Ausgewählte Kapitel der Kombinatorik

Lukas Pottmeyer

25. Februar 2020

Vorwort

Dieses Skript entstand im Laufe meiner Lehramts-Vorlesung *Ausgewählte Kapitel der Kombinatorik* an der Universität Duisburg-Essen im SS 19. Es diente lediglich der Nachbereitung der Vorlesungen. Es gibt sicher einige Fehler. Wer welche entdeckt, kann mich gerne per Mail an lukas.pottmeyer@uni-due.de darauf hinweisen.

Lukas Pottmeyer

Mathematisches Vokabelheft

Um Zeit und Nerven zu sparen ist es in der Mathematik nötig gewisse Symbole zur Unterstützung heranzuziehen. Verwenden Sie die folgenden Symbole außschließlich in der angegebenen Bedeutung!

Symbol	Bedeutung
$=$	gleich, ist gleich
$\neq$	ungleich, ist ungleich
$\Rightarrow$	daraus folgt, impliziert
$\Leftarrow$	wird impliziert von
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent zu
$\in$	ist Element von, ist in
$\notin$	ist kein Element von, ist nicht in
$\subseteq$	ist enthalten in
$\supseteq$	enthält

Dies sind nur einige der wichtigsten Vokabeln. Ergänzen Sie dieses Vokabelheft nach belieben. Weiter benutzen wir folgende Bezeichnungen für die Zahlbereiche.

Griechische Buchstaben

In der Mathematik wird viel mit Variablen gearbeitet. Dafür reicht unser herkömmliches lateinisches Alphabet oft nicht aus und es werden auch Buchstaben des griechischen Alaphabets benutzt. In dieser Vorlesung werden wir wahrscheinlich nur sehr wenige griechische Buchstaben benutzen. Der Vollständigkeit halber listen wir trotzdem das gesamte griechische Alphabet auf.

A, α	Alpha
B, β	Beta
Γ, γ	Gamma
Δ, δ	Delta
E, ε	Epsilon
Z, ζ	Zeta
H, η	Eta
Θ, θ	Theta
I, ι	Iota
K, κ	Kappa
Λ, λ	Lambda
M, μ	My
N, ν	Ny
Ξ, ξ	Xi
O, o	Omikron
Π, π	Pi
P, ρ	Rho
Σ, σ	Sigma
T, τ	Tau
Y, υ	Ypsilon
Φ, ϕ	Phi
X, χ	Chi
Ψ, ψ	Psi
Ω, ω	Omega

Was ist Kombinatorik

Kombinatorik ist im wesentlichen die „Kunst des Zählens“. Wir werden also das Zählen lernen und sehr viele Fragen beantworten, die mit „wie viele …“ beginnen. Damit wir solche Fragen beantworten können brauchen wir Zahlen. Wir setzen

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Zum Kennenlernen starten wir sofort mit einem klassischen Beispiel
Wenn sich alle 14 anwesenden Personen mit Handschlag begrüssen, wie viele Handschläge gibt es dann insgesamt?
Wie bei allen Fragestellungen der Vorlesung, gibt es mehrere Wege zum Ziel. Als erste Antwort überlegen wir uns folgendes: Wir stellen die Personen in irgendeiner Reihenfolge auf. Die erste Person gibt jeder anderen Person die Hand (13 Handschläge) und verlässt den Raum wieder. Die zweite Person gibt den übrigen 12 Personen die Hand und verlässt den Raum. Die dritte Person gibt dann jeder der 11 verbleibenden die Hand und so weiter und so weiter. Dann haben sich am Ende alle genau einmal die Hand gegeben. Es gab also insgesamt

$$13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Handschläge.

Einschub

Wir kennen alle die Reihenfolge auf den natürlichen Zahlen. Daher schreiben wir solche langen Summen im folgenden deutlich kürzer als $1 + 2 + \ldots + 13$. Deutlich eleganter kann man auch das Summenzeichen benutzen und $\sum_{n=1}^{19} n$ schreiben, aber für diese Vorlesung ist die Pünktchenschreibweise ausreichend.

Wir haben also eine Antwort auf die Frage gefunden. Wir lösen die Aufgabe aber auch noch auf eine andere Weise. Nun gibt jede der 14 Personen jeder anderen die Hand (das sind 13 Handschläge pro Person). Dann wurde aber jedes Händepaar doppelt geschüttelt (Sie haben jeder Person einmal die Hand gereicht und von jeder Person einmal die Hand gereicht bekommen).

Daher haben wir insgesamt

$$\frac{14 \cdot 13}{2}$$

Handschläge gebraucht. Da beide Argumentationen richtig sind, gilt insbesondere

$$1 + 2 + \ldots + 13 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 7 \cdot 13 = 70 + 21 = 91.$$

Wir wollen nun die Formel $0+1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für jede Zahl aus $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ beweisen. Das machen wir mit *vollständiger Induktion.* Das kennen Sie bereits aus frühreren Vorlesungen. Wir erklären es trotzdem noch kurz. Dazu ein paar Vorüberlegungen. Für die natürlichen Zahlen mit Null $\mathbb{N}_0$ gilt

- Es gibt keine Zahl zwischen 0 und $0 + 1 = 1$.
- Es gibt keine Zahl zwischen 1 und $1 + 1 = 2$.
- Es gibt keine Zahl zwischen 2 und $2 + 1 = 3$.
- $\vdots$

Das heißt, ist T eine Menge von natürlichen Zahlen (eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$) mit

(i) 0 ist in T (formal: $0 \in T$) und

(ii) falls n in T ist, dann ist auch $n+1$ in T (formal: $n \in T \implies n+1 \in T$)

Dann ist $0 \in T$, $0 + 1 \in T$, $1 + 1 \in T$, $2 + 1 \in T$, ... Das bedeutet nichts anderes als $T = \mathbb{N}_0$.

Wir kommen nun zur konkreten vollständigen Induktion. Dazu sei T die Menge aller Zahlen n aus $\mathbb{N}_0$ für die die Gleichung

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \tag{1}$$

gilt. Wir wollen zeigen, dass $T = \mathbb{N}_0$ ist. Nach unseren Vorüberlegungen genügt es zu zeigen, dass T die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

Zu (i): 0 ist in T, da gilt $0 = \frac{0\cdot(0+1)}{2}$. Dieser Schritt wird *Induktionsanfang* genannt.

Zu (ii): Sei nun n ein Element aus T (das ist unsere *Induktionsvoraussetzung*). Wir zeigen, dass dann auch $n+1$ in T ist – sprich: wir zeigen, dass $n+1$ die Gleichung $0+1+2+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$ erfüllt (dies wird der *Induktionsschritt*):

$$\begin{aligned}(0+1+2+\ldots+n)+(n+1) &\overset{(1)}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2}\end{aligned}$$

Es ist also wie gewünscht auch $n+1$ in T.

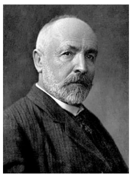
Es folgt $T = \mathbb{N}_0$. Das bedeutet, dass jedes n aus $\mathbb{N}_0$ die Gleichung (1) erfüllt.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Etwas von diesem Formalismus haben wir bereits im letzten Abschnitt benutzt / eingeführt. Auf den nächsten vier Seiten kommen die Folien der Vorlesung.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Eine *Menge* ist ein Zusammenschluss von verschiedenen *Objekten*, auch *Elemente* genannt. Dabei kann ein und dasselbe Element nicht mehrfach in einer Menge sein und es gibt keine Reihenfolge innerhalb einer Menge.



Georg Cantor

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M *von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten* m *unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von* M *genannt werden) zu einem Ganzen."*

Beispiel:
Alle deutschen Städte bilden eine Menge *M*.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Beispiel:
Alle deutschen Städte bilden eine Menge *M*.

Sind die Elemente einer Menge alle bekannt, so schreiben wir diese in geschweifte Klammern. Zum Beispiel:

$$N = \{1,2,3,4\} = \{2,4,2,3,4,1\}$$

Um zu beschreiben ob ein Objekt in einer gewissen Menge enthalten ist oder nicht benutzen wir die folgenden Symbole.

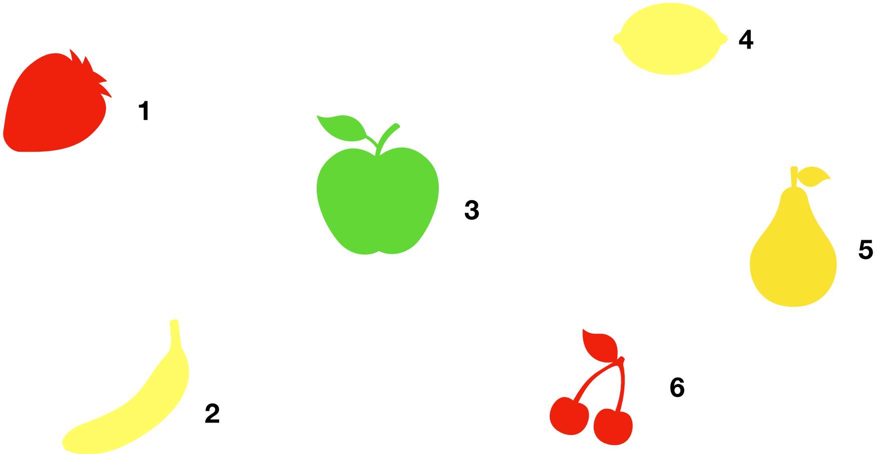
$$\textbf{Essen} \in M$$
$$\textbf{London} \notin M$$

Ein vertikaler Strich in geschweiften Klammern ist immer mit „mit der Eigenschaft" zu übersetzen.

$$T = \{m \in M \,|\, m \textbf{ hat mehr als 1 Mio. Einwohner}\}$$
$$= \{\textbf{Berlin, Hamburg, Köln, München}\}$$

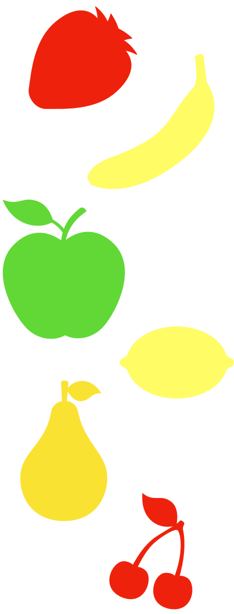
Formalismus: Mengen und Abbildungen

Wie viele Objekte sind hier abgebildet?



Formalismus: Mengen und Abbildungen

Wie viele Objekte sind hier abgebildet?



1

2

3

4

5

6

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Seien *M* und *N* zwei Mengen. Eine Abbildung *f* von *M* nach *N* ordnet jedem Element *m* aus *M* ein eindeutiges Element *n* aus *N* zu. Formal schreiben wir

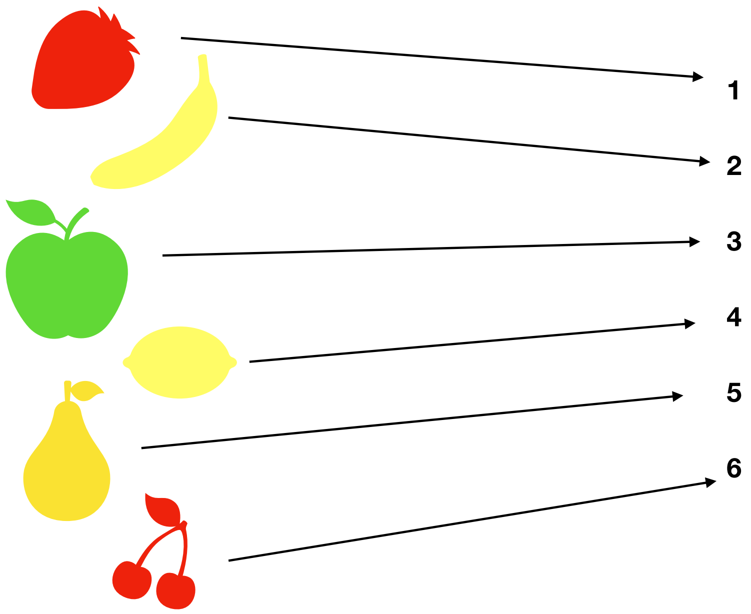
$$f : M \longrightarrow N \quad ; \quad m \mapsto f(m)$$

Eine Abbildung *f* heißt

- *injektiv,* falls keinen zwei verschiedenen Elementen aus *M* das gleiche Element aus *N* zugeordnet wird.
- *surjektiv,* falls jedes Element aus *N* einem Element aus *M* zugeordnet wird.
- *bijektiv,* falls *f* injektiv und surjektiv ist.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Wie viele Objekte sind hier abgebildet?

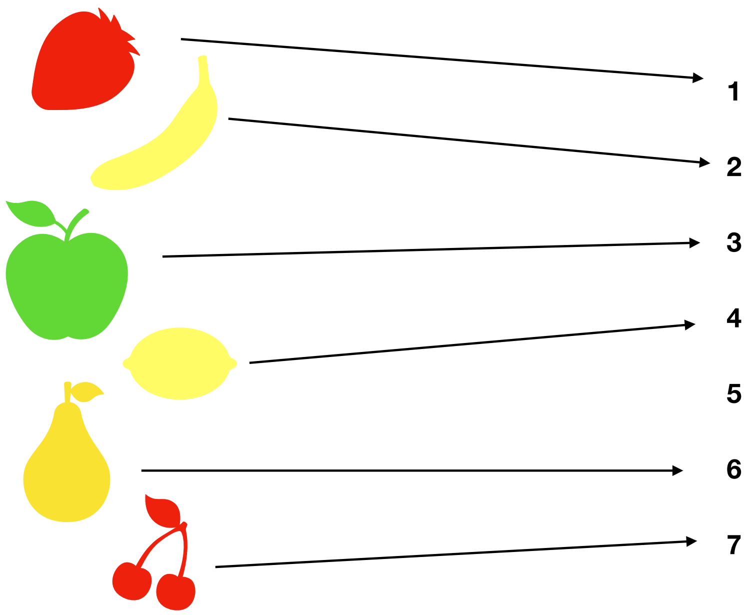


Zählen ist nichts anderes als das Konstruieren einer bijektiven Abbildung!

Gibt es eine bijektive Abbildung zwischen einer Menge *M* und einer Menge *{1,2,...,n}*, so besitzt *M* genau *n* Elemente.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Falsches Zählen I

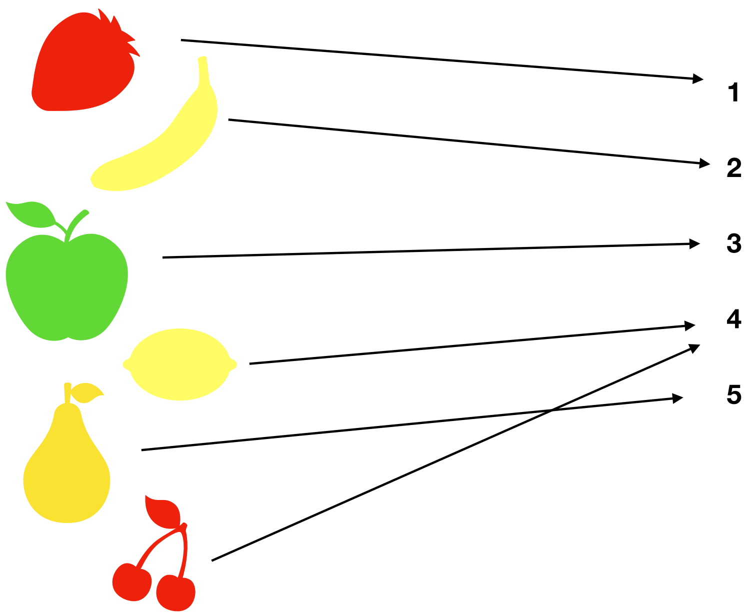


Diese Abbildung ist injektiv aber nicht surjektiv.

Das Ergebnis (7) wird dadurch zu groß.

Formalismus: Mengen und Abbildungen

Falsches Zählen II



Diese Abbildung ist surjektiv aber nicht injektiv.

Das Ergebnis (5) wird dadurch zu klein.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zählen

1.1 Fundamentale Zählprinzipien

Wir lernen in diesem Abschnitt drei wichtige Resultate zum Zählen. Diese werden Sie sicher bereits intuitiv richtig anwenden, aber wir sollten sie einmal formal sauber formuliert haben. Da wir immer die Anzahl von Elementen in gewissen Mengen zählen möchten, spielen wir zunächst etwas mit dem Begriff der Menge herum.

Definition 1.1.1. Im folgenden seien M und N zwei Mengen.

(a) N heißt *Teilmenge* von M, falls jedes Element aus N auch ein Element aus M ist. Wir schreiben dafür $N \subseteq M$.

(b) Der *Schnitt* von M und N ist die Menge, die aus allen Elementen besteht, die sowohl in M als auch in N sind. Diese Menge wird mit $M \cap N$ bezeichnet.

(c) Die *Vereinigung* von M und N ist die Menge, die aus allen Elementen besteht, die in M oder in N sind. Diese Menge wird mit $M \cup N$ bezeichnet.

(d) Gibt es in M nur endlich viele Elemente, so heißt M *endliche Menge* und $|M|$ bezeichnet die genaue Anzahl von Elementen in M.

(e) Die *leere Menge* $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Es ist also

- {Essen, Dortmund} eine Teilmenge, der Menge aller deutschen Städte.
- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 7, 3, 8\} = \{1, 3\}$.
- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 7, 3, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$.
- $|\emptyset| = 0$, $|\{A, B, C, D\}| = 4$.

Theorem 1.1.2 (Additionsprinzip)**.** *Sind M und N endliche Mengen, so dass kein Element aus M auch in N liegt (d.h. $M \cap N = \emptyset$), dann ist*

$$|M \cup N| = |M| + |N|.$$

Beweis. Wir zählen zunächst die Elemente aus M und dann die Elemente aus N. Dann haben wir jedes Element aus $M \cup N$ gezählt. Da der Schnitt der beiden Mengen leer ist, haben wir auch kein Element doppelt gezählt. □

Beispiel 1.1.3. (a) $|\{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| = 4 + 2 = 6$

(b) $|\{1, 2, 3, 4\} \cup \{4, 5\}| = |\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5 \neq 4 + 2$

Definition 1.1.4. Ist M eine Menge und $N \subseteq M$ eine Teilmenge, dann ist $M \setminus N = \{m \in M | m \notin N\}$ (gesprochen: „M ohne N") die Menge, die aus allen Elementen aus M besteht, die nicht in N sind.

Sind M und N endliche Mengen, dann gilt $|M \setminus N| = |M| - |N|$, da wir von den $|M|$-vielen Elementen von M genau die $|N|$-vielen Elemente aus N abziehen. Das ist bereits die erste Anwendung des Additionsprinzipes! Denn $M = N \cup (M \setminus N)$ und N und $M \setminus N$ haben kein gemeinsames Element. Also ist $|M| = |N| + |M \setminus N|$.

Definition 1.1.5. Sind A und B zwei endliche Mengen, dann ist das *kartesische Produkt* von A und B die Menge aller Tupel (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Es wird mit $A \times B$ bezeichnet.
Formal gilt also $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ und } b \in B\}$.

Beispiel 1.1.6. $\{\text{Pizza}, \text{Käsespätzle}, \text{Burger}\} \times \{\text{Schokopudding}, \text{Vanilleeis}\}$ besteht genau aus den Elementen

(Pizza, Schokopudding)	(Pizza, Vanilleeis)
(Käsespätzle, Schokopudding)	(Käsespätzle, Vanilleeis)
(Burger, Schokopudding)	(Burger, Vanilleeis)

Jedes der drei Hauptgerichte kann mit jedem der zwei Desserts ein Tupel bilden. Damit ergeben sich genau 6 Elemente. Das gilt auch ganz allgemein und man kann es am besten durch die oben angegebene rechteckige Auflistung der Elemente einsehen.

Theorem 1.1.7 (Multiplikationsprinzip). *Sind A und B endliche Mengen, dann ist $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Beweis. Wir schreiben die Elemente wieder in ein rechteckiges Schema. Dann haben wir wie im Beispiel $|M|$ Zeilen und $|N|$ Spalten. Das macht zusammen $|M| \cdot |N|$ Elemente. □

Bemerkung 1.1.8. Das kartesische Produkt und das Multiplikationsprinzip können auf beliebig viele Mengen erweitert werden. Sind zum Beispiel A, B, C drei endliche Mengen, dann ist

$$A \times B \times C = \{(a, b, c)|a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

Es ist nun $|A \times B \times C| = |A| \cdot |B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$.

Rückblick. Das Additionstheorem besagt $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$.
Für die Wahl Ihres UniMail-Passwortes stehen die Symbole

- Großbuchstaben (GB) (26 Stück)
- Kleinbuchstaben (KB) (26 Stück)
- Ziffern (Zi) (10 Stück)
- Sonderzeichen (SZ) (23 Stück)

zur Verfügung – also insgesamt $26 + 26 + 10 + 23 + 85$ Symbole.
Wie viele verschiedene UniMail-Posswörter gibt es, die aus genau zehn Zeichen bestehen?
Ein Passwort ist ein Tupel von Symbolen aus der Menge $M = GB \cup KB \cup Zi \cup SZ$, also ein Element der Form (I,c,h,m,a,g,A,K,d,K)$\in \underbrace{M \times \ldots \times M}_{\text{10-mal}}$.
Wir haben schon gesehen, dass $|M| = 85$ gilt. Damit sagt das Multiplikationsprinzip, dass es genau

$$\underbrace{|M \times \ldots \times M|}_{\text{10-mal}} = \underbrace{|M| \cdot \ldots \cdot |M|}_{\text{10-mal}} = |M|^{10}$$

Passwörter aus 10 Zeichen gibt.
Leider wird nicht jedes dieser Passwörter akzeptiert, da ein Passwort aus mindestens drei verschiedenen Symbolklassen bestehen muss (aaaaaaaaa ist somit KEIN gültiges Passwort). Wie viele gültige UniMail-Passwörter es tatsächlich gibt, werden wir später klären.

Wir kommen nun zum dritten und letzten fundamentalen Zählprinzip. Wir starten mit einem Beispiel.

Beispiel 1.1.9. Wie viele verschiedene Sitzordnungen sind bei 13 Studierenden in einem Hörsaal mit 13 Plätzen möglich?
überlegen wir zunächst wie viele Sitzordnungen es bei einem Studierenden in einem Hörsaal mit nur einem Platz gibt. Natürlich nur eine! Bei zwei Studierenden und zwei Plätzen ist die Antwort nicht deutlich schwieriger zu finden: zwei. Bei drei Studierenden und drei Plätzen gibt es sechs Möglichkeiten. Ausprobieren wird ab jetzt viel zu aufwendig. Wir überlegen uns folgendes: Wenn sich einer von vier Studierenden auf einen von vier Plätzen setzt, bleiben nur drei Studierende und drei Plätze übrig. Die übrigen Studierenden können sich also auf sechs verschiedene Möglichkeiten hinsetzten. D. h. für jeden der vier Plätze auf den sich der erste Studierende setzen kann, erhalten wir sechs Sitzordungen. Das sind insgesamt $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \cdot 6 = 24$ mögliche Sitzordnungen.
Diese Überlegung können wir nun benutzen um ganz allgemein den Fall von n Studierenden und n Plätzen zu betrachten. Dafür definieren wir die *Fakultät einer Zahl* $n \in \mathbb{N}$ als $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Damit ist $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ und $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Behauptung: Für n Studierende und n Plätze gibt es genau $n!$ verschiedene Sitzordnungen. Hier ist n irgendeine natürliche Zahl.

Wir beweisen die Behauptung per Induktion.
Induktionsanfang: $\boxed{n = 1}$ Haben wir bereits eingesehen.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges aber festes n gelte, dass es bei n Studierenden und n Plätzen genau $n!$ verschiedene Sitzordnungen gibt.
Induktionsschritt: $\boxed{n \to n + 1}$ Wir zeigen, dass es für das n aus der Induktionsvoraussetzung genau $(n + 1)!$ Sitzordnungen gibt, wenn sich $n + 1$ Studierende auf $n + 1$ Plätze verteilen sollen.

Wir wählen einen der $n+1$ Studierenden aus (wir nennen Ihn Klaus). Klaus kann sich auf einen von $n+1$ Plätzen setzen. Dann bleiben n Studierende und n Plätze übrig. Nach IV gibt es also, bei fest gewähltem Platz von Klaus, noch genau $n!$ Sitzordnungen. D. h. für jeden der $n+1$ Plätze auf die sich Klaus setzen kann, gibt es genau $n!$ Sitzordnungen. Das macht insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = (n+1)!$ Sitzordnungen. Damit ist die Behauptung bewiesen.
Die Antwort auf unsere Ausgangsfrage ist also, dass es genau 13! verschiedene Sitzordnungen gibt. Ausgeschrieben sind das 6227020800 Sitzordnungen.

Einschub

Wir halten nochmal fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Das hier angewendete Prinzip lässt sich recht allgemein benutzen.

Theorem 1.1.10. *Seien s und $k_1, \ldots, k_s$ natürliche Zahlen. Sei ein Verfahren V zur Konstruktion von Objekten gegeben, welches aus s Schritten besteht und folgende Eigenschaften erfüllt:*

(i) Für den iten Schritt gibt es immer genau k_i verschiedene mögliche Durchführungen.

(ii) Unterscheiden sich zwei Abläufe in mindestens einem Schritt, so liefert V unterschiedliche Objekte.

Dann können mit diesem Verfahren genau $k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$ verschiedene Objekte konstruiert werden.

Der Beweis funktioniert ganz genau wie der Beweis der Sitzordnungen per Induktion über die Anzahl s der Schritte im Verfahren.

Beispiel 1.1.11. (a) Der Osterhase hat Eier der Göße S, M und L. Er kann sie mit Längsstreifen, Querstreifen, Punkten oder Dreiecken bemalen und hat 10 verschiedene Farben. Wie viele unterschiedliche (einfarbige) Eier, kann der Osterhase gestalten?

1.Schritt: Größe wählen (3 Möglichkeiten)

2.Schritt: Muster wählen (4 Möglichkeiten)

3. Schritt: Farbe wählen (10 Möglichkeiten)

Das ergibt $3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$ verschiedene Eier.

(b) Auch die Frage nach den Sitzordnungen lässt sich mit diesem Theorem leicht klären. Wir konstruieren einfach alle Sitzordnungen.

- Im ersten Schritt wird eine erste Person auf einen freien Platz gesetzt (n Möglichkeiten)
- Im zweiten Schritt wird eine zweite Person auf einen freien Platz gesetzt ($n-1$ Möglichkeiten)
- $\vdots$
- Im n-ten Schritt wird die n-te (letzte) Person auf den letzten Platz gesetzt (nur noch eine Möglichkeit)

Damit haben wir alle Sitzordnungen konstruiert und wir erhalten, dass es genau $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ verschiedene Sitzordnungen gibt.

(c) Wie viele mögliche Besetzungen der ersten fünf Plätze sind mit 13 Studierenden möglich?

Wir drehen die Sichtweise einfach um. Der erste Platz suchte sich eine Person aus (13 Möglichkeiten), der zweite Platz sucht sich eine andere Person aus (12 Möglichkeiten), ... , der fünfte Platz sucht sich wieder eine andere Person aus ($13 - 4 = 9$ Möglichkeiten). Wieder haben wir alle möglichen Besetzungen der ersten fünf Plätze konstruiert und wir erhalten, dass es genau $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$ verschiedene gibt.

Theorem 1.1.12. *Seien A und B endliche Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = k$. Dann gibt es genau k^n verschiedene Abbildungen von A nach B.*

Beweis. Wir schreiben $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Jetzt konstruieren wir alle Abbildungen von A nach B.

1. Schritt: a_1 wird auf ein Element aus B abgebildet ($|B| = k$ Möglichkeiten)

2. Schritt: a_2 wird auf ein Element aus B abgebildet ($|B| = k$ Möglichkeiten)

$\vdots$

n. Schritt: a_n wird auf ein Element aus B abgebildet ($|B| = k$ Möglichkeiten)

Dann haben wir alle Abbildungen konstruiert und die Anzahl der Abbildungen von A nach B erhalten wir durch multiplizieren der Möglichkteiten – es gibt also genau k^n solcher Abbildungen. □

1.2 Permutationen

Definition 1.2.1. Sei A eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Eine *Permutation* der Elemente aus A ist ein Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit paarweise verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$. Insbesondere ist $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Beispiel 1.2.2. (a) Die Permutationen von der Elemente aus $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ sind

$$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \alpha, \gamma), (\beta, \gamma, \alpha), (\gamma, \alpha, \beta), (\gamma, \beta, \alpha)$$

(b) (a,c,h,s,o) ist eine Permutation der Elemente aus $\{c, h, a, o, s\}$.

(c) Jede Sitzordnung kann als Permutation der Studierenden angesehen werden.

Satz 1.2.3. *Ist $|A| = n$, dann gibt es genau $n!$ Permutationen der Elemente aus A.*

Beweis. Der Beweis ist das gleiche wie das Konstruieren von Sitzordnungen. Wir konstruieren also alle Permutationen der Elemente aus einer Menge A mit $|A| = n$. Dazu wählen wir für den ersten Eintrag der Permutation ein Element a_1 aus A. Dafür haben wir genau n Möglichkeiten. Für den zweiten Eintrag wählen wir ein beliebiges Element a_2 aus $A \setminus \{a_1\}$. Dafür haben wir also $n - 1$ Möglichkteiten. Wir machen so weiter und wählen immer wieder neue Elemente aus A, die keinem Vorherigen Schritt gewählt wurden. Dann haben wir für den letzten Eintrag (also den n-ten Eintrag) nur noch das einzige Element aus $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ übrig – also eine Möglichkeit.
Das macht zusammen also $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ Permutationen der Elemente aus A die wir konstruiert haben. Natürlich konstruieren wir auf diese Art und Weise auch tatsächlich alle Permutationen der Elemente aus A. □

1.2.4. Ein Anagramm eines Wortes ist eine Vertauschung der Buchstaben des Wortes. Wir kümmern uns hier nicht darum ob die neue Anordnung der Buchstaben ein sinnvolles Wort in irgendeiner Sprache bildet. Zum Beispiel sind TRAUMPOETIN, PIANOMUTTER, OPIMRATTEN alles Anagramme von PERMUTATION. Allerdings ist für uns auch AEIMNOPRTTU ein Anagramm.

Beispiel 1.2.5. (a) Beim Wort OSTERN sind alle Buchstaben verschieden. Anagramme von OSTERN sind somit nichts anderes als Permutationen der Elemente aus $\{O, S, T, E, R, N\}$. Damit gibt es genau $6! = 720$ Anagramme von OSTERN.

(b) Wie viele Anagramme hat das Wort PERMUTATION?

Wären alle Buchstaben unterschiedlich, so wären es wie eben genau 11! Anagramme. Das T kommt aber doppelt vor... Wir tun als erstes so als wären die T's unterschiedlich und betrachten Permutationen der Elemente aus $\{P, E, R, M, U, T_1, A, T_2, I, O, N\}$. Davon gibt es nun 11! viele. Nicht alle von diesen Permutationen liefern auch unterschiedliche Anagramme. Zum Beispiel sind $PERMUT_1AT_2ION$ und $PERMUT_2AT_1ION$ unterschiedliche Permutationen liefern aber das selbe Anagramm. Allgemein sehen wir, dass wir bei jeder Permutation die beiden T's vertauschen können ohne das Anagramm zu verändern. Jede andere Vertauschung führt hingegen zu anderen Anagrammen. Damit gibt es genau doppelt so viele Permutationen der Buchstaben aus $\{P, E, R, M, U, T_1, A, T_2, I, O, N\}$ wie Anagramme des Wortes PERMUTATION. Es folgt, dass es genau $\frac{11!}{2}$ dieser Anagramme gibt.

(c) Wie viele Anagramme hat das Wort ESSEN?

Nun gibt es sowohl zwei S's als auch zwei E's. Bei jeder der Permutationen der Elemente aus $\{E_1, S_1, S_2, E_2, N\}$ können wir somit die E's (2 Möglichkeiten) und die S's (wieder 2 Möglichkeiten) vertauschen ohne das zugehörige Anagramm zu verändern. Wir können also jede Permutation auf genau $2 \cdot 2 = 4$ unterschiedliche Arten verändern, ohne das entsprechende Anagramm zu ändern. Damit gibt es 4-mal mehr Permutationen von $\{E_1, S_1, S_2, E_2, N\}$ als Anagramme von ESSEN. Es folgt, dass es genau $\frac{5!}{4} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ Anagramme von ESSEN gibt.

(d) Ein letztes Beispiel: Wie viele verschiedene Anagramme gibt es vom Wort OSTEREIER?

Nun gibt es zwei R's und drei E's. Wir betrachten wieder Permutationen der Elemente aus $\{O, S, T, E_1, R_1, E_2, I, E_3, R_2\}$ (von denen es genau 9! gibt). Wie immer gibt es zwei Möglichkeiten die R's zu vertauschen ohne das Anagramm zu ändern. Wie sieht es mit den E's aus? Jede unterschiedliche Anordnung der Elemente E_1, E_2, E_3 verändert das Anagramm nicht. Eine Anordnung ist aber das gleiche wie eine Permutation. Damit gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten die E's zu vertauschen ohne das Anagramm zu verändern. Insgesamt können wir die R's und die E's also auf genau $2! \cdot 3!$ Arten vertauschen ohne das Anagramm zu verändern. Es folgt wie immer, dass es genau $\frac{9!}{2! \cdot 3!}$ verschiedene Anagramme von OSTEREIER gibt.

Die ganze Argumentation können wir natürlich verallgemeinern. Dann erhalten wir das folgende Theorem.

Theorem 1.2.6. *Sind $k_1, \ldots, k_r$ die verschiedenen Buchstaben eines Wortes, so dass k_1 genau n_1-mal vorkommt, k_2 genau n_2-mal vorkommt, ..., k_r genau n_r-mal vorkommt (insgesamt besteht das Wort also aus $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ Buchstaben). Dann besitzt das Wort genau $\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$ verschiedene Anagramme.*

Dieses Theorem sollten Sie so abstrakt wie möglich verstehen. Es wird nicht benutzt dass es ein tatsächliches „Wort“ ist, von dem man Anagramme sucht. Man kann es problemlos benutzen die Anzahl von Anagrammen von AASSSDDDF zu bestimmen. Weiter ist es ganz egal welches „Alpahabet“ Sie zugrundelegen.

Beispiel 1.2.7. Der Osterhase dekoriert seine Wohnung. Auf seine Fensterbank möchte er 10 Eier in einer Reihe auslegen. Es gibt 3 rote, 3 grüne und 4 gelbe Eier. Eier gleicher Farbe sehen vollkommen identisch aus. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, diese Eier in einer Reihe auszulegen?
Wir wollen wieder Anagramme benutzen. Das „Alphabet“ besteht nun aus den Farben rot, grün, gelb und das „Wort“ ist rot rot rot grün grün grün gelb gelb gelb gelb. Die Anzahl, die Eier in eine Reihe zu legen, ist offensichtlich das gleiche wie die Anzahl der „Anagramme“ unseres Wortes. Also genau $\frac{10!}{3! \cdot 3! \cdot 4!} = 4200$.

Proposition 1.2.8. *Sind A und B endliche Mengen, dann gilt genau dann $|A| = |B|$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gibt.*

Beweis. Die Phrase *genau dann wenn* verrät uns, dass wir hier eine Äquivalenz von zwei Aussagen zeigen müssen. Sprich: Wenn eine der beiden Aussagen richtig ist, dann ist es auch die andere. Wir müssen also zwei Implikationen zeigen.

- $\Rightarrow$ Seien also $|A| = |B| = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ für gewisse paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n$ und paarweise verschiedene Elemente $b_1, \dots, b_n$. Wir betrachten nun die Abbildung

  $$f : A \longrightarrow B \quad ; \quad a_i \mapsto b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

  Diese Abbildung ist surjektiv, da für jedes $b_i \in B$ die Gleichung $f(a_i) = b_i$ gilt. Es wird also jedes Element aus B für die Abbildung benutzt.

  Die Abbildung ist auch injektiv: Falls $f(a_i) = f(a_j)$ gilt, ist $b_i = b_j$ – also $i = j$. Es ist also $f(a_i) = f(a_j)$ nur möglich wenn $a_i = a_j$ gilt. Das bedeutet genau, dass f injektiv ist.

  Damit ist f surjektiv und injektiv, also bijektiv.

- $\Leftarrow$ Sei nun $f : A \longrightarrow B$ bijektiv und sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Da f surjektiv ist, ist $\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} = B$ (jedes Element aus B wird benutzt). Damit muss es mindestens $|B|$ verschiedene Elemente unter den Elementen $a_1, \dots, a_n$ geben. Es folgt $\boxed{n \geq |B|}$.

  Da f injektiv ist, sind die Elemente $f(a_1), \dots, f(a_n) \in B$ alle verschieden. Es ist also $\boxed{n \leq |B|}$.

  Zusammen erhalten wir $|A| = n = |B|$. Das war zu zeigen.

$\square$

Korollar 1.2.9. *Seien A und B endliche Mengen und $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung.*

(i) Ist f injektiv, dann gilt $|A| \leq |B|$.

(ii) Ist f surjektiv, dann gilt $|A| \geq |B|$.

Die Proposition ist die formale Erlaubnis Abzählfragen auf bekannte Modelle/Probleme zurückzuführen. Das haben wir in Beispiel 1.2.7 bereits gemacht (ohne Abbildungen zu benutzen).

Beispiel 1.2.10. Wir geben ein weiteres Beispiel, in dem sich Theorem 1.2.6 versteckt hat. Wir haben 10 unterschiedliche Spielsachen. Diese sollen auf vier Kinder (Anna, Boris, Chloë, David) verteilt werden und zwar so, dass Anna ein Spielzeug, Boris zwei Spielzeuge, Chloë drei Spielzeuge und David vier Spielzeuge bekommt. Wie viele verschiedene Mögliche Verteilungen der Spielsachen gibt es?
Wir behaupten, dass die Menge der gesuchten Verteilungen V genau so viele Elemente besitzt, wie die Menge M der Anagramme des „Wortes" ABBCCCDDDD.
Wir legen die Spielsachen in eine Reihe und nummerieren sie durch

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

Ist nun eine Verteilung der Spielsachen gegeben (also ein Element aus V), dann können wir dies folgendermaßen auf ein Anagramm von ABBCCCDDDD abbilden:

> An der i-ten Stelle des Anagrams steht ein A falls das i-te Spielzeug an Anna geht, ein B falls das i-te Spielzeug an Boris geht, ein C falls das i-te Spielzeug an Chloë geht und ein D falls das i-te Spielzeug an David geht. (1.1)

Die Verteilung der Spielsachen garantiert, dass es genau ein A, zwei B, drei C und vier D gibt – wir erhalten also tatsächlich ein Anagramm von ABBCCCDDDD. Diese Abbildung ist surjektiv, denn falls irgendein Anagram von ABBCCCDDDD gegeben ist, so liefert die Vorschrift (1.1) auch eine Verteilung der Geschenke (also ein Element aus V). Die Abbildung ist injektiv, da verschiedene Verteilungen auch auf verschiedene Anagramme führen. Damit ist die Abbildung bijektiv und wir schließen $|V| = |M| = \frac{10!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!}$.

1.3 Binomialkoeffizienten

Wir werden hier die Anzahl von gewissen Teilmengen einer gegebenen Menge berechnen und herausfinden.

Definition 1.3.1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, mit $k \leq n$. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist definiert als die Anzahl von Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Elementen.

Wir lesen $\binom{n}{k}$ als „n über k“.

Beispiel 1.3.2. Folgende Binomialkoeffizienten sind ganz einfach ausgerechnet:

- $\binom{n}{n} = 1$, da $\{1, \dots, n\}$ die einzige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ ist, die aus genau n Elementen besteht.
- $\binom{n}{0} = 1$, da $\emptyset$ die einzige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ ist, die aus genau 0 Elementen besteht. (Die leere Menge ist überhaupt die einzige Menge ohne Elemente).
- $\binom{n}{1} = n$, da alle Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, die nur ein Element besitzen, gegeben sind durch $\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{n\}$.
- $\binom{4}{2} = |\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}| = 6$

Beispiel 1.3.3. Eine Formel für $\binom{n}{2}$ haben wir auch schon kennengelernt. Wenn sich n Personen untereinander alle mit Handschlag begrüßen, gibt es genau so viele Handschläge wie es Personenpaare gibt. Personenpaare, die man aus n Personen bilden kann, sind aber nichts anderes als die 2-elementigen Teilmengen der Menge aller n Personen! Es folgt $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Bemerkung 1.3.4. Im letzten Beispiel haben wir bereits eine wichtige Beobachtung benutzt. Nämlich, dass $\binom{n}{k}$ nur von n und k abhängt und nicht von der Menge $\{1, \dots, n\}$. D.h.: Für irgendeine Menge A mit n Elementen, ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl von k-elementigen Teilmengen von A.

Satz 1.3.5. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, mit $k \leq n$, gilt die Formel*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Beweis. Es ist $0! = 1$. Für $k = 0$ und n beliebig wissen wir bereits, dass $\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!}$ ist. Wir dürfen also $k \neq 0$ (und somit auch $n \neq 0$) annehmen. Per Definition ist

$$\binom{n}{k} = |\underbrace{\{T \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |T| = k\}}_{=A_k}|. \tag{1.2}$$

Wir betrachten außerdem die Menge

$$M_k = \{\text{Anagramme von } \underbrace{J \dots J}_{k\text{-mal}} \underbrace{N \dots N}_{(n-k)\text{-mal}}\}$$

Wir wissen bereits, dass $|M_k| = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ gilt. Ziel ist es nun eine bijektive Abbildung $f : A_k \longrightarrow M_k$ zu konstruieren. Sobald wir das geschafft haben folgt mit Proposition 1.2.8

$$\binom{n}{k} \overset{(1.2)}{=} |A_k| = |M_k| = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Die gewünschte bijektive Abbildung finden wir aber genau wie im Beispiel 1.2.10: Für $B \in A_k$, ist B eine Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Elementen. Wir setzen $f(B)$ als das Anagramm, das an der i-ten Stelle ein J stehen hat, falls $i \in B$ ist, und an der i-ten Stelle ein N stehen hat, falls $i \notin B$ ist.

Für $n = 5$ und $B = \{2, 3\}$ erhalten wir $f(B) = NJJNNN$ und für $B = \{1, 3, 4\}$ erhalten wir $f(B) = JNJJN$.

Ist umgekehrt irgendein Anagramm aus M_k gegeben, dann setzen wir B als die Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$, die genau die Elemente i aus $\{1, \dots, n\}$ enthält für die an der i-ten Stelle des Anagramms ein J steht. Dann wird dieses B (es ist natürlich $|B| = k$ und somit $B \in A_k$) durch f auf das gewählte Anagramm abgebildet. Das bedeutet gerade, dass f surjektiv ist, da jedes Anagramm auch von einem Element aus A_k getroffen wird. Dass f injektiv ist, sieht man ganz leicht: Sind B_1 und B_2 zwei verschiedene Mengen mit k Elementen, dann gibt es ein Element i, das is B_1 liegt, aber nicht in B_2. Damit steht an der i-ten Stelle von $f(B_1)$ ein J und an der i-ten Stelle von B_2 ein N. Es ist also $f(B_1) \neq f(B_2)$, und f ist injektiv.
Mit unseren Vorüberlegungen haben wir damit den Satz bewiesen. □

Lemma 1.3.6. *Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Beweis. Es ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$. □

Proposition 1.3.7. *Wählen wir aus n Elementen k verschiedene Elemente aus, haben wir dafür genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten (wenn uns die Reihenfolge nicht interessiert).*

Beweis. Eine Auswahl von k Elementen ist nichts anderes als die Auswahl einer k-elementigen Teilmenge der Menge aller n gegebenen Elemente. Davon gibt es genau $\binom{n}{k}$-viele. □

Beispiel 1.3.8. Beim Lotto werden aus 49 Kugeln genau sechs gezogen. In einem zweiten Schritt wird die Superzahl (eine aus zehn Zahlen) gezogen. Wie viele verschiedene Lottoziehungen sind möglich?
Wir wählen zunächst sechs aus 49 Kugeln, dafür haben wir $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten. Jede dieser Möglichkeiten kann mit einer der zehn möglichen Superzahlen kombiniert werden. Das macht zusammen $\binom{49}{6} \cdot 10$ mögliche Lottoziehungen.

Beispiel 1.3.9. Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es bei 13 Personen in einem Raum mit 30 Plätzen?
<u>1. Antwort:</u> In einem ersten Schritt wählen wir 13 Plätze aus den 30 aus. Dafür gibt es $\binom{30}{13}$ Möglichkeiten. In einem zweiten Schritt besetzen wir die 13 gewählten Plätze mit den 13 Personen. Wir wissen schon, dass es dafür genau 13! Möglichkeiten gibt. Zusammen erhalten wir, dass es genau $\binom{30}{13} \cdot 13!$ verschiedene Sitzordnungen gibt.
<u>2. Antwort:</u> Die erste Person kann aus 30 Plätzen wählen, die zweite aus 29, die dritte aus 28, ..., die 13-te aus $(30 - 12)$. Damit gibt es genau

$$30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot (30 - 22) = \frac{30!}{(30 - 13)!}$$

Sitzordnungen.
Da beide Antworten korrekt sind, gilt $\binom{n}{k} \cdot 13! = \frac{30!}{(30-13)!}$, oder äquivalent $\binom{n}{k} = \frac{30!}{13! \cdot (30-13)!}$. Damit haben wir eine weitere Herleitung der Formel aus Satz 1.3.5 gefunden.

Konstruktion 1.3.10. Wir schreiben nun die ersten Binomialkoeffizienten auf:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n = 0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n = 1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n = 2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n = 3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n = 4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Das („unendliche") Dreieck was wir auf diese Weise gewinnen wenn n über alle natürlichen Zahlen läuft, wird auch *Pascal'sches Dreieck* genannt. Die ersten 5 Zeilen dieses Dreiecks in dem die Binomialkoeffizienten ausgerechnet wurden, sieht man in Abbildung 1.1.

$n=0$					1				
$n=1$				1		1			
$n=2$			1		2		1		
$n=3$		1		3		3		1	
$n=4$	1		4		6		4		1

Abbildung 1.1: Die ersten 5 Zeilen des Pascal'schen Dreiecks.

Wir sehen sofort, dass die Zeilen horizontal symmetrisch sind (d.h. es ist egal ob wir sie von rechts nach links oder von links nach rechts lesen) und dass der erste und letzte Eintrag immer eine 1 ist. Dies ist den Gleichungen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{n} = 1$ aus Lemma 1.3.6 geschuldet. Zunächst nicht ganz offensichtlich ist, dass jeder Eintrag, der keine Randposition hat (also der ungleich 1 ist), die Summe der beiden Werte ist, die über ihm stehen. Dass dies tatsächlich immer gilt, zeigt die folgende kurze Rechnung.

Lemma 1.3.11. *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, mit $k < n$. Dann gilt* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Beweis. Wir kennen eine Formel für den Binomialkoeffizienten. Damit lässt sich dieses Lemma leicht beweisen. Es ist

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} + \frac{n!}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}}_{=\frac{n+1}{(k+1)\cdot(n-k)}} \right) \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{k! \cdot (k+1) \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Was dies anschaulich bedeutet haben wir in den Übungen gesehen: Es gibt genau so viele Teilmengen $T \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ mit $|T| = k+1$ und $n+1 \in T$, wie es Teilmengen $T' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gibt, mit $|T'| = k$ – nämlich $\binom{n}{k}$. Weiter gibt es genau so viele Teilmengen $T \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ mit $|T| = k+1$ und $n+1 \notin T$, wie es Teilmengen $T' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gibt, mit $|T'| = k+1$ – nämlich $\binom{n}{k+1}$.
Die gesamte Anzahl von $k+1$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$ (per Definition ist diese Anzahl gleich $\binom{n+1}{k+1}$) ist also gleich $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. □

Kommen wir nun zu dem Theorem, dem die Binomialkoeffizienten ihren Namen verdanken.

Theorem 1.3.12. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^{n-n} y^n.$$

Beispiel 1.3.13. Die Formeln, die dies für $n = 2$ und $n = 3$ liefert, kennen Sie sicher bereits sehr gut:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 \\
(x+y)^3 &= \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 \\
&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3
\end{aligned}$$

Beweis von Theorem 1.3.12. Wir berechnen $(x+y)^n$ in dem wir

$$\underbrace{(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\text{-mal}}$$

ausmultiplizieren. Wir tun zunächst so als wäre die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ nicht kommutativ. Dann entstehen beim Ausmultiplizieren Summanden der Form $xxyyxyyx\cdots$ mit einer gewissen Anzahl an x und einer gewissen Anzahl an y. Genauer erhalten wir als Summanden exakt die Elemente aus

$$\begin{aligned}
&\{\text{Anagramme von } \underbrace{x\ldots x}_{n\text{-mal}}\} \cup \{\text{Anagramme von } \underbrace{x\ldots x}_{(n-1)\text{-mal}}\ y\}\\
\cup&\{\text{Anagramme von } \underbrace{x\ldots x}_{(n-2)\text{-mal}}\ yy\} \cup \{\text{Anagramme von } \underbrace{x\ldots x}_{(n-3)\text{-mal}}\ yyy\}\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
\cup&\{\text{Anagramme von } \underbrace{x}_{(n-(n-1))\text{-mal}} \underbrace{y\ldots y}_{(n-1)\text{-mal}}\} \cup \{\text{Anagramme von } \underbrace{y\ldots y}_{n\text{-mal}}\}
\end{aligned}$$

Wir nennen $\{\text{Anagramme von } \underbrace{x\ldots x}_{(n-k)\text{-mal}} \underbrace{y\ldots y}_{k\text{-mal}}\}$ kurz A_k. Da die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ aber bekanntermaßen kommutativ ist, können wir jedes Element aus so einem A_k zu $x^{n-k}\cdot y^k$ zusammenfassen. Der Summand $x^{n-k}\cdot y^k$ kommt in $(x+y)^n$ also genau $|A_k| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$-mal vor! Es folgt also wie gewünscht

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^{n-n}y^n.$$

□

Korollar 1.3.14. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

(a) Jede Menge mit genau n Elementen besitzt exakt 2^n verschiedene Teilmengen.

(b) Es ist $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

Beweis. Die Anzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen ist gegeben durch

„Anzahl Teilmengen mit 0 Elementen“ + „Anzahl Teilmengen mit 1 Elementen“ + … + „Anzahl Teilmengen mit n Elementen“

Per Definition ist das genau die Summe

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} \overset{1.3.12}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

Damit ist Teil (a) bewiesen.
Für Teil (b) machen wir fast das gleiche und berechnen $(1+(-1))^n$ einmal direkt (natürlich kommt dann Null raus), und einmal mit Theorem 1.3.12. Das letzte Vorzeichen $(-1)^n$ ist genau so gewählt, dass in der langen Summe, die Vorzeichen + und − immer abwechselnd auftreten (beachte, dass in $(-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, \ldots$ die Vorzeichen tatsächlich immer wechseln). Jetzt benutzen wir also Theorem 1.3.12:

$$0 = (1+(-1))^n) = \binom{n}{0}(-1)^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^n.$$

Das wollten wir zeigen. □

Zusammanfassung 1.3.15. *Wählen wir k Elemente aus einer Menge mit n Elementen aus, so gilt für die Anzahl von Möglichkeiten dafür*

	mit Wiederholung	*ohne Wiederholung*
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	*??*	$\binom{n}{k}$

Für den Rest dieses Abschnittes wollen wir eine Formel für ?? finden!

1.3.16. Seien die Objekte $a_1, \ldots, a_n$ gegeben. Von denen wollen wir k auswählen, wobei es erlaubt ist Elemente mehrfach auszuwählen.
Haben wir eine solche Auswahl getroffen, so setzen wir x_1 als die Anzahl, wie oft wir das Element a_1 gewählt haben. Allgemein setzen wir x_i als die Anzahl, wie oft wir a_i gewählt haben für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Jedes dieser x_i ist in $\mathbb{N}_0$ und es gilt (da wir genau k Elemente ausgewählt haben) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.
Sind andererseits Elemente $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$ gegeben, mit $y_1+y_2+\ldots+y_n = k$, so liefert uns dies eine Auswahl von k Elementen aus $a_1, \ldots, a_n$, indem wir a_1 genau y_1-mal wählen, und allgemein a_i genau y_i-mal wählen.
Es gibt also genau so viele Möglichkeiten k Elemente aus $a_1, \ldots, a_n$ auszuwählen, wobei Mehrfachauswahl erlaubt ist, wie es Lösungen der Gleichung

$$x_1 + \ldots + x_n = k \quad \text{mit } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$$

gibt. Diese Anzahl wollen wir nun endlich bestimmen. Dazu überführen wir das Problem wieder auf die bekannte Aufgabe gewisse Anagramme zu zählen.
Sei dazu $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \underbrace{\mathbb{N}_0 \times \ldots \mathbb{N}_0}_{n\text{-mal}} | x_1 + \ldots + x_n = k\}$ und sei A die Menge aller Anagramme von $\underbrace{X \cdots X}_{n\text{-mal}} \underbrace{N \cdots N}_{k\text{-mal}}$, die mit einem X beginnen. Dass die Anagramme alle mit X beginnen, bedeutet, dass wir die Position von einem X bereits festgelegt haben. Es gibt also genau so viele dieser Anagramme, wie es Anagramme von $\underbrace{X \cdots X}_{(n-1)\text{-mal}} \underbrace{N \cdots N}_{k\text{-mal}}$ gibt. Mit Theorem 1.2.6 folgt damit

$$|A| = \frac{(n-1+k)!}{k! \cdot (n-1)!} \overset{1.3.5}{=} \binom{n+k-1}{k} \tag{1.3}$$

Die Abbildung $f : L \longrightarrow A$, die ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ auf das Anagramm $X \underbrace{N \cdots N}_{x_1\text{-mal}} X \underbrace{N \cdots N}_{x_2\text{-mal}} X \ldots X \underbrace{N \cdots N}_{x_n\text{-mal}}$ abbildet, ist bijektiv (überprüfen Sie, dass das stimmt!). Damit gilt $|L| = |A| \overset{(1.3)}{=} \binom{n+k-1}{k}$.
Fazit: Es gibt genau $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten k Elemente aus $a_1, \ldots, a_n$ auszuwählen, wenn Mehrfachauswahlen erlaubt sind.

Damit erhalten wir:

Zusammanfassung 1.3.17. *Wählen wir k Elemente aus einer Menge mit n Elementen aus, so gilt für die Anzahl von Möglichkeiten dafür*

	mit Wiederholung	*ohne Wiederholung*
mit Beachtung der Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

1.4 Inklusion-Exklusion

Sind A und B endliche Mengen mit $A \cap B = \emptyset$, dann wissen wir bereits, dass $|A \cup B| = |A| + |B|$ gilt. Was ist nun wenn $A \cap B \neq \emptyset$?

Proposition 1.4.1. *Seien A und B endliche Mengen, dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Beweis. Wir möchten das anschaulich beweisen. Wir stellen die Mengen als Kreise dar. Elemente aus A liegen dann im Kreis der zu A gehört, Elemente aus B liegen im Kreis der der zu B gehört. Dann sind die Elemente des Schnittes von A und B genau die Elemente, die im Schnitt der beiden Kreise liegen.

Die Vereinigung von A und B sieht dann folgendermaßen aus:

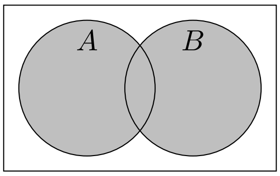


Abbildung 1.2: $A \cup B$

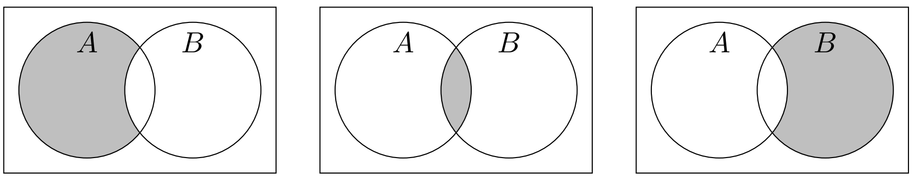
Das können wir zuerlegen in die drei Bereiche

Damit sehen wir, dass $|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)|$ gilt. Das können wir aber bereits ausrechnen, denn es ist gleich

$$|A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

□

Wie berechnen wir nun $|A \cup B \cup C|$ für drei endliche Mengen? Wir könnten wieder ein Bild malen, aber spätestens, wenn wir vier Mengen haben, sagen einem solche Bilder nicht mehr viel. Daher suchen wir eine andere Lösung.



(a) $A \setminus (A \cap B)$ (b) $A \cap B$ (c) $B \setminus (A \cap B)$

Die Idee ist, einfach mehrfach Proposition 1.4.1 anzuwenden:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| &\overset{1.4.1}{=} |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&\overset{1.4.1}{=} |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&\overset{1.4.1}{=} |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\
&\quad - (|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|) \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir zwar eine Formel gefunden, aber das ganze nun für noch mehr Mengen durchzuführen scheint auch zu mühsam zu sein. Wir versuchen also noch eine andere Lösung zu finden.

1.4.2. Wir berechnen nun $|A \cup B \cup C \cup D|$ für vier endliche Mengen.

(1) Berechne $|A| + |B| + |C| + |D|$. Dann haben wir die Elemente, die in zwei der Mengen A, B, C, D liegen auch zweimal gezählt. Also

(2) ziehe $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ wieder ab. Dann habe nwir die Elemente, die in drei der Mengen A, B, C, D erst in (1) dreimal gezählt und dann in (2) wieder dreimal abgezogen. Also

(3) addiere $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ wieder hinzu. Dann haben wir die Elemente, die in allen vier Mengen liegen in (1) viermal gezählt, in (2) sechsmal wieder abgezogen und in (3) viermal hinzuaddiert. Diese Elemente haben wir also doppelt gezählt. Also

(4) ziehe $|A \cap B \cap C \cap D|$ wieder ab.

Puzzeln wir (1), (2), (3) und (4) zusammen, so erhalten wir eine Formel zur Berechnung von $|A \cup B \cup C \cup D|$. Diese Argumentation sieht so aus, als ob wir sie verallgemeinern könnten.

Theorem 1.4.3 (Inklusion-Exklusion)**.** *Seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen.*

Dann ist $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ *gleich*

$$\begin{array}{rl} & (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) \\ - & (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\ + & (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots |A_{n-1} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\ - & \ldots \\ \vdots & \ldots \\ +(-1)^{n+1} & (|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|) \end{array}$$

Bemerkung 1.4.4. Für $n \in \{2, 3, 4\}$ liefert dies genau die Formeln, die wir bisher in diesem Abschnitt hergeleitet haben. Wie in Korollar 1.3.14 ist das Vorzeichen $(-1)^{n+1}$ so gewählt, dass die Vorzeichen in jeder Zeile wechseln.

Beweis von Theorem 1.4.3. Sei $a \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass dieses a mit der langen Formel genau einmal gezählt wird. Das Element a ist in einer gewissen Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ enthalten. Wir nehmen an, dass gilt

$$a \in A_1,\ a \in A_2, \ldots,\ a \in A_k,\ a \notin A_{k+1}, \ldots,\ a \notin A_n$$

Dann wird a in jedem Schnitt einer beliebigen Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_k$ genau einmal gezählt. Schneiden wir hingegen mit irgendeiner der Mengen $A_{k+1}, \ldots, A_n$, so liegt a nicht in diesem Schnitt – wird in so einem Schnitt also nicht gezählt. Es folgt, dass a in $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ genau k-mal gezählt wird (d.h. entfernen wir a aus jeder der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ so reduziert sich der Wert um k). Summieren wir nun die Zahlen $|A_i \cap A_j|$, mit $i \neq j \in \{1, \ldots n\}$, auf, so wird a genau so oft gezählt wie es möglich ist, genau zwei der Mengen $A_1, \ldots, A_k$ zu schneiden – also genau $\binom{k}{2}$-mal. In der Summe aller $|A_h \cap A_i \cap A_j|$, mit verschiedenen $h, i, j \in \{1, \ldots, n\}$, wird a so oft gezählt wie wir drei Mengen aus dne Mengen $A_1, \ldots, A_k$ wählen können – also genau $\binom{k}{3}$-mal. Das geht immer so weiter.
Insgesamt wird a also mit der postulierten Formel genau

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} \overset{1.3.14}{=} \binom{k}{0} = 1\text{-mal}$$

gezählt. Das wollten wir beweisen. □

Beispiel 1.4.5. Vier Kinder haben je zwei Ostereier bemalt. Wie viele Möglichkeiten gibt es die Eier so in eine Reihe zu stellen, dass Eier, die das gleiche Kind bemalt hat, nicht nebeneinander stehen?

Insgesamt gibt es 8! Möglichkeiten, die Eier in einer Reihe aufzustellen. Das ist aber natürlich nicht die richtige Antwort auf die Frage. Seien die Kinder A, B, C, D und seien A_1, A_2 die Eier die A bemalt hat und genauso seien $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ definiert.

Weiter sagen wir, dass M_A die Menge aller Permutationen von $A_1, \dots, D_2$ ist, in denen A_1 und A_2 nebeneinander stehen. Wieder definieren wir M_B, M_C und M_D genauso. Dann ist $M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_C$ genau die Menge von Permutationen der Elemente $A_1, \dots, D_2$ in denen zwei Eier nebeneinander stehen, die das selbe Kind bemalt hat.

Die Antwort auf unsere Frage ist also $8! - |M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_C|$. Nun berechnen wir $|M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_C|$ mit der Formel aus Theorem 1.4.3.

Um $|M_A|$ zu berechnen, betrachten wir $\boxed{A_1A_2}$ als ein Element auf. Es gibt nun genau 7! Permutationen der Elemente $\boxed{A_1A_2}$ $\boxed{B_1}$ $\boxed{B_2}$ $\boxed{C_1}$ $\boxed{C_2}$ $\boxed{D_1}$ $\boxed{D_2}$. Lassen wir die Boxen weg, so erhalten wir genau 7! Permutationen der acht Eier, in denen A_1 direkt links neben A_2 steht. Da wir A_1 und A_2 noch vertauschen können, gibt es genau $7! \cdot 2$ Permutationen der Eier bei denen A_1 neben A_2 steht. Anders formuliert: $|M_A| = 7! \cdot 2$.

Das Argument gilt natürlich gleichermaßen für B, C und D. Es ist also

$$|M_A| = |M_B| = |M_C| = |M_D| = 7! \cdot 2.$$

Nun berechnen wir mit dem gleichen Argument $|M_A \cap M_B|$. Das sind die Permutationen in denen A_1 neben A_2 und B_1 neben B_2 steht. Wieder fassen wir $\boxed{A_1A_2}$ und $\boxed{B_1B_2}$ als je ein Element auf. Dann gibt es 6! Permutationen von $\boxed{A_1A_2}$ $\boxed{B_1B_2}$ $\boxed{C_1}$ $\boxed{C_2}$ $\boxed{D_1}$ $\boxed{D_2}$. Wieder können wir A_1 und A_2 vertauschen (2 Möglichkeiten) und B_1 und B_2 vertauschen (wieder 2 Möglichkeiten). Damit ist $|M_A \cap M_B| = 6! \cdot 2^2$.

Wieder ist das Argument für alle Schnitte von zwei der Mengen M_A, M_B, M_C, M_D gültig. Es folgt

$$\begin{aligned} &|M_A \cap M_B| = |M_A \cap M_C| = |M_A \cap M_D| \\ =&|M_B \cap M_C| = |M_B \cap M_D| = |M_C \cap M_D| = 6! \cdot 2^2 \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir

$$\begin{aligned}&|M_A \cap M_B \cap M_C| = |M_A \cap M_B \cap M_D| \\ =&|M_A \cap M_C \cap M_D| = |M_B \cap M_C \cap M_D| = 5! \cdot 2^3\end{aligned}$$

und

$$|M_A \cap M_B \cap M_C \cap M_D| = 4! \cdot 2^4.$$

Mit Theorem 1.4.3 erhalten wir also

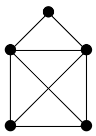
$$\begin{aligned}&|M_A \cup M_B \cup M_C \cup M_D| \\ =&|M_A| + |M_B| + |M_C| + |M_D| \\ &-(|M_A \cap M_B| + |M_A \cap M_C| + |M_A \cap M_D| + |M_B \cap M_C| + |M_B \cap M_D| + |M_C \cap M_D|) \\ &+(|M_A \cap M_B \cap M_C| + |M_A \cap M_B \cap M_D| + |M_A \cap M_C \cap M_D| + |M_B \cap M_C \cap M_D|) \\ &-(|M_A \cap M_B \cap M_C \cap M_D|) \\ =&7! \cdot 2 \cdot \text{„Anzahl von Mengen“} \\ &-6! \cdot 2^2 \cdot \text{„Anzahl von Schnitten von zwei Mengen“} \\ &+5! \cdot 2^3 \cdot \text{„Anzahl von Schnitten von drei Mengen“} \\ &-4! \cdot 2^4 \cdot \text{„Anzahl von Schnitten von vier Mengen“} \\ =&7! \cdot 2 \cdot \binom{4}{1} - 6! \cdot 2^2 \cdot \binom{4}{2} + 5! \cdot 2^3 \cdot \binom{4}{3} - 4! \cdot 2^4 \cdot \binom{4}{4} \\ =&26496\end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Ergebnis $8! - 26496 = 13824$.

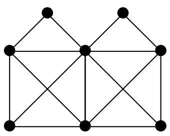
Kapitel 2

Zeichnen

Das Haus vom Nikolaus lässt sich zeichnen ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Kante doppelt zu zeichnen:



Gilt das auch noch wenn der Nikolaus in einem Reihenhaus wohnt?

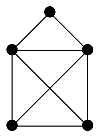


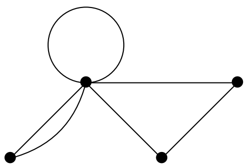
Wir nennen die Punkte • *Ecken* und die Linien *Kanten*. Falls wir das letzte Bild in einem durchzeichnen könnten, müsste folgendes gelten: Treffen wir beim Zeichnen auf eine Ecke, die nicht der Endpunkt unserer Zeichnung ist, dann müssen wir die Ecke über eine Kante verlassen können, die wir noch nicht gezeichnet haben. Wir treffen also genauso oft auf diese Kante, wie wir sie auch wieder verlassen. Daraus folgt, dass an dieser Ecke eine gerade Anzahl von Kanten aufeinander treffen. Das müsste für alle Ecken gelten, die nicht Start- oder Endpunkt unserer Zeichnung sind – also für alle bis auf maximal zwei. Das Stimmt aber nicht! In den Ecken unten links und unten rechts treffen je drei Kanten aufeinander, in der Ecke unten in der Mitte sind es fünf Kanten und in der Mitte oben sind es sieben Kanten, die

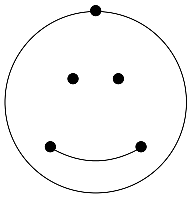
dort zusammentreffen. Es gibt also $4 > 2$ Ecken, an denen eine ungerade Anzahl von Kanten aufeinander treffen. Mit unserer Vorüberlegung folgt, dass man das Doppelhaus vom Nikolaus *nicht* zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen.
Das gleiche Argument sagt uns auch sofort, dass wir beim Haus vom Nikolaus an einer der unteren Ecken anfangen müssen zu zeichnen und an der anderen unteren Ecke aufhören müssen.

2.1 Graphen

Definition 2.1.1. Ein *Graph* G besteht aus einer endlichen Menge $E(G)$ von *Ecken* (die wir als Punkte zeichnen) und einer endlichen Menge $K(G)$ von *Kanten* (die wir als Verbindungslinien zwischen zwei Punkten zeichnen).

Beispiel 2.1.2. (a)  Achten Sie darauf, dass Ecken deutlich gekennzeichnet sind. Nicht jeder Schnitt von zwei Kanten ist eine Ecke!

(b)  Eine Ecke kann mit sich selbst verbunden sein und zwei Ecken können über mehr als eine Kante miteinander verbunden sein.

(c) 

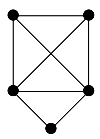
Nicht jede Ecke muss an einer Kante liegen.

Definition 2.1.3. • Eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet, heißt *Schleife*.

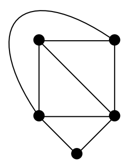
- Ein Graph heißt *einfach*, wenn es keine Schleifen gibt und wenn zwei Ecken durch höchstens eine Kante miteinander verbunden sind ((a) und (c) sind einfach).
- Zwei Ecken heißen *benachbart*, falls es eine Kante zwischen ihnen gibt.
- Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn es für beliebige Ecken e und f stets Ecken $e_1, \ldots, e_n$ gibt, mit e ist benachbart mit e_1, e_1 ist benachbart mit e_2, e_2 ist benachbart mit e_3, ... ,e_n ist benachbart mit f ((c) ist nicht zusammenhängend).

Bemerkung 2.1.4. Eine Ecke kann mit sich selbst benachbart sein. Das gilt genau dann wenn eine Schleife an dieser Ecke gezeichnet ist. Stellen wir und die Ecken als Inseln vor und die Kanten als Brücken zwischen den Inseln, dann ist ein Graph zusammenhängend, wenn wir von jeder Insel aus, jede andere Insel erreichen können.

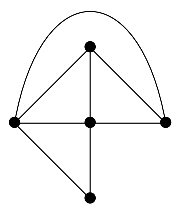
Es ist auch



ein Graph, aber den wollen wir natürlich nicht von dem aus Beispiel 2.1.2 (a) unterscheiden. Genauso wenig wollen wir



oder

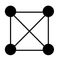
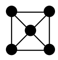


als „neuen“ Graphen ansehen.

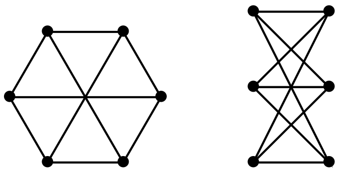
Definition 2.1.5. Zwei Graphen sind *isomorph*, wenn wir den einen durch Verschiebung der Ecken und Verformung der Kanten in den anderen Überführen können. (Dabei darf der Graph natürlich nicht „zerrissen“ werden.

Lemma 2.1.6. *Sind G und G' isomorph, so ist $|E(G)| = |E(G')|$ und $|K(G)| = |K(G')|$.*

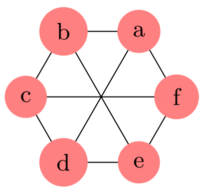
Beweis. Das Umzeichnen verändert natürlich nicht die Anzahl von Ecken und Kanten. □

Beispiel 2.1.7. • Sind  und  isomorph? Nein, denn es gibt im zweiten Graph eine Ecke mehr als im ersten.

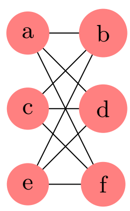
• Sind die folgenden Graphen isomorph?



Den ersten nennen wir G und den zweiten G'. Da beide Graphen die gleiche Anzahl an Ecken (6) und Kanten (9) haben, ist Isomorphie möglich. Wir beschriften die Ecken und Kanten von G irgendwie und erhalten:



Da es keine Mehrfachkanten gibt, bezeichnen wir die Kante zwischen a und b schlicht mit $a-b$, und genauso für die restlichen Kanten. Wenn wir nun G verformen, muss immer noch a und b durch die Kante $a-b$ verbunden sein, b und c durch die Kante $b-c$, und so weiter. Durch Verformen von G erhalten wir somit



Damit sind G und G' tatsächlich isomorph.

Bemerkung 2.1.8. Zwei Graphen sind genau dann isomorph, wenn wir sie so beschriften können, dass Ecken gleichen Namens auch durch Kanten gleichen Namens verbunden sind.

Definition 2.1.9. Der *Grad* einer ist die Anzahl von Kanten, die an dieser Ecke angezeichnet sind, wobei Schleifen doppelt gezählt werden (sie werden ja auch zweimal an eine Ecke angezeichnet).

Beispiel 2.1.10. Wir behaupten, dass es in jedem sozialen Netzwerk mindestens zwei Personen gibt, die die gleiche Anzahl von Freunden haben. Dabei spielt es keine Rolle, ob in dem Netzwerk viele Personen oder wenig Personen sind. Das Wort *Netzwerk* drängt uns die Benutzung von Graphen ja schon auf. Wir betrachten also den Freundschaftsgraphen der als Eckenmenge die Personen des Netzwerkes hat und zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die entsprechenden Personen befreundet sind. Dies liefert einen einfachen Graphen. Ist n die Anzahl von Ecken, dann kann jede Ecke höchstens mit $n-1$ anderen Ecken benachbart sein. Es ist also $d(e) \in \{0, \ldots, n-1\}$ für jede Ecke e. Natürlich ist es nicht möglich, dass es eine Person ohne Freunde gibt und gleichzeitig eine Person, die mit allen anderen befreundet ist. Es ist also nicht möglich, dass wir eine Ecke e mit $d(e) = 0$ und gleichzeitig eine Ecke f mit $d(f) = n-1$ finden. Daher haben wir für den Grad einer Ecke nur $n-1$ Möglichkeiten, aber wir haben n Ecken. Damit müssen zwei Ecken den gleichen Grad besitzen (die Abbildung $e \mapsto d(e)$ kann nicht injektiv sein). Übersetzen wir dies zurück bedeutet es, dass es zwei Personen im Netzwerk gibt, die die gleiche Anzahl von Freunden haben.

Satz 2.1.11 (Hauptsatz der Graphentheorie)**.** *Sei G ein Graph mit Eckenmenge E und Kantenmenge K. Sei weiter $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann gilt*

$$d(e_1) + \ldots + d(e_n) = 2 \cdot |K|.$$

Beweis. Jede Schleife erhöht den Grad von genau einer Ecke um 2 und jede Kante, die keine Schleife ist, erhöht den Graph von genau zwei Ecken um jeweils 1. Damit trägt jede Kante genau 2 zu der Summe aller Grade bei. Das ist genau die behauptete Aussage! □

2.1.12. Wie können wir einen Graphen darstellen ohne zu zeichnen? Sei die Menge der Ecken gegeben durch $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Wir erstellen eine quadratische Tabelle

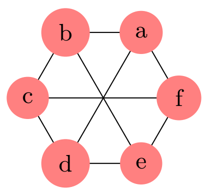
	e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_n
e_1					
e_2					
e_3					
$\vdots$					
e_n					

und tragen in die (i, j)-te Zelle (in der i-ten Zeile und j-ten Spalte) die Anzahl von Kanten zwischen e_i und e_j ein. Diese Tabelle muss symmetrisch bzgl. der Diagonalen sein, da es genauso viele Kanten zwischen e_i und e_j gibt, wie Kanten zwischen e_j und e_i.

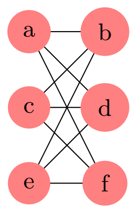
Die folgenden Aussagen sind nun offensichtlich.

Proposition 2.1.13. *Ein Graph ist schleifenfrei, genau dann wenn alle Diagonaleinträge der entsprechenden Tabelle gleich* 0 *sind. Zwei Graphen* G *und* G' *sind isomorph genau dann, wenn wir die Ecken von* G *und* G' *so beschriften können, dass die Tabellen zu* G *und* G' *gleich sind.*

Beispiel 2.1.14. Die Graphen



und



haben beide die Tabellenschreibweise:

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	0	1
b	1	0	1	0	1	0
c	0	1	0	1	0	1
d	1	0	1	0	1	0
e	0	1	0	1	0	1
f	1	0	1	0	1	0

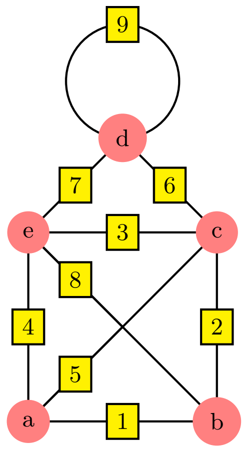
2.2 Eulersche Graphen

Definition 2.2.1. Sei G ein Graph mit Ecken $E(G)$ und Kanten $K(G)$. Ein *Weg* in G ist eine Folge

$$e_1 k_1 e_2 k_2 e_3 k_3 \ldots k_n e_{n+1}$$

von Ecken $e_1, \ldots, e_{n+1} \in E(G)$ und Kanten $k_1, \ldots, k_n \in K(G)$, so dass für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Kante k_i stets die Ecken e_i und e_{i+1} verbindet. D.h.: k_1 verbindet e_1 und e_2, k_2 verbindet e_2 und e_3 und so weiter.
Die *Länge* des Weges ist n (die Anzahl von Kanten, die er benutzt). Die Ecken e_1 und e_{n+1} heißen *Endpunkte* des Weges.

Beispiel 2.2.2. Wir betrachten den Graphen



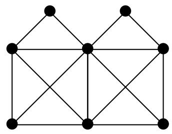
Wege in diesem Graphen sind zum Beispiel:

- a1b2c3e4a5c
- a1b1a1b1a1b1a
- d9d7e

Definition 2.2.3. Ein Weg heißt *Kreis*, wenn beide Endpunkte des Weges gleich sind. Ein Kreis heißt *echt*, wenn er keine Kante mehrfach benutzt.

Im Beipiel oben ist also a1b1a ein Kreis, aber kein echter Kreis. Der Weg a1b8e7d3e4a ist ein echter Kreis. Ecken dürfen also mehrfach in einem echten Kreis vorkommen!

Beispiel 2.2.4. Wir wissen, dass wir den Graphen

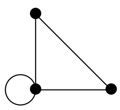
$G:$ 

nicht zeichnen können ohne den Stift abzusetzen oder eine Linie doppelt zu zeichnen. Das liegt daran, dass es mehr als zwei Ecken mit ungeradem Grad gibt. D.h. es gibt in G keinen Weg, der jede Kante genau einmal benutzt.

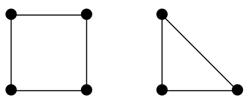
Definition 2.2.5. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn es einen (echten) Kreis in G gibt, der jede Kante genau einmal benutzt.
Ein Graph heißt *hamiltonsch*, wenn es einen echten Kreis in G gibt, der jede Ecke von G genau einmal benutzt.

Satz 2.2.6. *Ist G ein Graph, der mindestens eine Ecke mit ungeradem Grad hat, so ist G nicht eulersch.*

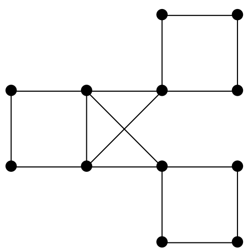
Beweis. Den Beweis haben wir schon ganz am Anfang dieses Kapitels geführt. □

Beispiel 2.2.7. (a) Ist  eulersch?

Klar! Wir sehen auch, dass Schleifen keinen Einfluß darauf haben, ob ein Graph eulersch ist oder nicht, da wir sie einfach „zwischendurch schnell ablaufen können", um dann den eigentlichen Weg weiterzugehen.

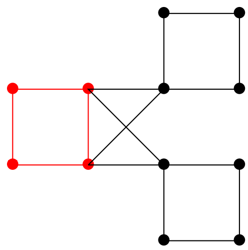
(b) Ist  eulersch?

Zwar hat jede Ecke geraden Grad, aber da der Graph nicht zusammenhängend ist, gibt es trotzdem keinen Kreis, der alle Kanten benutzt. Der Graph ist also nicht eulersch.

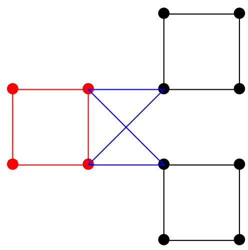
(c) Ist  eulersch?

Der Graph ist zusammenhängend und jede Ecke hat einen graden Grad. Wir können es also nicht einfach ausschließen, dass der Graph eulersch ist. Wir versuchen einfach einen Kreis zu finden. Dabei stellen wir uns nicht sonderlich geschickt an. Das gute ist, egal wie ungeschickt man sich auch anstellt: wenn es einen eulerschen Kreis gibt, so findet man ihn auch!

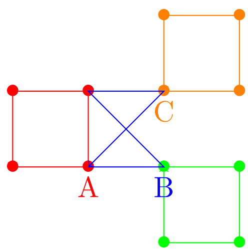
Wir starten ganz links unten und laufen einmal im Kreis:



Jetzt können wir nicht mehr weiter, und der Kreis benutzt bei weitem noch nicht alle Kanten. Wir versuchen den Rest (den schwarzen Teil) wieder in einem durch zu zeichnen. Wir starten bei dem Punkt unten rechts im roten Kreis:



Wieder geht es jetzt nicht weiter! Den Rest zeichnen wir nun auch noch in zwei Kreise:



Nun haben wir den Graphen in vier (echte) Kreise zerlegt. Aber diese können wir ganz einfach zu einem Kreis zusammensetzen:

- Laufe den roten Kreis von A nach A.
- Laufe dann den blauen Kreis von A nach B.
- Laufe dann den grünen Kreis einmal rum von B nach B.
- Laufe den blauen Kreis weiter von B nach C.
- Laufe den orangenen Kreis einmal herum von C nach C.
- Laufe den blauen Kreis zu Ende von C nach A.

Das ist ein echter Kreis, der jede Kante genau einmal benutzt. Damit ist der Graph eulersch.

Theorem 2.2.8. *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn jede Ecke geraden Grad besitzt.*

Beweis. Es sind zwei Richtungen zu zeigen, wobei wir die eine schon gesehen haben. Denn wir wissen nach Satz 2.2.6, dass gilt

$$\text{besitzt } G \text{ mindestens eine Ecke mit ungeradem Grad} \\ \implies G \text{ ist nicht eulersch}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$G \text{ ist eulersch} \implies \text{alle Ecken in } G \text{ haben graden Grad}$$

Diese Richtung ist also erledigt. Es bleibt zu zeigen, dass G eulersch ist, falls G zusammenhängend ist und jede Ecke in G geraden Grad besitzt. Sei also G so ein Graph. Der Beweis ist nur eine Verallgemeinerung von Beispiel 2.2.7 (c).

1. Schritt: Es gibt einen echten Kreis in G. Denn:
Sei e_0 irgendeine Ecke in G. Wir gehen von e_0 über eine Kante k_1 zu einer Ecke e_1 und streichen k_1 durch. Falls $e_1 = e_0$ ist (das ist der Fall, wenn k_1 eine Schleife war), sind wir fertig. Ansonsten gibt es eine Kante an e_1, die noch nicht durchgestrichen ist. Denn: $d(e_1)$ ist gerade und insbesondere gilt damit $d(e_1) \geq 2$. Sei k_2 diese Kante, die e_1 mit einer Ecke e_3 verbindet. Diese Kante k_2 streichen wir wieder durch. Dann gibt es an e_2 noch genau $d(e_2) - 2$

Kanten, die nicht durchgestrichen sind. *Das ist immer noch eine gerade Zahl!* Falls $e_3 = e_0$ ist, sind wir fertig, da dann $e_0k_1e_1k_2e_3$ ein echter Kreis ist. Falls $e_3 \neq e_0$, so muss es eine Kante k_3 geben, die noch nicht gestrichen ist, die e_3 mit einer Ecke e_4 verbindet. Diese Kante streichen wir durch. Dann gibt es wieder $d(e_3) - 2$ Ecken an e_3, die nicht durchgestrichen sind. Ist $e_4 = e_0$ sind wir fertig, andernfalls finden wir eine nicht gestrichene Kante an e_4 und so weiter und so weiter. Wir erhalten das folgende Verfahren:

1. Wähle $e_0 \in E(G)$ beliebig.

2. Ist ein Weg $e_0k_1e_1 \ldots k_ie_i$ konstruiert, so ist entweder $e_i = e_0$ und wir sind fertig, oder von e_i geht eine Kante $k_{i+1} \notin \{k_1, \ldots, k_i\}$ ab. Ist e_{i+1} der zweite Endpunkt von k_{i+1}, so ist $e_0k_1e_1 \ldots k_ie_ik_{i+1}e_{i+1}$ ein neuer Weg und wir fangen von vorne an.

Da es nur endlich viele Kanten in G gibt, bricht dieses Verfahren irgendwann ab. Das heißt, dass irgendwann ein Weg $e_0k_1e_1 \ldots k_ie_i$ konstruiert wurde mit $e_0 = e_i$ – also ein echter Kreis.

2. Schritt: Falls der Kreis aus dem ersten Schritt alle Kanten aus G benutzt, sind wir fertig. Andernfalls entfernen wir alle im 1. Schritt durchgestrichenen Kanten aus G und erhalten damit einen neuen Graphen $G^{(1)}$. Dann gilt:

(i) jede Ecke aus $G^{(1)}$ hat geraden Grad, und

(ii) $G^{(1)}$ und G haben eine gemeinsame Ecke.

(i) folgt, da wir im ersten Schritt an jeder Ecke eine gerade Anzahl von Kanten gestrichen haben. Da der Grad jeder Ecke zu Beginn gerade war, ist der Grad jeder Ecke aus $G^{(1)}$ immer noch gerade.
(ii) folgt, da G zusammenhängend ist. Damit ist jede Ecke aus dem Weg aus dem 1. Schritt, über einen Weg mit einer Ecke aus $E(G)\backslash E(G^{(1)})$ verbunden.

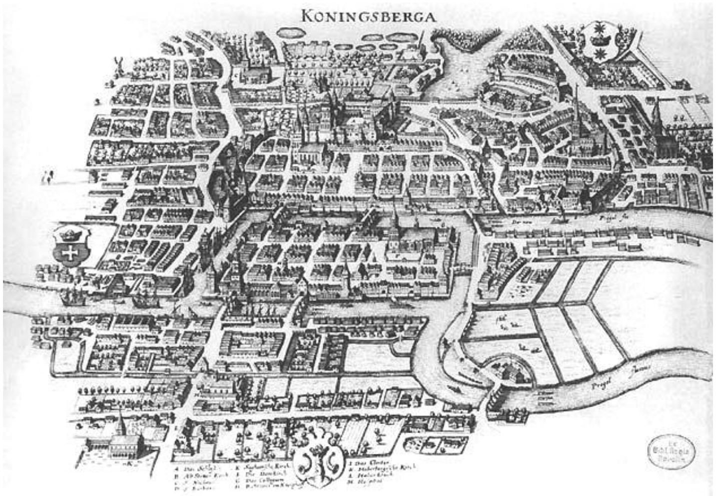
3. Schritt: Ausgehend von der gemeinsamen Ecke e von G und $G^{(1)}$ gibt es einen echten Kreis in $G^{(1)}$, der genauso konstruiert wird, wie im 1. Schritt. Weiter führt der Kreis aus dem 1. Schritt auch über e. Wir können also von e aus den Kreis aus dem 1. Schritt laufen und dann von e aus den echten Kreis aus $G^{(1)}$. Dieser Weg ist immer noch ein echter Kreis in G, der länger ist als der Kreis aus dem 1. Schritt.

4. Schritt: Wir haben gezeigt: Entweder ein echter Kreis aus G (der immer existiert) benutzt alle Kanten von G genau einmal, oder wir können den echten Kreis verlängern. Dann erhalten wir einen echten Kreis, der entweder alle Kanten benutzt, oder den wir verlängern können, ... Da es nur endlich viele Kanten gibt, erhalten wir nach endlich vielen Verlängerungen einen echten Kreis in G, der jede Kante genau einmal benutzt. Damit ist G eulersch. □

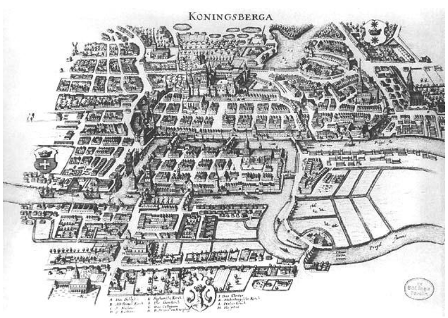
Korollar 2.2.9. *Man kann den zusammenhängenden Graphen G genau dann zeichnen ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen, wenn es maximal zwei Ecken von ungeradem Grad gibt.*

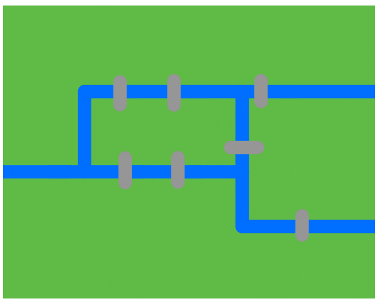
Beweis. Wieder wissen wir bereits, dass wir den Graphen nicht wie gefordert zeichnen können, wenn es mehr als zwei Ecken von ungeradem Grad gibt.
Gibt es keine Ecke von ungeradem Grad, lässt sich der Graph wie gewünscht zeichnen, da der Graph eulersch ist.
Da nach dem Hauptsatz der Graphentheorie die Summe der Grade aller Ecken gleich $2 \cdot |K(G)|$ – also gerade – ist, ist es nicht möglich, dass genau eine Ecke ungeraden Grad besitzt.
Gibt es genau zwei Ecken von ungeradem Grad in G, sagen wir e und f, so zeichnen wir eine zusätzliche Kante zwischen e und f in den Graphen ein. Dann erhöht sich der Grad von e und von f um jeweils 1 und wird damit gerade. Der neue Graph ist also eulersch und es gibt einen echten Kreis, der jede Kante (auch die Kante zwischen e und f) genau einmal benutzt. Radieren wir nun die neue Kante zwischen e und f wieder heraus, bleibt ein Weg übrig, der jede Kante aus G genau einmal benutzt. Folgen wir diesem Weg mit dem Stift, so zeichnen wir G ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Kante doppelt zu zeichnen. □

Kann man in Königsberg einen Rundweg über alle sieben Brücken laufen, ohne eine Brücke doppelt zu benutzen?



Kann man in Königsberg einen Rundweg über alle sieben Brücken laufen, ohne eine Brücke doppelt zu benutzen?



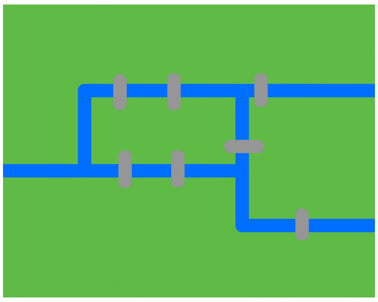


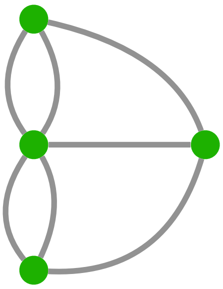
Vereinfachung des Stadtplans

Kann man in Königsberg einen Rundweg über alle sieben Brücken laufen, ohne eine Brücke doppelt zu benutzen?

entspricht:

Ist der Graph eulersch?



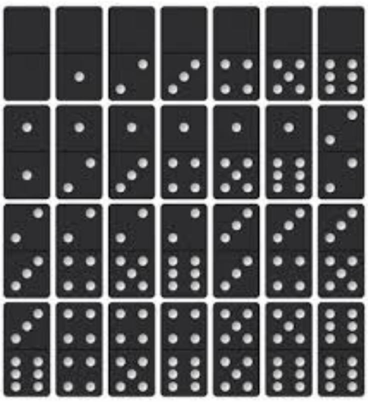


Vereinfachung des Stadtplans

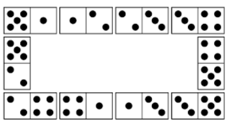
minimalistische Schreibweise

Das ist ein Graph!

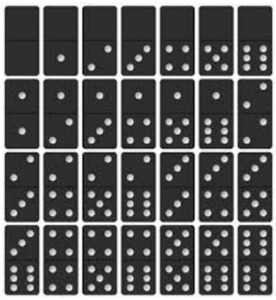
Kann man die Steine eines DOMINO Spiels gültig aneinander legen, so dass man am Ende dort anschließt wo man angefangen hat?

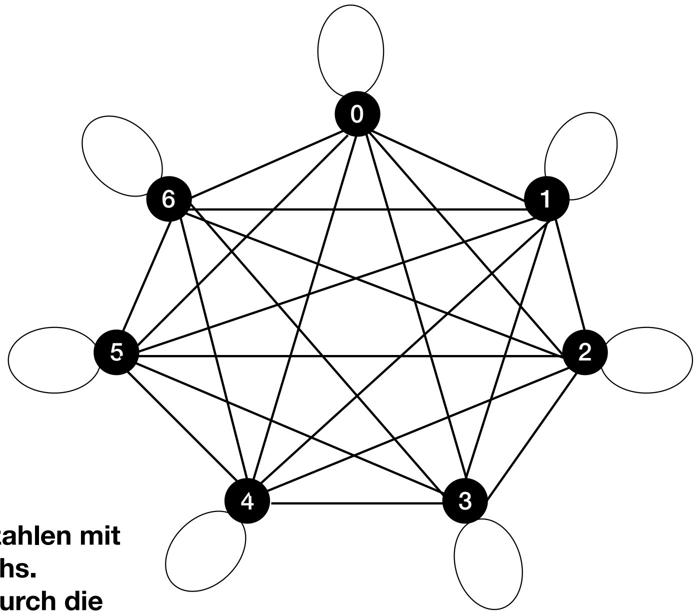


Diese Steine sollen mit der schmalen Seite aneinander gelegt werden, so dass stets zwei gleiche Augenzahlen nebeneinander liegen.



Kann man die Steine eines DOMINO Spiels gültig aneinander legen, so dass man am Ende dort anschließt wo man angefangen hat?

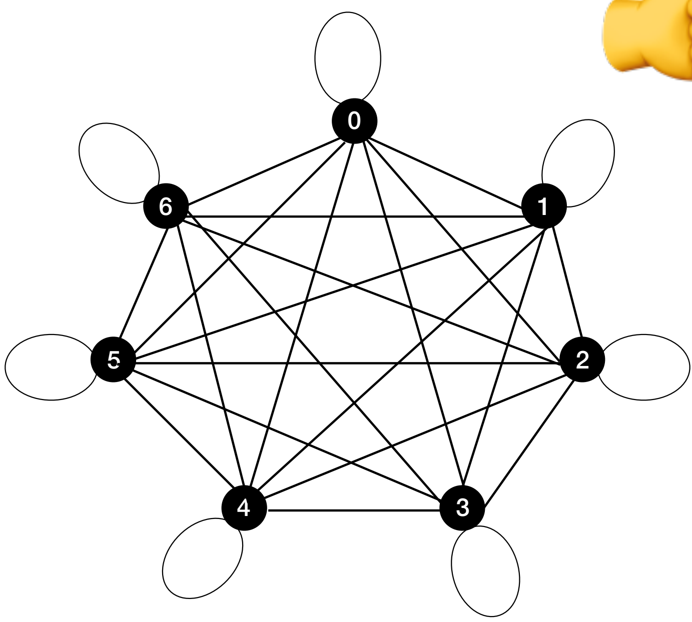




**Wir identifizieren die Augenzahlen mit den Ecken eines Graphs.
Die Spielsteine sind dann durch die Kanten repräsentiert.**

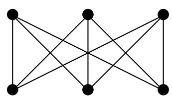
Kann man die Steine eines DOMINO Spiels gültig aneinander legen, so dass man am Ende dort anschließt wo man angefangen hat?

entspricht: **Ist der Graph eulersch?**



2.3 Noch ein Kinderrätsel

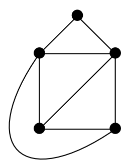
Drei Häuser sollen an Strom, Wasser und Gas angeschlossen werden. Ist es möglich die Leitungen so zu legen, ohne dass sich zwei Leitungen kreuzen? Die Frage lautet also: Lässt sich der Graph



so zeichnen, dass sich keine zwei Kanten überschneiden?

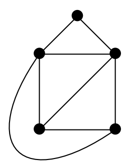
Definition 2.3.1. Ein Grpah heißt *planar*, wenn er isomorph zu einem Graphen ist in dem sich keine zwei Kanten schneiden.

Beispiel 2.3.2. Der Graph vom „Haus vom Nikolaus“ ist isomorph zu



und damit planar.

Bemerkung 2.3.3. Jeder planare Graph unterteilt die Ebene in *Flächen*. Zum Beispiel ist offensichtlich planar und es gibt eine Fläche. Der Graph



unterteilt die Ebene in fünf Flächen.
WICHTIG: Es gibt immer eine „äußere Fläche“!

Theorem 2.3.4 (eulersche Formel)**.** *Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit e Ecken, k Kanten und f Flächen. Dann gilt*

$$e + f = k + 2.$$

Beweis. Wir wollen eulersche Graphen benutzen um die eulersche Formel zu beweisen.

1. Fall: jede Ecke in G hat einen geraden Grad.

Dann gibt es nach Theorem 2.2.8 einen echten Kreis

$$e_0 k_1 e_1 k_2 \dots k_k e_k \text{ mit } e_0 = e_k \text{ und } K(G) = \{k_1, \dots, k_k\}. \tag{2.1}$$

Einige Ecken von E kommen mehrfach in diesem Kreis vor; z.B.: $e_0 = e_k$. Wir zählen wie oft wir eine Ecke erreichen, die wir vorher schon einmal durchlaufen sind und nennen diese Zahl w. Formal ist

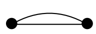
$$w = |\{i \in \{1, \dots, k\} | e_i \in \{e_0, \dots, e_{i-1}\}\}|.$$

Wir zeichnen die Kanten von K in der Reihenfolge die durch den Kreis (2.1) vorgegeben ist. Sind nur die Ecken eingezeichnet gibt es eine Fläche (die äußere). Immer wenn wir auf eine Ecke treffen, die wir schon einmal durchlaufen haben, haben wir ein neue Fläche gezeichnet. Damit ist $\boxed{w + 1 = f}$. Andererseits sind unter $\underbrace{e_0, \dots, e_k}_{(k+1)\text{-viele}}$ nur e verschiedene Ecken (denn mehr Ecken hat der Graph nicht). Es gibt also genau $k + 1 - e$ Wiederholungen. Es folgt $\boxed{w = k + 1 - e}$.
Setzen wir die beiden Formeln zusammen, erhalten wir

$$k + 1 - 1 = f - 1 \implies k + 2 = e + f.$$

Das war zu zeigen.

2. Fall: Es gibt Ecken mit ungeradem Grad in G.

Wir „verdoppeln“ alle Kanten! D.h. Wir fügen k weitere Kanten ein, so dass aus der Abschnitt  wird. Den neuen Graphen nennen wir G'.
Dann ist G' immer noch planar, aber da wir den Grad jeder Ecke verdoppelt haben, ist der Grad jeder Ecke in G' gerade. Aus dem ersten Fall folgt nun

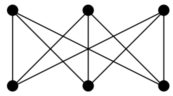
$$\underbrace{|E(G')|}_{=e} + \text{„Anzahl Flächen von } G'\text{“} = \underbrace{|K(G)|}_{=2\cdot k} + 2.$$

Jede Kante von G führt bei der Konstruktion von G' auf eine neue Fläche. Damit gibt es in G' genau $f + k$ Flächen. Damit erhalten wir

$$e + (f + k) = 2 \cdot k + 2 \implies e + f = k + 2.$$

Damit ist die Aussage auch im zweiten Fall bewiesen. □

Zurück zum Kinderrätsel: Wir wollen entscheiden, ob der Graph G



planar ist, oder nicht. Der Graph besitzt 9 Kanten und 6 Ecken.
Angenommen der Graph wäre planar. Wir sehen, dass es keine Kreise der Länge drei in G gibt. Damit wird jede Fläche von mindestens vier Kanten begrenzt. Weiter trennt jede Kante höchstens zwei verschiedene Flächen. Damit besitzt G höchstens

$$2 \cdot \frac{|K(G)|}{4} = \frac{9}{2} = 4,5$$

Flächen. Die eulersche Formel liefert aber, dass G genau

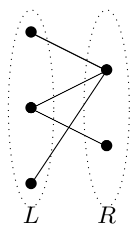
$$9 + 2 - 6 = 5$$

Flächen hat. Das ist ein Widerspruch und somit kann die Annahme nicht richtig sein. Der Graph G ist also nicht planar!

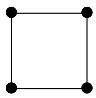
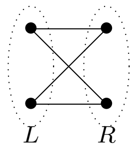
2.4 Bipartite Graphen und der Hochzeitssatz

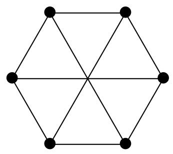
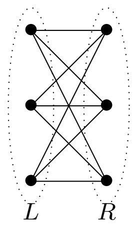
Definition 2.4.1. Ein einfacher Graph G ist *bipartit*, falls wir die Ecken von G in zwei disjunkte Teilmengen L und R unterteilen können, so dass keine zwei Ecken aus L und keine zwei Ecken aus R benachbart sind.

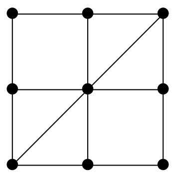
Dass wir die Ecken von G in disjunkte Teilmengen aufteilen, bedeutet, dass $E(G) = L \cup R$ und $L \cap R = \emptyset$ ist. Die weitere Bedingung sagt gerade, dass alle Nachbarn von einer Ecke aus L in R liegen und umgekehrt. Wenn wir ab jetzt schreiben, dass ein Graph G bipartit ist und Eckenmenge $E(G) = L \cup R$ hat, dann meinen wir immer, dass L und R die Bedingungen aus Definition 2.4.1 erfüllen.

Beispiel 2.4.2. (a) 

ist bipartit.

(b)  ist bipartit, denn der Graph ist isomorph zu 

(c) Auch  ist bipartit, denn er ist isomorph zu 

(d) Ist  bipartit? Dieser Graph enthält ein Dreieck, also drei Ecken, die alle untereinander benachbart sind. Wäre der Graph bipartit, so wäre eine dieser Ecken in L und die anderen beiden wären notgedrungen in R. Damit liegen zwei benachbarte Ecken in R, was nicht möglich ist. Damit ist dieser Graph nicht bipartit.

Wir sehen, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn wir die Ecken in eine linke (daher das L) und eine rechte (daher das R) Spalte zeichnen können, so dass es keine vertikalen Kanten gibt.

Theorem 2.4.3. *Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn jeder Kreis in G eine gerade Länge besitzt.*

Beweis. Aus den übungen wissen wir, dass gilt:

$$\text{es gibt einen Kreis ungerader Länge in } G \implies G \text{ ist nicht bipartit}$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass es in einem bipartiten Graphen nur Kreise gerader Länge gibt.
Es bleibt zu zeigen, dass ein Graph bipartit ist, wenn es nur Kreise gerader Länge gibt. Sei also G so, dass jeder Kreis in G eine gerade Länge hat. Wir dürfen ohne weiteres annehmen, dass G zusammenhängend ist, da G bipartit ist, wenn jeder zusammenhängende Teil von G bipartit ist.
Wir wollen die Ecken von G in zwei disjunkte Teilmengen aufteilen. Zunächst machen wir uns aber keine Gedanken darüber, dass die Aufteilung disjunkt

sein soll. Wähle irgendeine Ecke $e \in E(G)$ und sage $e \in L$. Nun fügen wir alle Nachbarn von e zu einer Menge R hinzu, alle Nachbarn dieser Elemente kommen wieder zu L, und so weiter. Da G zusammenhängend ist, haben wir irgendwann jede Ecke von G mindestens einer der Mengen L und R hinzugefügt. Wir wollen zeigen, dass es keine Ecke gibt, die sowohl in L als auch in R liegt. Angenommen, es gäbe so eine Ecke $f \in L \cap R$. Dann gibt es per Konstruktion von L und R einen Weg

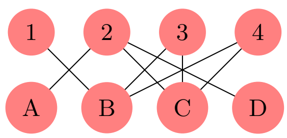
$$ek_1e_1k_2 \dots k_{r_1}f \text{ , mit } r_1 \text{ ungerade (da } f \in R),$$

und einen Weg

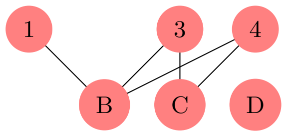
$$ek_1'e_1k_2' \dots k_{r_2}'f \text{ , mit } r_2 \text{ gerade (da } f \in L).$$

Nun laufen wir den ersten Weg der Länge r_1 von e nach f und anschließend den zweiten Weg der Länge r_2 von f nach e. Dann sind wir einen Kreis in G der Länge $r_1 + r_2$ gelaufen. Aber $r_1 + r_2$ ist ungerade! Da es nach Voraussetzung keinen Kreis ungerader Länge in G gibt, ist dies ein Widerspruch. Damit kann es kein $f \in R \cap L$ geben, und die Mengen L und R sind tatsächlich disjunkt. Weiter liegen alle Nachbarn einer Ecke aus L in R und andersherum. Damit ist G bipartit. □

Beispiel 2.4.4. Vier Studierende A, B, C, D bewerben sich bei vier Schulen 1, 2, 3, 4. Wir verbinden eine der Personen mit einer Schule, wenn diese Schule die Person gerne einstellen möchte. Es ergibt sich das folgende Bild:



Dieser Graph ist offensichtlich bipartit, denn es ist per Konstruktion ausgeschloßen, dass zwei Personen oder zwei Schulen verbunden sind.
Ist es möglich, dass jede Schule genau eine Person einstellt, die Sie auch einstellen möchte?
Damit das funktionieren kann, muss Person A von der Schule 2 eingestellt werden. Damit hat Schule 2 schon den passenden Kandidaten bekommen. Streichen wir nun die Ecken A und 2 und sämtliche Kanten mit einer dieser Ecken als Endpunkt aus dem Graphen heraus, bleibt



Nun bleiben nur noch zwei Personen für drei Schulen übrig. Es ist also nicht möglich, dass jede Schule einen Wunschkandidaten einstellt.

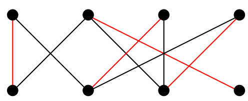
Definition 2.4.5. Sei G bipartit mit Eckenmenge $E(G) = L \cup R$. Wir nehmen weiter an, dass $|L| \leq |R|$ gilt. Falls dies nicht der Fall ist, dann vertauschen wir einfach die Rollen von L und R. Ein *Matching* in G ist eine Auswahl von $|L|$ Kanten $k_1, \ldots, k_{|L|}$, die zusammen genau $2 \cdot |L|$ verschiedene Endpunkte haben.

Dass $k_1, \ldots, k_{|L|}$ zusammen genau $2 \cdot |L|$ Endpunkte besitzen, bedeutet:

- Jede Ecke aus L ist Endpunkt von genau einer der Kanten $k_1, \ldots, k_{|L|}$, und
- alle Endpunkte der $|L|$ Kanten sind verschieden. Es gibt also auch genau $|L|$ verschiedene Endpunkte der Kanten aus R. (Dafür brauchen wir $|L| \leq |R|$.)

Beispiel 2.4.6. (a) Im Graphen aus Beispiel 2.4.4 gibt es kein Matching. Denn ein Matching würde jede Person mit einer anderen Schule verbinden und dabei nur Kanten des Graphen benutzen. Das ist aber, wie wir gesehen haben, nicht möglich.

(b) Fügen wir eine Kante zu dem Graph aus Beispiel 2.4.4 hinzu erhalten wir den Graphen



Dieser Graph besitzt ein Matching. Die vier Kanten aus einem Matching haben wir rot gezeichnet.

(c) Es kann natürlich passieren, dass es in einem Graphen mehrere Matchings gibt (das wird meistens der Fall sein). Im folgenden Graphen gibt es ein Matching. Wir haben zwei verschiedene jeweils rot gekennzeichnet. Finden Sie noch mehr?

Lemma 2.4.7. *Sei G ein bipartiter Graph mit $E(G) = L \cup R$ und $|L| \leq |R|$. Falls es eine Teilmenge $M \subseteq L$ gibt, so dass die Ecken aus M zusammen weniger als $|M|$ Nachbarn haben, dann gibt es kein Matching in G.*

Beweis. Wir übersetzen die Aussage in das Setting der Jobsuche aus Beispiel 2.4.4. Wir haben $l = |L|$ Schulen und $r = |R|$ Schulen. Wenn es eine Auswahl von $l' \leq l$ Schulen gibt, für die es zusammen weniger als l' passende Kandidaten gibt, so ist ausgeschloßen, dass jede Schule einen passenden Kandidaten einstellen kann. Das ist schon der ganze Beweis. Wir können den Beweis natürlich auch mit den Bezeichnungen der Graphentheorie führen:
Angenommen es gibt ein Matching $\{k_1, \ldots, k_l\}$ in G (wieder ist $l = |L|$). Zu jeder Ecke $e \in L$ gibt es genau eine Kante aus $\{k_1, \ldots, k_l\}$, die e als Endpunkt besitzt. Ist nun $M = \{e_1, \ldots, e_{l'}\} \subseteq L$, so gibt es l' Kanten aus $\{k_1, \ldots, k_l\}$, die jeweils eine der Ecken aus M als Endpunkt haben. Die restlichen Endpunkte dieser l' Kanten sind alle verschieden und benachbart zu einer Ecke aus M. Damit haben die Ecken aus M zusammen mindestens $|M|$ Nachbarn.
Falls es also eine Teilmenge $M \subseteq L$ gibt, so dass die Elemente aus M zusammen zu weniger als $|M|$ Ecken benachbart sind, kann es kein Matching geben. □

Beispiel 2.4.8. Bei einer Partnervermittlung sind l Frauen und r Männer angemeldet und es gilt $l \leq r$. Falls $l' \leq l$ der Frauen zu insgesamt weniger als l' Männern passen, ist es nicht möglich alle Frauen mit einem passenden Mann zu verkuppeln.

Dieses Beispiel ist namensgebend für den folgenden Hauptsatz dieses Abschnitts.

Theorem 2.4.9 (Hochzeitssatz)**.** *Sei G ein bipartiter Graph mit Eckenmenge $E(G) = L \cup R$ und $|L| \leq |R|$. Es gibt genau dann ein Matching in G, wenn die folgende Aussage gilt*

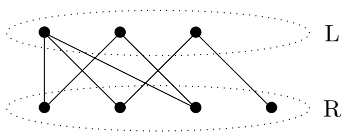
$$M \subseteq L \implies \text{die Ecken aus } M \text{ haben zusammen mindestens } |M| \text{ Nachbarn} \tag{2.2}$$

Dieses Theorem können wir nun wieder auf Beispiel 2.4.8 anwenden: Passen immer l' Frauen zusammen zu mindestens l' Männern, so ist es möglich jede Frau mit einem passenden Mann zu verkuppeln.
Wir kommen jetzt zum Beweis des Hochzeitssatzes. Der Beweis wird uns etwas länger beschäftigen.

Beweis. Wir müssen zwei Implikationen beweisen. Die erste haben wir allerdings schon eingesehen. Denn in Lemma 2.4.7 haben wir gezeigt, dass ein Matching in G die Bedingung (2.2) impliziert.
Wir zeigen nun, dass die Bedingung (2.2) auch die Existenz eines Matchings impliziert. Wir führen dazu eine Induktion über $l = |L|$.
Induktionsanfang: Für $l = 1$, ist $L = \{e\}$. Da (2.2) gilt, gibt es mindestens eine Ecke $f \in R$, die mit e benachbart ist. Die Kante zwischen e und f ist dann bereits ein Matching in G.
Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges aber festes $l \in \mathbb{N}$ gelte: Ist G ein bipartiter Graph mit $E(G) = L \cup R$ und $l = |L| \leq |R|$ in dem die Bedingung (2.2) gilt, so gibt es ein Matching in G.
Induktionsschritt: Sei also G ein bipartiter Graph wie oben mit $|L| = l+1 \leq |R|$. Wir müssen zeigen, dass (2.2) auch für diesen Graphen die Existenz eines Matchings impliziert. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: Je $l' < l + 1$ Ecken aus L sind zusammen mit mindestens $l' + 1$ Ecken aus R benachbart.

Als Beispiel betrachten wir den Graphen



Sei nun $e \in L$ beliebig. Nach Voraussetzung ist e zu mindestens einer Ecke $f \in R$ benachbart. Wir entfernen nun e, f und alle Kanten, die e oder f als Endpunkt haben, aus G. Dann erhalten wir einen Graphen G', der immer noch bipartit ist. Schreiben wir wieder $E(G) = L' \cup R'$, so ist $L' = L \setminus \{e\}$ und $R' \setminus \{f\}$. Insbesondere ist

$$|L'| = l + 1 - 1 = l \leq |R| - 1 = |R'|.$$

Wir möchten auf G' unsere Induktionsvoraussetzung anwenden. Dazu müssen wir noch die Bedingung (2.2) überprüfen. Seien also $l' \leq l = |L'|$ Ecken in L' gegeben. Ist M die Menge aller Nachbarn dieser Ecken in G, so ist $M \setminus \{f\}$ die Menge aller Nachbarn dieser Ecken in G'. Nach Voraussetzung (1. Fall) ist $|M| \geq l'+1$, und somit ist $|M\setminus\{f\} \geq l'$. Damit haben die l' Ecken aus L' mindestens l' Nachbarn in R'. Wir können also die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, dass es in G' ein Matching $\{k_1, \ldots, k_l\}$ gibt. Natürlich hat keine der Kanten $k_1, \ldots, k_l$ eine der Ecken e oder f als Endpunkt (diese Ecken liegen nämlich garnicht in G'). Ist nun k_{l+1} die Kante in G, die e und f verbindet, so haben die $l+1 = |L|$ Kanten $k_1, \ldots, k_{l+1}$ zusammen genau $2\cdot(l+1)$ Endpunkte, was nichts anderes bedeutet, als dass $\{k_1, \ldots, k_{l+1}\}$ ein Matching in G ist. Das war zu zeigen.

2. Fall: Es gibt eine Auswahl von $l' < l+1$ Ecken aus L, die zusammen mit genau l' Ecken aus R benachbart sind.

Seien $e_1, \ldots e_{l'} \in L$ so, dass sie zusammen genau l' Nachbarn in R haben. Diese Nachbarn nennen wir $f_1, \ldots, f_{l'} \in R$. Wir entfernen auf G alle Ecken $e_1, \ldots, e_{l'}$, $f_1, \ldots, f_{l'}$ und alle Kanten, die eine dieser Ecken als Endpunkt haben. Den so entstandenen Graphen nennen wir G'. Wieder ist G' immer noch bipartit. Ist die Eckenmenge gegeben durch $E(G') = L' \cup R'$, so ist $L' = L \setminus \{e_1, \ldots, e_{l'}\}$ und $R' = R \setminus \{f_1, \ldots, f_{l'}\}$. Insbesondere ist dann

$$|L'| = l + 1 - l' \leq |R| - l' = |R'|.$$

Wieder wollen wir auf G' unsere Induktionsvoraussetzung anwenden. Seien dazu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r \in L'$ beliebig. Dann haben die $r+l'$ Ecken $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, e_1, \ldots, e_{l'}$ nach (2.2) zusammen mindestens $r + l'$ Nachbarn in G. Unter diesen Nachbarn sind natürlich $f_1, \ldots, f_{l'}$. Es folgt, dass $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ mindestens r Nachbarn in G' haben. Damit können wir die Induktionsvoraussetzung tatsächlich auf G' anwenden, und wir erhalten, dass es in G' ein Matchning gibt; sagen wir $\{k_1, \ldots, k_{l+1-l'}\}$.

Wir betrachten nun einen weiteren Graphen G'', indem wir genau die Ecken aus G betrachten, die wir bei G' nicht berücksichtigt hatten. D.h.: G'' ist der Graph, der aus $e_1, \ldots, e_{l'}$, $f_1, \ldots, f_{l'}$ und allen Kanten aus G zwischen diesen Ecken besteht. Mit G erfüllt auch G'' die Bedingung (2.2). Wir können also auch auf G'' unsere Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten, dass es in G'' ein Matching $\{\tilde{k_1}, \ldots, \tilde{k_{l'}}\}$ gibt. Die Graphen G' und G'' haben keine gemeinsame Ecke. Damit haben die $l' + 1 = |L|$ Kanten $k_1, \ldots, k_{l+1-l'}, \tilde{k_1}, \ldots, \tilde{k_{l'}}$ genau $2 \cdot (l' + 1) = 2 \cdot |L|$ Endpunkte. Diese Auswahl an Kanten ist also ein Matching in G. □

Beispiel 2.4.10. Sei ein Standart-Kartenspiel mit 13 Werten á vier Farben gegeben. Wir mischen dieses Kartenspiel und legen 13 Stapel mit je vier Karten auf den Tisch. Wir behaupten nun, dass wir aus jedem Stapel genau eine Karte ziehen können, so dass wir am Ende 13 Karten mit 13 unterschiedlichen Werten gezogen haben.
Seien dazu $A_1, \ldots A_{13}$ die Kartenstapel und seien

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, K, A$$

die 13 Werte. Wir betrachten den Graphen mit Eckenmenge $A_1, \ldots, A_{13}$, $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, D, K, A$, so dass A_i genau mit den Werten verbunden ist, die im Stapel A_i vorkommen. Ist $k_1, \ldots, k_{13}$ ein Matching in diesem Graphen, so verbinden die Kanten $k_1, \ldots, k13$ die 13 Stapel mit den 13 Werten! Insbesondere ist die Behauptung bewiesen, falls der Graph ein Matching hat. Das wollen wir natürlich mit dem Hochzeitssatz zeigen:
Da jeder Wert genau viermal vorkommt, sind für alle $k \in \{1, \ldots, 13\}$ unter $4k$ Karten, mindestens k unterschiedliche Werte. D.h.: in je k unserer Stapel sind mindestens k verschiedene Werte enthalten. Anders formuliert bedeutet das gerade, dass je k Stapel zusammen mindestens k Nachbarn haben! Mit dem Hochzeitssatz erhalten wir, dass es ein Matching in G gibt. Nach unseren Vorüberlegungen ist damit die Behauptung bewiesen.