wir

$$q^{\frac{1}{\mathbb{Z}_{\geq 1}}} \subseteq |\mathbb{C}_K^*|$$

und damit insgesamt

$$q^{\mathbb{Q}} \subseteq |\mathbb{C}_K^*|.$$

Nun ist die Abbildung $\log_q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ein Homeomorphismus und $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, sodass auch $|\mathbb{C}_K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dicht ist.

iii) Wir wissen aus Satz 2.8, dass $\overline{K} \overset{\text{dicht}}{\subseteq} \widehat{\overline{K}} = \mathbb{C}_K$, woraus wir mit Bemerkung 2.5 die Isomorphie $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \cong \mathfrak{o}_{\overline{K}}/p\mathfrak{o}_{\overline{K}}$ folgern können. Nun ist die Abbildung $(x \mapsto x^p)$: $\mathfrak{o}_{\overline{K}} \to \mathfrak{o}_{\overline{K}}$ surjektiv, denn für ein festes $y \in \mathfrak{o}_{\overline{K}}$ zerfällt das Polynom

$t^p - y \in \mathfrak{o}_{\bar{K}}[t] \subseteq \overline{K}[t]$ in Linearfaktoren in $\overline{K}[t]$. Für $x \in \overline{K}$ mit $x^p = y$ gilt $|x|^p = |x^p| = |y| \leq 1$ und damit auch $|x| \leq 1$. Wir erhalten $x \in \mathfrak{o}_{\overline{K}}$ und damit die behauptete Surjektivität. Dies impliziert sofort, dass auch die Abbildung modulo p surjektiv ist und zusammen mit dem obigen Isomorphismus folgt die Surjektivität der Abbildung $x \mapsto x^p \colon \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. □

Definition 4.3. Sei K ein perfektoider Körper. Wir setzen

$$\mathfrak{o}_{K^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K \mid a_{n+1}^p = a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bemerkung 4.4. Da p in $\mathfrak{K}$ Null ist, liegt p im maximalen Ideal von $\mathfrak{o}_K$, ist also keine Einheit. Daher ist der Quotient $\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ von Null verschieden und wir erhalten $\mathrm{char}(\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K) = p$. Die Abbildung $(x \mapsto x^p)$ ist folglich ein Ringendomorphismus von $\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$, woraus resultiert, dass $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein Unterring der Charakteristik p von $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ bezüglich der komponentenweisen Operationen ist.

Proposition 4.5.

i) *Sei $a = (a_n)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ mit $a_n = \alpha_n + p\mathfrak{o}_K$ für $\alpha_n \in \mathfrak{o}_K$. Dann existiert der Limes $a^\sharp := \lim_{n \to \infty} \alpha_n^{p^n}$ in $\mathfrak{o}_K$ und ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten α_n,*

ii) *die Abbildung $\sharp \colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K$, $a \mapsto a^\sharp$, ist multiplikativ und erfüllt $a^\sharp + p\mathfrak{o}_K = a_0$,*

iii) *der Ring $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ist ein perfekter Ring mit Charakteristik p, d.h. $(a \mapsto a^p) \colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_{K^\flat}$ ist bijektiv,*

iv) *wir definieren das multiplikative Monoid*

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_K := \left\{ (\alpha_n)_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{o}_K \mid \alpha_{n+1}^p = \alpha_n \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann ist die Abbildung $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_{K^\flat}$, $(\alpha_n)_n \mapsto (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wohldefinierte, multiplikative Bijektion mit der Inversen

$$\mathfrak{o}_{K^\flat} \ni a = (a_n)_n \mapsto \left(\left(a^{1/p^n} \right)^\sharp \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Beweis:

i) Sei zunächst $(\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Wegen $\mathfrak{o}_{K^\flat} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ ist $\alpha_{n+1}^p \equiv \alpha_n \mod p\mathfrak{o}_K$ und mit 2.11 erhalten wir $\alpha_{n+1}^{p^{n+1}} \equiv \alpha_n^{p^n} \mod p^{n+1}\mathfrak{o}_K$, also eine Cauchyfolge $(\alpha_n^{p^n})_n$ im vollständigen Ring $\mathfrak{o}_K$. Der Limes $a^\sharp := \lim_{n \to \infty} \alpha_n^{p^n}$ existiert also. Sei nun $(\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_n = (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$, also $\beta_n \equiv \alpha_n \mod p\mathfrak{o}_K$. Erneut erhalten wir mit 2.11 $\alpha_n^{p^n} \equiv \beta_n^{p^n} \mod p^{n+1}\mathfrak{o}_K$, also ist $(\alpha_n^{p^n} - \beta_n^{p^n})_n$ eine Nullfolge in $\mathfrak{o}_K$ und es ist $\lim_{n \to \infty} \alpha_n^{p^n} = \lim_{n \to \infty} \beta_n^{p^n}$.

ii) Seien $a = (a_n)_n = (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_n, b = (b_n)_n = (\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Dann ist $ab = (a_n b_n)_n = (\alpha_n\beta_n + p\mathfrak{o}_K)$ und wir sehen

$$(ab)^\sharp = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n\beta_n)^{p^n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{p^n}\beta_n^{p^n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{p^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \beta_n^{p^n} = a^\sharp b^\sharp.$$

Die Abbildung $\pi\colon \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ ist stetig, da Urbilder einelementiger Teilmengen von $\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ von der Form $x + p\mathfrak{o}_K$ in $\mathfrak{o}_K$ und damit offen sind. Daraus folgt $a^\sharp + p\mathfrak{o}_K = \pi(a^\sharp) = \lim_{n\to\infty} \pi(\alpha_n)^{p^n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n} = \lim_{n\to\infty} a_0 = a_0$.

iii) Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \overset{Def.}{=} \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ und $0 = a^p = (a_0^p, a_1^p, a_2^p, \dots) = (a_0^p, a_0, a_1, \dots)$, also $a = 0$, was bereits die Injektivität der Abbildung $(a \mapsto a^p)\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_{K^\flat}$ zeigt. Für die Surjektivität sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ gegeben. Dann ist $b = (a_1, a_2, \dots) \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ und es gilt $b^p = (a_1^p, a_2^p, \dots) = (a_0, a_1, \dots) = a$.

iv) Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ gilt wegen der Multiplikativität von $\sharp$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\left(a^{1/p^{n+1}}\right)^\sharp\right)^p = \left(a^{p/p^{n+1}}\right)^\sharp = \left(a^{1/p^n}\right)^\sharp,$$

demnach ist die zweite Abbildung wohldefiniert und rechtsinvers zur ersten nach ii), denn

$$\begin{aligned} a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto \left(\left(a^{1/p^n}\right)^\sharp\right)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\left(a^{1/p^n}\right)^\sharp + p\mathfrak{o}_K\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{ii)}{=} \left(\left(a^{1/p^n}\right)_0\right)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

wobei mit $\left(a^{1/p^n}\right)_0$ der nullte Eintrag des Elementes $a^{1/p^n} \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq \prod \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ gemeint ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die erste Abbildung injektiv ist.
Seien also $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}, (\beta_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathfrak{o}_K$ mit $\alpha_m \equiv \beta_m \mod p\mathfrak{o}_K$. Nach 2.11 gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ wegen $\alpha_{m+n} = \beta_{m+n} \mod p\mathfrak{o}_K$

$$\alpha_m = \alpha_{m+n}^{p^n} = \beta_{m+n}^{p^n} = \beta_m \mod p^{n+1}\mathfrak{o}_K.$$

Nun ist $\mathfrak{o}_K$ p-adisch separiert, das bedeutet $\bigcap_{n\geq 1} p^n\mathfrak{o}_K = 0$, also $\alpha_m = \beta_m$.

Die Multiplikativität der Abbildung zeigt sich durch

$$(\alpha_n\beta_n)_n \mapsto (\alpha_n\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_n = (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_n(\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_n. \qquad \square$$

Proposition 4.6.

i) $|\cdot|_\flat\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \mapsto |a^\sharp|$ *ist ein nicht-archimedischer Absolutbetrag,*

ii) es gilt $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K|$ *aufgefasst als Teilmengen von* $\mathbb{R}_{\geq 0}$*,* *iii) für $a, b \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ gilt $|a|_\flat \leq |b|_\flat$ genau dann, wenn $a\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq b\mathfrak{o}_{K^\flat}$,*

iv) falls $p^\flat \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ die Gleichung $|p^\flat|_\flat = |p|$ erfüllt, so ist die Abbildung $\mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$, $(a_n)_n \mapsto a_0$, ein surjektiver Ringhomomorphismus mit Kern $p^\flat\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Wir erhalten den Isomorphismus $\mathfrak{o}_{K^\flat}/p^\flat\mathfrak{o}_{K^\flat} \cong \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$.

Beweis:

i) Nach 4.5ii) ist $\sharp$ multiplikativ. Mit $|\cdot|$ ist daher auch $|\cdot|_\flat$ multiplikativ. Weiter gilt wegen $0^\sharp = 0$ in $\mathfrak{o}_K$ auch $|0|_\flat = 0$. Andererseits folgt aus $0 = |a|_\flat = |a^\sharp|$ für ein Element $a \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ die Gleichung $a^\sharp = 0$ und aus der Multiplikativität von $\sharp$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$((a^{1/p^n})^\sharp)^{p^n} = a^\sharp = 0.$$

Nun ist $\mathfrak{o}_K$ ein Integritätsbereich, sodass $(a^{1/p^n})^\sharp = 0$ und damit nach 4.5iv) $a = 0$ folgt.

Für die Dreiecksungleichung seien $a = (a_n)_n = (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_n$, $b = (b_n)_n = (\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|a + b|_\flat = |(a + b)^\sharp| = |\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n)^{p^n}| &= \lim_{n\to\infty} |\alpha_n + \beta_n|^{p^n} \\ \leq \lim_{n\to\infty} \max\left\{|\alpha_n|^{p^n}, |\beta_n|^{p^n}\right\} &= \max\{|a|_\flat, |b|_\flat\}.\end{aligned}$$

ii) Per Definition gilt $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat \subseteq |\mathfrak{o}_K|$. Sei andererseits $\alpha \in \mathfrak{o}_K\backslash\{0\}$. Da $|K^*| \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ dicht ist (K perfektoid), existiert $\pi \in \mathfrak{o}_K$ mit $|p| < |\pi| < 1$. Dabei liegt p in $\mathfrak{m}_K$, da der Restklassenkörper die Charakteristik p besitzt. Wähle nun $m \geq 0$, sodass $|\pi^{m+1}| < |\alpha| \leq |\pi^m|$ gilt. Daraus folgen die Ungleichungen $|p| < |\pi| < |\pi^{-m}\alpha| \leq 1$, also $\pi^{-m}\alpha \in \mathfrak{o}_K$. Da K perfektoid ist, existieren modulo $p\mathfrak{o}_K$ jeweils p-te Wurzeln γ bzw. δ von π bzw. $\pi^{-m}\alpha$ in $\mathfrak{o}_K$. Es sei bemerkt, dass wegen voriger Ungleichungen γ und δ ungleich Null sein müssen. Weiter ist $|\gamma^p| > |p|$, denn sonst wäre mit γ^p auch $\pi = \pi - \gamma^p + \gamma^p \in p\mathfrak{o}_K$ im Widerspruch zu $|\pi| > |p|$. Wir erhalten mit Hilfe der starken Dreiecksungleichung und $|\gamma^p| > |p| \geq |\pi - \gamma^p|$ die Gleichung

$$|\pi| = |\pi - \gamma^p + \gamma^p| = \max\{|\pi - \gamma^p|, |\gamma^p|\} = |\gamma^p| = |\gamma|^p.$$

Mit der gleichen Argumentation für δ und $\pi^{-m}\alpha$ folgt

$$|\pi^{-m}\alpha| = |\pi^{-m}\alpha - \delta^p + \delta^p| = |\delta|^p.$$

Wir bekommen über diese Konstruktion also ein Element $\beta_1 := \gamma^m\delta \in \mathfrak{o}_K\backslash\{0\}$

mit der Eigenschaft, dass

$$|\alpha| = |\pi^m \pi^{-m}\alpha| = |\pi|^m |\pi^{-m}\alpha| = |\gamma^m \delta|^p = |\beta_1|^p.$$

Induktiv erhalten wir für jedes $n \geq 1$ Elemente $\beta_n \in \mathfrak{o}_K \backslash \{0\}$ mit $|\alpha| = |\beta_n|^{p^n}$. Nun konvergiert die Folge $|\beta_n| = |\alpha|^{1/p^n}$ gegen Eins, sodass für genügend große natürliche Zahlen n zusätzlich $|p| < |\beta_n|$ gilt.

Für ein solches n setze $b_0 = \beta_n + p\mathfrak{o}_K \in \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ und ergänze mit Hilfe der Surjektivität der Abbildung $(x \mapsto x^p)\colon \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ zum Element $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Nach Proposition 4.5ii) ist $b^\sharp - \beta_n \in p\mathfrak{o}_K$, woraus $|b^\sharp - \beta_n| \leq |p|$ folgt. Mit Hilfe der Eigenschaft $|p| < |\beta_n|$ und der starken Dreiecksungleichung sehen wir

$$|b|_\flat = |b^\sharp| = |b^\sharp - \beta_n + \beta_n| = |\beta_n|.$$

Damit erhalten wir $|\alpha| = |\beta_n|^{p^n} = |b|_\flat^{p^n} = |b^{p^n}|_\flat \in |\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat$.

iii) Seien zunächst $a = (a_n)_n, b = (b_n)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ mit $a\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq b\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Es existiert also ein $z \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ mit $a = bz$. Wegen $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K| \subseteq [0,1]$ gilt

$$|a|_\flat = |bz|_\flat = |b|_\flat |z|_\flat \leq |b|_\flat.$$

Falls nun umgekehrt $|a|_\flat \leq |b|_\flat$ gilt, dann setzen wir $\alpha_n := (a^{1/p^n})^\sharp \in \mathfrak{o}_K$ und $\beta_n := (b^{1/p^n})^\sharp \in \mathfrak{o}_K$ für $n \in \mathbb{N}$. So ergibt sich die Gleichung

$$|\alpha_0| = |a^\sharp| = |a|_\flat \leq |b|_\flat = |b^\sharp| = |\beta_0|$$

und daraus mit Hilfe von Proposition 4.5iv) (Wohldefiniertheit der inversen Abbildung) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\alpha_n| = |\alpha_0|^{1/p^n} \leq |\beta_0|^{1/p^n} = |\beta_n|.$$

Falls $\beta_n = 0$, so sehen wir auch $\beta_0 = 0$ und damit auch $a = 0 = b$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$. In diesem Fall ist die Aussage trivial. Sei also $\beta_n \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir können aus obiger Ungleichungskette auf die Existenz von $\gamma_n \in \mathfrak{o}_K$ mit $\alpha_n = \gamma_n\beta_n$ schließen. Erneut erhalten wir aus der Wohldefiniertheit der Elemente $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathfrak{o}_K$ (vgl. Proposition 4.5 iv))

$$\gamma_n\beta_n = \alpha_n = \alpha_{n+1}^p = \gamma_{n+1}^p\beta_{n+1}^p = \gamma_{n+1}^p\beta_n$$

und, da $\mathfrak{o}_K$ ein Integritätsbereich ist, daher $\gamma_n = \gamma_{n+1}^p$. Wir bekommen ein wohldefiniertes Element $c := (\gamma_n + p\mathfrak{o}_K)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Nach Proposition 4.5iv) gilt

$a = (\alpha_n + p\mathfrak{o}_K)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (\beta_n + p\mathfrak{o}_K)_{n\in\mathbb{N}}$. Es folgt $a = bc$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ und damit die Behauptung $a\mathfrak{o}_{K^\flat} \subseteq b\mathfrak{o}_{K^\flat}$.

iv) Wie zuvor lässt sich jedes $a_0 \in \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$ zu einer Familie $(a_n)_n \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ ergänzen. Daraus folgt bereits die Surjektivität der Abbildung $\Phi := ((a_n)_n \mapsto a_0)\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$. Zuletzt berechnen wir den Kern dieser Abbildung:

$$\begin{aligned}\ker(\Phi) = \{a \in \mathfrak{o}_{K^\flat}\colon a_0 = 0\} &\overset{4.5ii)}{=} \{a \in \mathfrak{o}_{K^\flat}\colon a^\sharp \in p\mathfrak{o}_K\}\\ &= \{a \in \mathfrak{o}_{K^\flat}\colon |a|_\flat = |a^\sharp| \leq |p| = |p^\flat|_\flat\}\\ &\overset{\text{iii)}}{=} p^\flat\mathfrak{o}_{K^\flat}.\end{aligned}$$

□

Korollar 4.7. *$\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ist ein Integritätsbereich. $|\cdot|_\flat\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ setzt sich fort zu einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|_\flat\colon K^\flat \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $K^\flat := \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_{K^\flat})$. Außerdem gilt $|K^\flat|_\flat = |K|$ und $\mathfrak{o}_{K^\flat} = \{x \in K^\flat\colon |x|_\flat \leq 1\}$, wobei $K = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_K)$.*

Beweis: Sei $ab = 0$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Dann gilt $|a|_\flat|b|_\flat = |ab|_\flat = |0|_\flat = 0$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und daher $|a|_\flat = 0$ oder $|b|_\flat = 0$. Nach Proposition 4.6i) ist $|\cdot|_\flat$ ein Absolutbetrag, woraus $a = 0$ oder $b = 0$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ folgt.
Die Abbildung $|\cdot|_\flat\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist multiplikativ und ungleich 0 für Elemente aus $\mathfrak{o}_{K^\flat}\backslash\{0\}$. Eine Fortsetzung auf dem Quotientenkörper $K^\flat$ ist daher gegeben durch

$$\left|\frac{x}{y}\right|_\flat = \frac{|x|_\flat}{|y|_\flat} \text{ für } x, y \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \text{ und } y \neq 0.$$

Wir erhalten mit Hilfe von Proposition 4.6ii)

$$|K^\flat|_\flat = |\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat|\mathfrak{o}_{K^\flat}\backslash\{0\}|_\flat^{-1} = |\mathfrak{o}_K||\mathfrak{o}_K\backslash\{0\}|^{-1} = |K|.$$

Falls nun $x = \frac{y}{z} \in K^\flat$ mit $|x| \leq 1$, $y, z \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ und $z \neq 0$, so ist $|y|_\flat \leq |z|_\flat$ und damit nach Proposition 4.6iii) $y \in z\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Insgesamt also $x = \frac{y}{z} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Aus Proposition 4.5ii) folgt $|\mathfrak{o}_{K^\flat}|_\flat = |\mathfrak{o}_K| \subseteq [0, 1]$ und damit die umgekehrte Inklusion. □

Bemerkung 4.8. Falls p die Charakteristik von K ist, so ist $\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K = \mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{o}_K$ ist perfekt nach Definition 4.1iii). Die Abbildung $((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto a_0)\colon \mathfrak{o}_{K^\flat} = \varprojlim \mathfrak{o}_K \to \mathfrak{o}_K$ ist jetzt ein Isomorphismus von Ringen, der uns einen isometrischen Isomorphismus $(K^\flat, |\cdot|_\flat) \to (K, |\cdot|)$ liefert. Das Tiltingverfahren ist in diesem Fall also trivial.

Proposition 4.9. *$K^\flat$ ist ein perfekter Körper der Charakteristik p, der vollständig ist bezüglich $|\cdot|_\flat$.*

Beweis: Nach 4.5iii) ist $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein perfekter Ring der Charakteristik p. Daraus folgt bereits die erste Behauptung, denn $K^\flat = \mathrm{Quot}(\mathfrak{o}_{K^\flat})$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ vollständig bezüglich $|\cdot|_\flat$ ist, denn daraus folgt wegen Bemerkung 2.5 die zweite

Aussage. Falls nun $\mathrm{char}(K) = p$, so ist einerseits nach voriger Bemerkung $(K, |\cdot|) \cong (K^\flat, |\cdot|_\flat)$ und andererseits K vollständig nach Definition 4.1. Das impliziert die Vollständigkeit von $K^\flat$ bezüglich $|\cdot|_\flat$.
Nehmen wir also an, dass die Charakteristik von K nicht p ist. Da $p = 0$ im Restklassenkörper von $\mathfrak{o}_K$ ist, kommt jetzt nur noch 0 als Charakteristik für K infrage. Sei $\left(a^{(m)}\right)_m = \left(\left(a_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$. Da $p \neq 0$ in K gilt, ist $|p| \neq 0$ und damit existiert für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ ein $N > 0$, sodass $a^{(m)} - a^{(m')} \in \left\{b \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \colon |b|_\flat < |p|^{p^n}\right\}$ für alle $m, m' \geq N$ gilt.
Sei $b = (b_k)_k \in \left\{\tilde{b} \in \mathfrak{o}_{K^\flat} \colon |\tilde{b}|_\flat < |p|^{p^n}\right\} \subseteq \mathfrak{o}_{K^\flat}$. Dann gilt $|\left(b^{1/p^n}\right)^\sharp| = |b^{1/p^n}|_\flat < |p|$, also $(b^{1/p^n})^\sharp \in p\mathfrak{o}_K$ und daher mit 4.5iv) $b_n = \left(b^{1/p^n}\right)^\sharp + p\mathfrak{o}_K = 0$. Da wir mit einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ gestartet sind, müssen alle Komponentenfolgen $\left(a_n^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ stationär werden in $\mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K$. Wir setzen

$$a_n := \lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} \in \mathfrak{o}_K/p\mathfrak{o}_K.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Elemente uns einen wohldefinierten Grenzwert für die Cauchyfolge liefern. Sei also $n \in \mathbb{N}$ und danach m_n so groß gewählt, dass sowohl $a_n = a_n^{(m_n)}$ als auch $a_{n+1} = a_{n+1}^{(m_n)}$ gilt. Da die Folge $\left(a^{(m)}\right)_m$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$ verläuft, gilt $a_{n+1}^p = \left(a_{n+1}^{(m_n)}\right)^p = a_n^{(m_n)} = a_n$ und daher ist $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{K^\flat}$ ein wohldefiniertes Element.
Schlussendlich sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wie zuvor gesehen existiert ein $N > 0$, sodass $a_n^{(m)} = a_n$ für alle $m \geq N$ gilt. Nach 4.5iv) folgt $0 = a_n^{(m)} - a_n = \left(\left(a^{(m)} - a\right)^{1/p^n}\right)^\sharp + p\mathfrak{o}_K$ und damit $|\left(a^{(m)} - a\right)^{1/p^n}|_\flat = |\left(\left(a^{(m)} - a\right)^{1/p^n}\right)^\sharp| \leq |p|$. Da $|\cdot|_\flat$ als Absolutbetrag multiplikativ ist, folgt

$$|a^{(m)} - a|_\flat \leq |p|^{p^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also $a = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}$ bezüglich $|\cdot|_\flat$ in $\mathfrak{o}_{K^\flat}$. □

Definition 4.10. Ist $(K, |\cdot|)$ ein perfektoider Körper, so heißt $\left(K^\flat, |\cdot|_\flat\right)$ *Tilt* von $(K, |\cdot|)$.

5 Der Körper der p-adischen Perioden

Wir haben nun die wesentlichen Bausteine zur Konstruktion des Körpers der p-adischen Perioden eingeführt, für die wir uns an Olivier Brinons und Brian Conrads Notes on p-adic Hodge theory [uBC] orientieren. Sei in diesem Abschnitt p eine Primzahl, $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger, diskret bewerteter Körper mit perfektem Restklassenkörper $\mathfrak{K}$, sodass $\operatorname{char}(K) = 0$ und $\operatorname{char}(\mathfrak{K}) = p$ gilt. Der Körper $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$ ist nach Lemma 4.2 perfektoid, sodass wir seinen Tilt $\mathbb{C}_K^\flat$ und dessen Bewertungsring

$$\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \overset{4.5iv)}{\cong} \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \text{ (als multiplikative Monoide)}$$

betrachten können.
Zunächst konstruieren wir einen Ringhomomorphismus $\theta \colon W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ und erhalten damit $\theta_K \colon W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}] \to \mathbb{C}_K$. Wir werden zeigen können, dass die Kerne dieser Homomorphismen Hauptideale sind. Wir definieren den Ring

$$B_{dR}^+ := \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/\ker(\theta_K)^j$$

und können zeigen, dass dieser ein vollständiger, diskreter Bewertungsring ist. Sein Quotientenkörper heißt Körper der p-adischen Perioden B_{dR}.

5.1 Die Abbildung θ

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir zunächst die Ringhomomorphismen

$$\phi := (x \mapsto x^p) \colon \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},$$
$$\vartheta_n := ((x_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto x_n) \colon \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.$$

Nach Definition des projektiven Limes $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ gilt für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung $\phi \circ \vartheta_{n+1} = \vartheta_n$. Wir haben in 3.9iii) gesehen, dass die Konstruktion der Wittvektoren funktoriell ist, sodass wir das kommutative Diagramm von Ringen von Wittvektoren

$$\begin{tikzcd} W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \arrow[d, "W(\vartheta_{n+1})"] \arrow[dr, "W(\vartheta_n)"] & \\ W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "W(\phi)=F=\text{Witt-Frob.}"'] & W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \end{tikzcd}$$

erhalten.

Setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\theta_n : W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) &\overset{W(\vartheta_n)}{\longrightarrow} W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) \overset{\text{can}}{\longrightarrow} W_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right), \\
f_n : W_{n+1}\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) &\longrightarrow W_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) \text{ definiert durch} \\
(a_0, \dots, a_n) + V_{n+1}\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) &\longmapsto \left(a_0^p, \dots, a_{n-1}^p\right) + V_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right),
\end{aligned}
$$

so erhalten wir unter Verwendung von 3.20i) Ringhomomorphismen, die zusätzlich die Eigenschaft $\theta_n = f_n \circ \theta_{n+1}$ erfüllen, denn das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \ni \left(a^{(l)}\right)_l = \left(\left(a_m^{(l)}\right)_m\right)_l \arrow[r, mapsto, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, mapsto, "\theta_n"] & \left(a_{n+1}^{(l)}\right)_l + V_{n+1}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[d, mapsto, "f_n"] \\
\left(a_n^{(l)}\right)_l + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, phantom, "\underset{\text{Def. } \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}}{=}"] & \left(\left(a_{n+1}^{(l)}\right)^p\right)_l + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})
\end{tikzcd}
$$

kommutiert. Nach der universellen Eigenschaft des projektiven Limes erhalten wir den eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) &\to \varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \\
v &\mapsto (\theta_n(v))_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Proposition 5.1. *α ist bijektiv.*

Beweis:
Injektivität: Sei

$$v = \left(v^{(k)}\right)_k = \left(\left(v_m^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_{m\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$$

mit $(\theta_n(v))_{n\in\mathbb{N}} = 0$. Das bedeutet, dass für $n \in \mathbb{N}$ die n-te Komponente

$$0 = \theta_n(v) = \left(v_n^{(0)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, \dots, v_n^{(n-1)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$$

erfüllt und damit $v_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} = 0$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ für alle $0 \le k < n$ gilt. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $v_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n > k$ haben wir dies bereits gesehen, für $0 < m \le k+1$ gilt, da $v \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, schon $v_{k+1-m}^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} = \left(v_{k+1}^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)^{p^m} = 0$. Wir erhalten insgesamt $v = 0$ und damit die Injektivität von α.
Surjektivität: Sei

$$\left(\left(v_n^{(0)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, \dots, v_n^{(n-1)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}).$$

Mit 3.14ii) sehen wir, dass $\left(v_{n+1}^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)^p = v_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ gilt für $0 \le k < n$.
Für $0 < m \le k+1$ setzen wir $v_{k+1-m}^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} = \left(v_{k+1}^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)^{p^m}$, sodass wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein wohldefiniertes Element $\left(v_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_n \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ erhalten. Nun ist $v = \left(\left(v_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_n\right)_k \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ ein Urbild, was die Surjektivität von α zeigt. □

Bemerkung 5.2. $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ operiert auf $\overline{K}$, $\mathbb{C}_K$, $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ und via $\sigma^\flat$ auf $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$, wobei $\sigma^\flat$ im Nachfolgenden konstruiert wird. Durch $W\left(\sigma^\flat\right)$ operiert G_K dann auf $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$ und mit einer ähnlichen Konstruktion wie bei $\sigma^\flat$ erhalten wir die G_K-Operation auf $\varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$.

Beweis:

$\mathbb{C}_K$: Da nach 2.10 der Absolutbetrag eindeutig auf $\overline{K}$ fortgesetzt wird, gilt für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ stets $|\cdot|\circ\sigma = |\cdot|$. Für $x, y \in \overline{K}$ gilt dann $|\sigma(x)-\sigma(y)| = |\sigma(x-y)| = |x-y|$, womit jedes Element von $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ stetig ist. Da $\overline{K} \subseteq \mathbb{C}_K$ dicht ist, existiert nun eine eindeutige Fortsetzung $\overline{\sigma}$ von $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ auf $\mathbb{C}_K = \hat{\overline{K}}$. Durch die Eindeutigkeit erhalten wir so die Operation auf $\mathbb{C}_K$.

$\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$: Es gilt $|\cdot| \circ \sigma = |\cdot|$ auf $\mathbb{C}_K$ und daher $\sigma(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ für alle $\sigma \in G_K$ und damit sogar $\sigma(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) = \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Die Operation auf $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ ist also die Einschränkung der Operation auf $\mathbb{C}_K$.

$\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$: Hierfür bemerken wir $\sigma(p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) = p\sigma(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) = p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Die Abbildung

$$\bar{\sigma} = \sigma \mod p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} = (x + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \mapsto \sigma(x) + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) : \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$$

ist wohldefiniert und liefert uns die gewünschte Operation.

$\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$: Die Abbildungen $\overline{\sigma}$ und $(x \mapsto x^p)$: $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ kommutieren. Daher existiert nach der universellen Eigenschaft des projektiven Limes $\sigma^\flat$: $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$, denn wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \arrow[r, "\vartheta_{n+1}"] \arrow[dr, "\vartheta_n"'] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[r, "\overline{\sigma}"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, "x\mapsto x^p"] \\
& \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[r, "\overline{\sigma}"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.
\end{tikzcd}$$

Dies gibt uns die Operation auf $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$.

$\varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$: Seien zunächst $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in G_K$. Wir kennen bereits die Operation auf $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, die wir nun ebenfalls mit σ bezeichnen. Es gilt $W(\sigma)\big(V_n(W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}))\big) \subseteq V_n(W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}))$, denn $\sigma(0) = 0$. Wir erhalten somit eine Operation $\bar{\sigma}$ auf $W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{f_k} W_k(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r] \arrow[dr] & W_{n+1}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & W_{n+1}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[d, "f_n"] \\
& W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})
\end{tikzcd}$$

bekommen wir mit der universellen Eigenschaft des projektiven Limes die gesuchte Operation auf $\varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$. □

Wir können nun zeigen, dass die zuvor eingeführte Abbildung α auch G_K-äquivariant ist. Seien dazu $\sigma \in G_K$, $v = \left(\left(v_n^{(l)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{l\in\mathbb{N}} \in W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha(v)) &= \sigma\left((\theta_n(v))_n\right) = \sigma\left(\left((v_n^{(0)},\dots,v_n^{(n-1)}) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)_n\right) \\
&= \left(\sigma\left((v_n^{(0)},\dots,v_n^{(n-1)})\right) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)_n \\
&= \left(\left(\sigma(v_n^{(0)}),\dots,\sigma(v_n^{(n-1)})\right) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)_n \\
&= \alpha(\sigma(v)).
\end{aligned}$$

Lemma 5.3. *Für $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Abbildung $\psi_n\colon W_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, die das Diagramm*

$$(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \longmapsto \Phi_n(a_0,\dots,a_n)$$

$$\begin{tikzcd}
(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \arrow[d, mapsto] & W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\Phi_n"] \arrow[d] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, "can"] \\
(a_m + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_m + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) & W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. ψ_n ist ein G_K-äquivarianter Ringhomomorphismus mit

$$\psi_n\left((c_m + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{m\in\mathbb{N}} + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right) = \sum_{j=0}^{n-1} p^j c_j^{p^{n-j}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.$$

Beweis: Die vertikale, kanonische Abbildung

$$W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \twoheadrightarrow W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \twoheadrightarrow W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$$

ist surjektiv, woraus die Eindeutigkeit von ψ_n folgt.
Um die Existenz zu zeigen, verwenden wir Lemma 2.11. Gilt für $a, b \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ die Kongruenz $a \equiv b \mod p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, so auch

$$a^{p^{n-i}} \equiv b^{p^{n-i}} \mod p^{n+1-i}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$$

für $0 \le i < n$ und damit

$$p^i a^{p^{n-i}} \equiv p^i b^{p^{n-i}} \mod p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.$$

Wir erhalten die wohldefinierte Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned} \psi_n = \overline{\Phi}_n : W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) &\to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \\ ((c_0 + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, \dots, c_{n-1} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})) &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} p^i c_i^{p^{n-i}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der expliziten Darstellungen aller Abbildungen erkennen wir sofort, dass das Diagramm in der Behauptung kommutiert.
Es bleibt zu zeigen, dass ψ_n ein G_K-äquivarianter Ringhomomorphismus ist. Mit Ausnahme von ψ_n wissen wir bereits von den drei anderen Abbildungen im Diagramm, dass sie Ringhomomorphismen sind (siehe Satz 3.9ii)). Nun ist $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \twoheadrightarrow W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})$ zusätzlich surjektiv, woraus insgesamt folgt, dass ψ_n ein Ringhomomorphismus ist.
Für die G_K-Invarianz wählen wir uns ein beliebiges $\sigma \in G_K$ und berechnen

$$\begin{aligned} &\psi_n\left(\sigma\left((c_m + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{m\in\mathbb{N}} + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)\right) \\ &\qquad = \psi_n\left((\sigma(c_m) + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{m\in\mathbb{N}} + V_m(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right) \\ &\qquad = \sum_{j=0}^{n-1} p^j (\sigma(c_j))^{p^{n-j}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \\ &\qquad = \sigma\left(\sum_{j=0}^{n-1} p^j c_j^{p^{n-j}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) \\ &\qquad = \sigma\left(\psi_n\left((c_m + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{m\in\mathbb{N}} + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})\right)\right). \end{aligned}$$ □

Wir kommen jetzt zur Konstruktion von $\theta\colon W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Zunächst kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W_{n+1}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\psi_{n+1}"] \arrow[d, "f_n"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^{n+1}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"] \\ W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, \end{tikzcd}$$

denn eine direkte Berechnung ergibt

$$\begin{tikzcd}
(c_m + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{0\le m\le n} + V_{n+1}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, mapsto, "\psi_{n+1}"] \arrow[dd, mapsto, "f_n"] & \sum_{j=0}^{n+1-1} p^j c_j^{p^{n+1-j}} + p^{n+1}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can}"] \\
& \sum_{j=0}^{n-1} p^j c_j^{p^{n+1-j}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, equal] \\
(c_m^p + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{0\le m\le n-1} + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, mapsto, "\psi_n"] & \sum_{j=0}^{n-1} p^j (c_j^p)^{p^{n-j}} + p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},
\end{tikzcd}$$

sodass folglich auch

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^{n+1}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, two heads, "\mathrm{can}"] \\
& \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(a_m)_m \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \psi_{n+1}(a_{n+1}) \\
& \psi_n(a_n)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach der universellen Eigenschaft des projektiven Limes erhalten wir einen G_K-äquivarianten Ringhomomorphismus

$$\psi\colon \varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \to \varprojlim_{n} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$$

und setzen

$$\theta:\ W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \overset{\alpha}{\underset{\sim}{\to}} \varprojlim_{f_n} W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \overset{\psi}{\to} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \underset{2.18}{\cong} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},$$

wobei wir bemerken, dass zusammen mit $\mathbb{C}_K$ auch $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ bezüglich $(p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{n\in\mathbb{N}}$ vollständig und wegen $|p| < 1$ separiert ist. Explizit gilt die Formel

$$\theta\left(\left(r^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \left(r^{(n)^{p^{-n}}}\right)^\sharp$$

für $r^{(n)} = (r_k^{(n)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für den Beweis dieser Formel sei zunächst $r = (r_n + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$, wobei wir mit Hilfe von 4.5iv) die Repräsentanten so wählen, dass $r_{n+1}^p = r_n$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Insbesondere gilt also $r^\sharp = r_0$. τ bezeichne erneut den Teichmüller-Lift, also $\tau(r) = (r, 0, \dots) \in W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\theta(\tau(r)) &= \psi(\alpha(\tau(r))) \\
&= \psi\left((\theta_n(\tau(r)))_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \psi\left((\theta_n((r, 0, \dots)))_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \psi\left(((r_n + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, 0 \dots) + V_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}))_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \left(\left(p^0 r_n^{p^{n-0}} + \sum_{j=1}^{n-1} p^j 0^{p^{n-j}}\right) + p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(r_n^{p^n} + p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(r_0 + p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= r^\sharp,
\end{aligned}$$

wobei wir erst im letzten Schritt den Isomorphismus $\varprojlim \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \cong \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ anwenden und $r_0 = r^\sharp$ verwenden.
Nutzen wir nun aus, dass θ wegen $\theta(p) = p$ stets p-adisch stetig ist, so können wir für ein beliebiges Element $\left(r^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \overset{3.22iii)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p^n \tau\left({r^{(n)}}^{p^{-n}}\right) \in W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$ die Behauptung

$$\theta\left(\left(r^{(n)}\right)_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n \theta\left(\tau\left({r^{(n)}}^{p^{-n}}\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p^n \left({r^{(n)}}^{p^{-n}}\right)^\sharp$$

zeigen.

Bemerkung 5.4.

i) θ ist surjektiv.

ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{can}"] & & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \arrow[r, "\theta_n"] & W_n(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}) \arrow[r, "\psi_n"] & \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p^n\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

iii) Wir können $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ als eine $W(\overline{\mathfrak{K}})$-Algebra auffassen.

Beweis:

i) Sei $s \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Wir setzen $s_0^{(0)} := s$ und konstruieren mit Hilfe der Surjektivität von $(x \mapsto x^p)\colon \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ das wohldefinierte Element

$$(s_0^{(0)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}, s_1^{(0)}, \dots) \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}.$$

Nach Proposition 4.5iv) existiert eine Familie $(\alpha_n^{(0)}) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ mit $\alpha_n^{(0)} \equiv s_n^{(0)} \mod p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Induktiv konstruieren wir nun ein Urbild $\alpha = (\alpha^{(k)})_k \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ von s mit $\alpha^{(k)} = (\alpha_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_n \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$. Dafür benötigen wir eine Hilfsfamilie $(s^{(k)})_k = ((s_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_n)_k \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, sodass wir folgende Eigenschaften haben

i) für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt ${\alpha_{n+1}^{(k)}}^p = \alpha_n^{(k)}$,

ii) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $s_k^{(k)} \equiv \alpha_k^{(k)} \mod p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$,

iii) für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $s - \sum_{j=0}^{k-1} p^j \alpha_j^{(j)} = p^k s_k^{(k)}$.

Den Fall $k = 0$ haben wir bereits betrachtet. Für $k \geq 1$ zeigt sich

$$s - \sum_{j=0}^{k-1} p^j \alpha_j^{(j)} \overset{iii)}{=} p^{k-1} s_{k-1}^{(k-1)} - p^{k-1} \alpha_{k-1}^{(k-1)} \overset{ii)}{\in} p^k \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},$$

woraus wir auf die Existenz von $s_k^{(k)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ mit der Eigenschaft iii) schließen können. Wie zuvor erhalten wir ein Element $(s_n^{(k)} + p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K})_n \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$, welches uns mit Proposition 4.5iv) die gesuchten Elemente $\alpha_n^{(k)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert. Da $|p^k|$ bei k gegen unendlich gegen 0 geht und da $|s_k^{(k)}| \leq 1$ gilt, folgern wir $s = \sum_{j \in \mathbb{N}} p^j \alpha_j^{(j)} = \sum_j p^j (\alpha^{(j)\sharp})^{p^{-j}} = \sum_j p^j (\alpha^{(j)^{p^{-j}}})^\sharp = \theta((\alpha^{(k)})_k)$.

ii) Eine direkte Berechnung ergibt

$$\begin{tikzcd}
W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \ni \left(r^{(j)}\right)_{j\geq 0} \arrow[r, mapsto, "\theta"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{can}"] & \sum_{j=0}^{\infty} p^j \left(\left(r^{(j)}\right)^{p^{-j}}\right)^\sharp \arrow[r, mapsto, "\mathrm{can}"] & \sum_{j=0}^{\infty} p^j \left(r_0^{(j)}\right)^{p^{-j}} + p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \arrow[d, equal] \\
\left(r^{(j)}\right)_j + V_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \arrow[r, mapsto, "\theta_n"] & \left(r_n^{(j)}\right)_j + V_n\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\right) \arrow[r, mapsto, "\psi_n"] & \sum_{j=0}^{n-1} p^j \left(r_n^{(j)}\right)^{p^{n-j}} + p^n \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},
\end{tikzcd}$$

wobei wir für $j \in \mathbb{N}$ die Repräsentanten $r_n^{(j)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ nach Proposition 4.5iv) erneut so wählen, dass ${r_{n+1}^{(j)}}^p = r_n^{(j)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

iii) Wir erinnern daran, dass eine endliche Körpererweiterung $E|F$ vollständiger, diskret bewerteter Körper *unverzweigt* heißt, falls die Körpererweiterung ihrer Restklassenkörper separabel und vom gleichen Grad ist. Nach Korollar 7.3 aus dem siebten Abschnitt des zweiten Kapitels von [Neu92] liefert das Kompositum zweier unverzweigter Erweiterungen von F selbst eine unverzweigte Erweiterung. Damit ist die Vereinigung aller endlichen unverzweigten Erweiterungen von F ein Unterkörper eines algebraischen Abschlusses $\overline{F}$, den wir *maximale unverzweigte Erweiterung* von F nennen und mit F^{nr} bezeichnen. Sein Restklassenkörper ist nach Satz 7.5 aus dem siebten Paragraphen des zweiten Kapitels von [Neu92] gegeben durch den separablen Abschluss des Restklassenkörpers von F.

Hier ist also $\mathfrak{K}^{\mathrm{sep}} = \overline{\mathfrak{K}}$ der Restklassenkörper von K^{nr} und nach 2.9 ist er auch der Restklassenkörper von $\widehat{K^{nr}}$. Wir finden mit 3.25 einen injektiven Ringhomomorphismus $h: W(\overline{\mathfrak{K}}) \to \mathfrak{o}_{\widehat{K^{nr}}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, da $p \cdot 1_{K^{nr}} \neq 0$. Zusammen mit 3.21ii) bekommen wir mit 3.15 eine Einbettung des Körpers $\overline{\mathfrak{K}}$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ vermöge

$$\overline{\mathfrak{K}} \cong W(\overline{\mathfrak{K}})/pW(\overline{\mathfrak{K}}) \hookrightarrow \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}/p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.$$

Aus der Perfektheit von $\overline{\mathfrak{K}}$ erhalten wir die Einbettung

$$\begin{aligned} j : \overline{\mathfrak{K}} \cong \varprojlim_{x \mapsto x^p} \overline{\mathfrak{K}} &\subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \\ x &\mapsto \left(x^{p^{-n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

und damit die gesuchte Abbildung $W(j): W(\overline{\mathfrak{K}}) \hookrightarrow W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. □

Bemerkung 5.5. θ ist $W\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ - linear.

Beweis: Die Struktur von $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)$ als $W\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$-Algebra wird durch den Homomorphismus $W(j): W(\overline{\mathfrak{K}}) \hookrightarrow W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ aus der vorigen Bemerkung geliefert. Ferner ist $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ eine $W(\bar{\mathfrak{K}})$-Algebra vermöge des injektiven Ringhomomorphismus $h: W(\bar{\mathfrak{K}}) \hookrightarrow \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ von oben.
Zu zeigen ist $\theta \circ W(j)(w) = h(w)$ für alle $w \in W\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$. Wir bemerken, dass nach Satz 3.22iii) jedes Element $w = (w_n)$ von $W\left(\overline{\mathfrak{K}}\right)$ von der Form

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \tau\left(w_n^{p^{-n}}\right)$$

ist. Da θ, h und $W(j)$ Ringhomomorphismen und daher p-adisch stetig sind, genügt der Fall $w = \tau(c)$ mit $c \in \overline{\mathfrak{K}}$ (vgl. mit dem Beweis der Formel für θ). Wir erhalten

$$\theta\left(W(j)(w)\right) = \theta\left(j(c), 0, \dots\right) = j(c)^\sharp.$$

Außerdem gilt

$$h(w) = h(\tau(c)) \overset{3.25ii)}{=} p^0 s(c) = s(c) \text{ in } \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K},$$

wobei $s: \bar{\mathfrak{K}} \to \mathfrak{o}_{\widehat{K^{nr}}} \subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ der multiplikative Schnitt der Restklassenabbildung aus 2.12 ist. Betrachtet man nun die Konstruktionen von s und $\sharp$ aus den Beweisen von

2.12 und 4.5ii), so ergibt sich

$$s(c) = j(c)^\sharp,$$

also insbesondere

$$\theta \circ W(j)(w) = h(w).$$

Das beendet den Beweis der Bemerkung. $\square$

Betrachten wir nun den G_K-äquivarianten, surjektiven Ringhomomorphismus

$$\theta_K := (p^{-n}x \mapsto p^{-n}\theta(x)) \colon W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right] \twoheadrightarrow \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}\left[\frac{1}{p}\right] = \mathbb{C}_K,$$

wobei wir für die letzte Gleichheit feststellen, dass zu einem beliebigen $x \in \mathbb{C}_K$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p^n x \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. Zunächst zeigen wir, dass $\ker\theta = \xi W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ für bestimmte $\xi \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ gilt, woraus aber auch $\ker\theta_K = \xi W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right]$ folgt.

Satz 5.6. *Sei* $\tilde{p} = (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots) \in \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K} \cong \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ *mit* $\tilde{p}_0 = p$*, wobei dieses Element induktiv konstruiert wird und wir die Identifikation aus 4.5iv) verwenden. Setze*

$$\begin{aligned} \xi \;&=\; \xi_{\tilde{p}} = \tau(\tilde{p}) - p \overset{3.20ii)}{=} \tau(\tilde{p}) - (0,1,0,\dots) \overset{3.8}{=} \tau(\tilde{p}) + (0,-1,*,\dots) \\ &\overset{3.14i)}{=} (\tilde{p}, -1, *, \dots) \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}), \end{aligned}$$

dann gilt:

i) Das Ideal $\ker\theta \subseteq W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ *ist ein Hauptideal mit Erzeuger* ξ*,*

ii) ein Element $w = (r_0, r_1, \dots) \in \ker\theta$ *ist genau dann ein Erzeuger von* $\ker\theta$*, wenn* $r_1 \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$.

Bemerkung 5.7. Da p in $K \subseteq \bar{K} \subseteq \mathbb{C}_K$ liegt, können wir in $\bar{K}$ induktiv p-te Wurzeln ziehen. Diese liegen wegen $|p| < 1$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$. So wird $\tilde{p}$ konstruiert.

Beweis: Nach der expliziten Beschreibung von θ und wegen

$$\tilde{p}^\sharp = \lim_{n\to\infty} (p^{1/p^n})^{p^n} = \lim_{n\to\infty} p = p$$

liegt ξ im Kern von θ, denn

$$\theta(\xi) = \theta\big(\tau(\tilde{p})\big) - \theta(p) = \tilde{p}^\sharp - p = 0.$$

Außerdem gilt $\ker\theta \cap p^n W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = p^n \ker\theta$, denn einerseits ist für $p^n x \in \ker\theta$ $p^n\theta(x) = 0$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ und aufgrund von Nullteilerfreiheit folgt $\theta(x) = 0$. Andererseits ist θ ein Ringhomomorphismus, sodass wir insbesondere $\theta(p^n x) = p^n\theta(x)$ erhalten.

i) Wir reduzieren die Aussage zunächst auf $\ker\theta \subseteq (\xi, p)$. Sei dazu $x \in \ker\theta \subseteq (\xi, p)$. Dann existieren $a_1,\, r_1 \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit $x = \xi a_1 + p r_1$. Weil ξ ein Element im Kern von θ ist, gilt $pr_1 \in \ker\theta \cap pW(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = p\ker\theta$. Da $p \neq 0$ im nullteilerfreien Ring $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ gilt, erhalten wir $r_1 \in \ker\theta \subseteq (\xi, p)$. Induktiv gelangen wir so für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ an eine Darstellung

$$x = \xi \sum_{i=1}^{n} a_i p^{i-1} + p^n r_n$$

mit $a_i,\, r_i \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Nun ist $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ nach 3.20vi) p-adisch separiert und vollständig, sodass $x' := \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^{i-1}$ in $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ liegt mit $x = \xi x'$. Für die erste Aussage bleibt also zu zeigen, dass $\ker\theta \subseteq (\xi, p)$. Sei $r = (r^{(0)}, r^{(1)}, \dots) \in \ker\theta \subseteq W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, dann gilt

$$0 = \theta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n (r^{(0)^{p^{-n}}})^\sharp \equiv (r^{(0)})^\sharp \mod p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}.$$

Wir erhalten $(r^{(0)})^\sharp \in p\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$, woraus wir mit Hilfe der Definition des Absolutbetrags von $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ und 4.6iii)

$$|r^{(0)}|_\flat = |(r^{(0)})^\sharp| \leq |p| = |\tilde{p}^\sharp| = |\tilde{p}|_\flat,$$

also $r^{(0)} \in \tilde{p}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$, folgern.

Nach 4.5iii) ist $(x \mapsto x^p)\colon \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ bijektiv und nach 3.20i) gilt für $(x^{(n)}) \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$

$$p(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) = (0, x^{(0)^p}, x^{(1)^p}, \dots).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} r = \tau(r^{(0)}) + p(r^{(1)^{1/p}}, r^{(2)^{1/p}}, \dots) \quad &\in \quad (\tau(r^{(0)}), p) \overset{r^{(0)} \in \tilde{p}\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}}{\subseteq} (\tau(\tilde{p}), p) \\ &\overset{\xi = \tau(\tilde{p}) - p}{=} (\xi, p). \end{aligned}$$

ii) Ein beliebiges Element $w = (r^{(0)}, r^{(1)}, \dots) \in \ker\theta = \xi W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ ist von der Form

$$\begin{aligned} \xi(s^{(0)}, \dots) &= (\tilde{p}, -1, *, \dots)(s^{(0)}, s^{(1)}, \dots) \\ &\overset{3.8}{=} (\tilde{p}s^{(0)}, \tilde{p}^p s^{(1)} - s^{(0)^p} + p(-1)s^{(1)}, *, \dots) \\ &= (\tilde{p}s^{(0)}, \tilde{p}s^{(1)} - s^{(0)^p}, *, \dots), \end{aligned}$$

da $\operatorname{char}(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = p$. Ein Vergleich der Elemente ergibt $r^{(1)} = \tilde{p}s^{(1)} - s^{(0)p}$. Wegen

$$|r^{(1)}|_\flat = |\tilde{p}^p s^{(1)} - s^{(0)p}|_\flat \leq \max(|\tilde{p}^p s^{(1)}|_\flat, |s^{(0)}|_\flat^p)$$

und $|\tilde{p}|_\flat = |\tilde{p}^\sharp| = |p| < 1$ haben wir die Äquivalenz: $r^{(1)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$ genau dann, wenn $s^{(0)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$.

Als Nächstes zeigen wir $s^{(0)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$ dann und nur dann, wenn $(s^{(0)}, s^{(1)}, \dots) \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})^*$. Für die Hinrichtung betrachten wir ein Element $a = (a_n)_n \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit $a_0 \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$ und bezeichnen mit $b_0 \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ sein Inverses. Dann gilt in $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit Lemma 3.14i) $a \cdot b \overset{3.8}{=} (a_0 b_0, c_1, c_2, \dots) \overset{3.14}{=} 1 + (0, c_1, c_2, \dots)$ für ein Element $c := (0, c_1, c_2, \dots) \overset{3.20ii)}{\in} pW(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n c^n$ konvergiert in $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, denn dieser Ring ist p-adisch separiert und vollständig und es gilt für $N < M$ aus $\mathbb{N}$

$$\sum_{n=N}^{M} (-1)^n c^n \in p^N W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}).$$

Weiter sehen wir mit Hilfe der Teleskopsumme, dass diese Reihe ein Inverses zu $1 + c = a \cdot b$ liefert, weshalb auch a invertierbar ist. Die Rückrichtung folgt sofort aus Bemerkung 3.8 und wegen $1_{W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})} = (1, 0, 0, \dots)$. Insgesamt erhalten wir also $r^{(1)} \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}^*$ genau dann, wenn ein $s \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})^*$ existiert mit $w = \xi s$. Dies ist aufgrund der Nullteilerfreiheit von $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ äquivalent zu $wW(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = \xi W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = \ker\theta$. □

Korollar 5.8.

i) Für alle $j \geq 1$ gilt $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cap (\ker\theta_K)^j = (\ker\theta)^j$.

ii) Außerdem gilt $\bigcap_{j\geq 1}(\ker\theta)^j = \bigcap_{j\geq 1}(\ker\theta_K)^j = 0$.

Beweis:

i) Natürlich ist $(\ker\theta)^j \subseteq W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Weiter entspricht die Einschränkung von θ_K auf $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ der Abbildung θ, also folgt bereits $(\ker\theta)^j \subseteq W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cap (\ker\theta_K)^j$. Um die andere Inklusion zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass ξ in $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ nicht durch p teilbar sein kann, denn angenommen, es existiert $a \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit $\xi = pa$. Da ξ ein Erzeuger des Kerns von θ ist, erhalten wir

$$0 = \theta(\xi) = \theta(pa) = p\theta(a).$$

Nun ist $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ nullteilerfrei und $p \neq 0$ in $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, sodass wir $\theta(a) = 0$, also $a \in \ker\theta = \xi W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ erhalten. Aufgrund der Nullteilerfreiheit von $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ folgt $p \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})^*$, im Widerspruch zu $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})/pW(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cong \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat} \neq 0$.

Sei also $\xi^j p^{-n} x \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cap (\ker \theta_K)^j$ mit $x \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, das heißt $\xi^i x \in p^n W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Da ξ nicht durch das Primelement p teilbar ist, folgt $p^{-n} x \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ und damit $\xi^j p^{-n} x \in (\ker \theta)^j$. Das zeigt i).

ii) Zunächst existiert zu jedem $x \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $p^n x \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Damit zeigen wir $\bigcap_j (\ker \theta_K)^j = (\bigcap_j (\ker \theta)^j)[\frac{1}{p}]$. Sei dafür zunächst $p^{-n} x \in \bigcap_j (\ker \theta_K)^j$, also $x \in \bigcap_j (W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cap (\ker \theta_K)^j)$ $\overset{i)}{=} \bigcap_j (\ker \theta)^j$ und damit $p^{-n} x \in (\bigcap_j (\ker \theta)^j)[\frac{1}{p}]$.

Für die andere Teilmengenbeziehung seien $n \geq 1$ und

$$p^{-n} x \in (\bigcap_j (\ker \theta)^j) \left[\frac{1}{p}\right]$$

mit $x \in \bigcap_j (\ker \theta)^j$. Da $\ker \theta = \xi W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$, existiert für alle $j \geq 1$ ein $x'_j \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit $x = \xi^j x'_j$. Damit liegt $p^{-n} x = p^{-n} \xi^j x'_j$ in $(\ker \theta_K)^j$, also $p^{-n} x \in \bigcap_j (\ker \theta_K)^j$.

Um ii) zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass $\bigcap_j (\ker \theta)^j = 0$ gilt. Sei dafür $w = (r^{(0)}, r^{(1)}, \dots) \in \bigcap_j (\ker \theta)^j = \bigcap_j \xi^j W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$. Das bedeutet, dass w durch beliebige Potenzen von $\xi = \tau(\tilde{p}) - p = (\tilde{p}, -1, \star, \dots)$ teilbar ist. Nach Definition der Multiplikation auf $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ ist dann $r^{(0)}$ teilbar durch beliebige Potenzen von $\tilde{p}$ in $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ und wegen $|\tilde{p}|_\flat < 1$ folgt daher $|r^{(0)}|_\flat = 0$, also $r^{(0)} = 0$.

Nach 3.20ii) und der Perfektheit von $\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}$ existiert $w' \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ mit $w = pw'$. Wir erhalten damit $w' \in (\bigcap_j (\ker \theta)^j) \left[\frac{1}{p}\right] = \bigcap_j (\ker \theta_K)^j$ und insbesondere $w' \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \cap (\ker \theta_K)^j = (\ker \theta)^j$ für $j \geq 1$. Damit ist $w = pw' \in p \bigcap_j (\ker \theta)^j$ und induktiv folgern wir $w \in \bigcap_n p^n W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) = 0$ nach 3.20vi). □

5.2 Der Körper der p-adischen Perioden und sein diskreter Bewertungsring

Wir bemerken, dass wir aus dem letzten Resultat eine Einbettung

$$W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right] \hookrightarrow B_{dR}^+ := \varprojlim_j W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right] / (\ker \theta_K)^j$$

erhalten. Dies wird als die $(\ker \theta_K)$*-adische Komplettierung* von $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right]$ bezeichnet.

Bemerkung 5.9. Mit θ ist auch θ_K G_K-äquivariant, sodass wir eine G_K-Operation auf $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker \theta_K)^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und damit auch auf B_{dR}^+ erhalten.

Satz 5.10. *B_{dR}^+ ist ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper $\mathbb{C}_K$.*

Beweis: Zuerst stellen wir fest, dass $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right]/(\ker\theta_K)^j$ ein lokaler Ring ist, denn ein maximales Ideal in diesem Ring korrespondiert zu einem maximalen Ideal in $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right]$, das $(\ker\theta_K)^j$ und damit auch das maximale Ideal $\ker\theta_K$ enthält.
Wir setzen nun $\theta_{dR}^+ \colon B_{dR}^+ \underset{proj}{\twoheadrightarrow} W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})\left[\frac{1}{p}\right]/\ker\theta_K \underset{\theta_K}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{C}_K$ und können zeigen, dass $\ker\theta_{dR}^+$ genau aus den Nichteinheiten von B_{dR}^+ besteht. Einerseits bildet nämlich θ_{dR}^+ als Ringhomomorphismus Einheiten auf Einheiten ab, andererseits gilt für eine Nichteinheit $x = (\overline{x}_n) \in B_{dR}^+$, dass mindestens eine Komponente von x keine Einheit ist. Das liegt daran, dass auf dem projektiven Limes die Multiplikation komponentenweise stattfindet und wären alle Komponenten invertierbar, so wäre die Familie der Inversen ein wohldefiniertes Element im projektiven Limes und damit ein Inverses von x. Sei also $j \geq 1$, sodass $\overline{x}_j$ keine Einheit ist. Da $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker\theta_K)^j$ ein lokaler Ring ist, folgern wir $\overline{x}_j \in \ker\theta_K/(\ker\theta_K)^j$. Nach der Definition des projektiven Limes folgt $\overline{x}_1 = 0$, da $x_1 - x_j \in \ker\theta_K$, also gilt $x \in \ker\theta_{dR}^+$.
Wir haben bislang gezeigt, dass B_{dR}^+ ein lokaler Ring mit $B_{dR}^+/\ker\theta_{dR}^+ \cong \mathbb{C}_K$ ist. Im Folgenden zeigen wir, dass $\ker\theta_{dR}^+$ ein Hauptideal ist und dass B_{dR}^+ nullteilerfrei ist. Seien dazu $n \geq 1$ und $b = (b_j + (\ker\theta_K)^j)_j \in \left(\ker\theta_{dR}^+\right)$, also gilt $b_1 \in (\ker\theta_K)$ und damit $b_n = b_n - b_1 + b_1 \in \ker\theta_K$. Daher existieren $b_n' \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]$ mit $b_n = b_n'\xi$. Weiter ist $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]$ wegen Bemerkung 3.23 und Korollar 4.7 nullteilerfrei und wegen $\xi(b_{n+1}' - b_n') = b_{n+1} - b_n \in (\ker\theta_K)^n = \xi^n W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]$ erhalten wir ein wohldefiniertes Element

$$b' = (b_{n+1}' + (\ker\theta_K)^n)_n \in B_{dR}^+$$

mit $b = \xi b'$, wobei mit ξ die konstante Familie gemeint ist. Zudem ist b' eindeutig bestimmt, denn angenommen, wir haben ein weiteres Element $c' \in B_{dR}^+$ mit $b = c'\xi$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $b_n'\xi \equiv c_n'\xi \mod (\ker\theta_K)^n$ und wir erhalten wie zuvor $b_n' \equiv c_n' \mod (\ker\theta_K)^{n-1}$, also $b' = c'$. Das zeigt einerseits, dass $\ker\theta_{dR}^+$ ein von ξ erzeugtes Hauptideal ist und andererseits wegen der Eindeutigkeit von b', dass ξ kein Nullteiler ist. Dabei ist zu beachten, dass $\xi \neq 0$ im Ring $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}] \hookrightarrow B_{dR}^+$ ist. Da $\xi^j = 0$ in $W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right]/(\ker\theta_K)^j$ erhalten wir aber $\bigcap_j (\ker\theta_{dR}^+)^j = 0$.
Insgesamt existiert zu jedem Element in dem lokalen Ring $B_{dR}^+\backslash\{0\}$ eine eindeutige Darstellung, die ein Produkt einer Potenz von ξ und einer Einheit aus B_{dR}^+ ist. Daraus folgt unmittelbar, dass B_{dR}^+ keine Nullteiler besitzt, denn ξ ist nicht nilpotent. Wir möchten nun zeigen, dass jedes Ideal ein Hauptideal ist. Sei also $I \subseteq B_{dR}^+$ ein von Null verschiedenes Ideal und $a \in I\backslash\{0\}$. Wir setzen $v(a) := \max\{j \in \mathbb{N}\colon a \in (\ker\theta_{dR}^+)^j\}$. Dieses Maximum wird wegen $a \neq 0$ in $\mathbb{N}$ angenommen. Wegen $B_{dR}^+\backslash\ker\theta_{dR}^+ = \left(B_{dR}^+\right)^*$ existiert $u \in \left(B_{dR}^+\right)^*$ mit $a = u\xi^{v(a)}$. Wie zuvor zeigt sich für $d := \min\{v(a)\colon a \in I\backslash\{0\}\}$, dass $I = \xi^d B_{dR}^+$.
Wir möchten nun zeigen, dass B_{dR}^+ $(\ker\theta_{dR}^+)$-vollständig ist. Sei dazu $((\bar{x}_j^{(n)})_j)_n$ eine Cauchyfolge in $B_{dR}^+ = \varprojlim W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker\theta_K)^j$. Das bedeutet, dass es zu jedem

$k \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für $m, n \geq N$ gilt

$$(\bar{x}_j^{(n)} - \bar{x}_j^{(m)})_j \in (\ker \theta_{dR}^+)^k = \xi^k B_{dR}^+.$$

Insbesondere finden wir für alle $j \in \mathbb{N}$ wegen $\xi^j = 0 \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker \theta_K)^j$ ein $N_j \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n \geq N_j$ gilt

$$\bar{x}_j^{(n)} = \bar{x}_j^{(m)}.$$

Wir können damit $\bar{x}_j := \lim_{n\to\infty} \bar{x}_j^{(n)} \in W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker \theta_K)^j$ setzen und es gilt $\bar{x} := (\bar{x}_j)_j = \lim_{n\to\infty} (\bar{x}_j^{(n)})_j \in \prod_{j\in\mathbb{N}} W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})[\frac{1}{p}]/(\ker \theta_K)^j$. Wir müssen nun noch $\bar{x} \in B_{dR}^+$ zeigen. Zu $j \in \mathbb{N}$ finden wir aber $n \in \mathbb{N}$ mit $\bar{x}_j = \bar{x}_j^{(n)}$ und $\bar{x}_{j+1} = \bar{x}_{j+1}^{(n)}$. Es folgt $x_j \equiv x_{j+1} \mod (\ker \theta_K)^j$, da $(\bar{x}_j^{(n)}) \in B_{dR}^+$.
Damit handelt es sich bei B_{dR}^+ um einen vollständigen diskreten Bewertungsring. Jeder Erzeuger von $\ker \theta_K$, aufgefasst als Element im projektiven Limes, ist ebenfalls ein Erzeuger des maximalen Ideals $\ker \theta_{dR}^+$ und es gilt $B_{dR}^+ / \ker \theta_{dR}^+ \cong \mathbb{C}_K$. $\square$

Definition 5.11. $B_{dR} := \operatorname{Quot}(B_{dR}^+)$ heißt *Körper der p-adischen Perioden* von K.

Bemerkung 5.12. G_K operiert auf B_{dR} (siehe Bemerkung 5.9). Für jedes uniformisierende Element π von B_{dR} und für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $\pi^n B_{dR}^+$ G_K-stabil.

Beweis: Die Abbildung $\theta_{dR}^+ : B_{dR}^+ \underset{proj}{\twoheadrightarrow} W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}) \left[\frac{1}{p}\right] / \ker \theta_K \underset{\theta_K}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{C}_K$ ist G_K-äquivariant, da die Operation auf B_{dR}^+ komponentenweise stattfindet und da θ_K selbst G_K-äquivariant ist. Damit gilt für $\sigma \in G_K$ stets $\sigma(\pi) \in \pi B_{dR}^+ = \ker \theta_{dR}^+$ und damit ist auch $\pi^n B_{dR}^+$ G_K-stabil. $\square$

Proposition 5.13. *Es existiert eine eindeutige G_K-äquivariante Einbettung $\overline{K} \hookrightarrow B_{dR}^+$.*

Beweis: Wir haben in Bemerkung 5.4iii) gesehen, dass $W(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat})$ eine $W(\bar{\mathfrak{K}})$-Algebra ist. Damit können wir den Körper $K_0 := W(\mathfrak{K}) \left[\frac{1}{p}\right] \subseteq W(\bar{\mathfrak{K}}) \left[\frac{1}{p}\right]$ in dem Ring $B_{dR}^+ = \varprojlim_{j\in\mathbb{N}} W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right) \left[\frac{1}{p}\right] / (\ker \theta_K)^j$ einbetten.
Bezeichne nun S den ganzen Abschluss von K_0 in B_{dR}^+, d.h.

$$S = \{a \in B_{dR}^+ \mid \exists p \in K_0[t] \text{ normiert: } p(a) = 0\} \underset{\text{Unterring}}{\subseteq} B_{dR}^+.$$

Wir möchten zeigen, dass S ein algebraischer Abschluss von K_0 ist, und daraus folgern, dass S auch ein algebraischer Abschluss von K ist. Dafür stellen wir zunächst fest, dass S ein Körper ist, denn für $x \in S$ mit $x \neq 0$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K_0 \subseteq B_{dR}^+$ mit

$$x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = 0.$$

Da $x \neq 0$ und B_{dR}^+ nullteilerfrei ist, können wir annehmen, dass $a_0 \neq 0$, also $a_0 \in K_0^*$. Damit ist

$$1 = x \cdot \left(-a_0^{-1} \left(x^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^{j-1} \right) \right).$$

Wegen $K_0 \subseteq S$ ist der rechte Faktor ebenfalls in S, also $x \in S^*$.
Nun sei f ein normiertes, irreduzibles Polynom mit Koeffizienten in K_0. Da nach 3.24 $\operatorname{char}(K_0) = 0$ gilt, ist f separabel. Betrachten wir nun f im algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}_K \cong B_{dR}^+/\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von B_{dR}^+ bezeichne. Die Reduktion von f zerfällt folglich in paarweise verschiedene Linearfaktoren und nach Hensel's Lemma (Satz 3 des 23. Paragraphen von [Lor97]) zerfällt dann auch schon f über B_{dR}^+ in Linearfaktoren. Alle Nullstellen liegen in S, da sie Nullstellen des normierten Polynoms $f \in K_0[t]$ sind. Daher ist S ein algebraischer Abschluss von K_0.
Wir zeigen nun, dass K über K_0 endlich ist, denn dann ist S auch ein algebraischer Abschluss von K. Dabei verstehen wir $K_0 \subseteq B_{dR}^+ \twoheadrightarrow \mathbb{C}_K$ ebenfalls als einen Unterkörper von $\mathbb{C}_K$. Hierbei ist $W(\mathfrak{K}) = \mathfrak{o}_{K_0}$.
Zunächst überlegen wir uns, ob wir $W(\mathfrak{K})$ als Unterring von $\mathfrak{o}_K$ verstehen können. Dazu stellen wir fest, dass die Einbettung

$$W(\mathfrak{K}) \hookrightarrow W(\mathfrak{K})\left[\frac{1}{p}\right] \hookrightarrow W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right] \hookrightarrow B_{dR}^+ \to W\left(\mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K^\flat}\right)\left[\frac{1}{p}\right] / \ker \theta_K \overset{\theta_K}{\to} \mathbb{C}_K$$

der Abbildung $\theta\colon W(\mathfrak{K}) \hookrightarrow \mathbb{C}_K$ entspricht und als Einschränkung des Körperhomomorphismus $\theta_K\colon W(\mathfrak{K})[\frac{1}{p}] \to \mathbb{C}_K$ injektiv ist. Nun ist aber θ nach Bemerkung 5.5 insbesondere $W(\mathfrak{K})$-linear und aus der expliziten Darstellung von $h\colon W(\overline{\mathfrak{K}}) \to \mathfrak{o}_{\mathbb{C}_K}$ erhalten wir $h(W(\mathfrak{K})) \subseteq \mathfrak{o}_K$.
Sei $e := v_K(p)$. Da $p = 0$ in $\mathfrak{K}$, folgt $p \in \mathfrak{m}_K$, also $e > 0$. Nun besitzen K und K_0 denselben Restklassenkörper (siehe 3.22iii)), sodass wir zeigen können, dass $\mathfrak{o}_K$ als $W(\mathfrak{K})$-Modul von den Potenzen π^i erzeugt wird, wenn $0 \leq i < e$ gilt, wobei π ein Uniformisierer von K ist. Für $m \in \mathbb{Z}$ finden wir durch Division mit Rest Elemente $n, i \in \mathbb{Z}$ mit $m = ne + i$ und $0 \leq i < e$ und setzen $\pi_m := p^n \pi^i$. Damit erhalten wir Elemente aus K mit der Eigenschaft $v_K(\pi_m) = n v_K(p) + i v_K(\pi) = ne + i = m$. Wir bezeichnen mit $\Omega \subseteq W(\mathfrak{K})$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathfrak{K} \cong W(\mathfrak{K})/pW(\mathfrak{K})$ mit $0 \in \Omega$. Dann bildet Ω, aufgefasst als Teilmenge von $\mathfrak{o}_K$, ebenfalls ein vollständiges Repräsentantensystem, denn wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{o}_{K_0} & \supseteq & \Omega \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \Omega \arrow[d] & \subseteq & \mathfrak{o}_K \\
& & \mathfrak{o}_{K_0}/p\mathfrak{o}_{K_0} \arrow[r, "\sim"] & \mathfrak{o}_K/\mathfrak{m}_K. & &
\end{tikzcd}$$

Ist nun $x \in K$, so können wir mit Proposition 2.6 $m_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_m \in \Omega$ für $m \geq m_0$ finden mit $x = \sum_{m \geq m_0} a_m \pi_m$. Nun haben wir

$$x = \sum_{m \geq m_0} a_m \pi_m = \sum_{i=0}^{e-1} \left(\sum_{n \geq n_0} a_{ne+i} p^n \right) \pi^i,$$

wobei nach 2.6 die Reihe $\sum_{n \geq n_0} a_{ne+i} p^n$ in K_0 konvergiert. Damit haben wir $x \in K_0[\pi]$ und $K = K_0[\pi]$ gezeigt. Daraus folgt, dass S auch ein algebraischer Abschluss von K ist, also $\overline{K} \subseteq B_{dR}^+$.

Da $K_0 \subseteq K$, operiert G_K trivial auf K_0. Damit gilt $G_K S \subseteq S$ und die obige Einbettung ist G_K-äquivariant. □

Bemerkung 5.14. Es gilt $K = \overline{K}^{G_K} \subseteq B_{dR}^{G_K}$ und nach Satz 4.4.13 von [uBC] gilt sogar Gleichheit.

5.3 de Rham-Darstellungen

Im Folgenden möchten wir noch kurz darauf eingehen, in welcher Art der Körper der p-adischen Perioden Verwendung findet. Dazu benötigen wir zwei Kategorien, die wir zunächst einführen wollen. Sei F ein Körper und $G_F := \mathrm{Gal}(F^{sep}|F)$, wobei mit F^{sep} der separable Abschluss von F in einem algebraischen Abschluss $\overline{F}$ gemeint ist. Eine *stetige $\mathbb{Q}_p$-Darstellung von G_F* ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum V mit einer Abbildung $((g,v) \mapsto gv) \colon G_F \times V \to V$, sodass gilt

i) für $g \in G_F$ ist $(v \mapsto gv) \colon V \to V$ $\mathbb{Q}_p$-linear,

ii) für alle $v \in V$ gilt $1_G v = v$,

iii) für alle $g, h \in G$ und alle $v \in V$ gilt $g(hv) = (gh)v$,

iv) die Abbildung $G_F \times V \to V$ ist stetig, wenn wir G_F mit der Krulltopologie und V mit der natürlichen Normtopologie ausstatten. Dabei betrachten wir auf $G_F \times V$ die Produkttopologie.

Wir bezeichnen dann mit $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{cont}(G_F)$ die Kategorie der stetigen $\mathbb{Q}_p$-linearen Darstellungen von G_F. Die Homomorphismen sind die $\mathbb{Q}_p$-linearen Abbildungen, die automatisch bzgl. der Normtopologie stetig sind.

Sei nun K ein vollständiger, diskret bewerteter Körper mit Charakteristik 0 und perfektem Restklassenkörper der Charakteristik $p > 0$ und B_{dR} der Körper der p-adischen Perioden. Wir bezeichnen mit G_K die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K^{sep}|K)$. Zusammen mit Bemerkung 5.14 erhalten wir $\mathrm{Quot}(B_{dR})^{G_K} = B_{dR}^{G_K} = K$. Für ein Objekt V aus der Kategorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}^{cont}(G_K)$ definieren wir $D_{dR}(V) = (B_{dR} \times_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ gemäß dem Vorgehen nach Beispiel 5.1.3 von [uBC]. Diese Konstruktion ist ein K-Vektorraum mit $\dim_K D_{dR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (vgl. 1. Aussage von Theorem 5.2.1

von [uBC]). Falls Gleichheit gilt, so nennen wir V eine *de Rham Darstellung* und bezeichnen mit $\mathrm{Rep}^{dR}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ die Unterkategorie von $\mathrm{Rep}^{cont}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ aller de Rham Darstellungen (vgl. Abschnitt 6 (de Rham representations) aus Teil II von [uBC]). Sie spielen in vielen Fragestellungen der modernen arithmetischen Geometrie eine herausragende Rolle.

Literatur

[Bos09] Siegfried Bosch. *Algebra.* Springer, Berlin; Heidelberg, 7. Auflage, 2009.

[Bou83] Nicolas Bourbaki. *Algèbre commutative - Chapitres 8 et 9 (Éléments de mathématique).* Masson, 1983.

[Lor97] Falko Lorenz. *Einführung in die Algebra II.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg; Berlin; Oxford, 2. Auflage, 1997.

[Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg; New York, 1992.

[uBC] Olivier Brinon und Brian Conrad. notes from the cmi summer school, preliminary version, 2009. http://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf (zuletzt aufgerufen am 17.12.2016).

Versicherung an Eides Statt

Ich versichere an Eides statt durch meine untenstehende Unterschrift,

- dass ich die vorliegende Arbeit - mit Ausnahme der Anleitung durch die Betreuer - selbstständig ohne fremde Hilfe angefertigt habe und
- dass ich alle Stellen, die wörtlich oder annähernd wörtlich aus fremden Quellen entnommen sind, entsprechend als Zitate gekennzeichnet habe und
- dass ich ausschließlich die angegebenen Quellen (Literatur, Internetseiten, sonstige Hilfsmittel) verwendet habe und
- dass ich alle entsprechenden Angaben nach bestem Wissen und Gewissen vorgenommen habe, dass sie der Wahrheit entsprechen und dass ich nichts verschwiegen habe.

Mir ist bekannt, dass eine falsche Versicherung an Eides Statt nach §156 und nach §163 Abs. 1 des Strafgesetzbuches mit Freiheitsstrafe oder Geldstrafe bestraft wird.

Ort, Datum	Unterschrift