Mathematatik für Studierende der Informatik

Lukas Pottmeyer

31. August 2022

Vorwort

Dieses Skript entsteht im Laufe der Veranstaltung *Mathematik I für Studierende der Informatik* an der Universität Duisburg-Essen im Sommersemester 2022. Es folgt sehr eng dem Skript von Ursula Ludwig zur gleichen Veranstaltung aus dem Sommersemester 2018, welches mir freundlicherweise von Frau Ludwig zur Verfügung gestellt wurde. Sicher ist dieses Skript nicht fehlerfrei. Wer Fehler entdeckt, kann mich sehr gerne per Mail an

lukas.pottmeyer@uni-due.de

darauf hinweisen.

Mathematisches Vokabelheft

Um Zeit und Nerven zu sparen ist es in der Mathematik nötig gewisse Symbole zur Unterstützung heranzuziehen. Im Laufe der Vorlesung werden wir einige dieser Symbole kennenlernen und hier in einem *Vokabelheft* sammeln. Verwenden Sie die folgenden Symbole außschließlich in der angegebenen Bedeutung!

Symbol	Bedeutung

Inhaltsverzeichnis

Das Symbol

deutet an, dass hier eine geeignete Stelle für eine Pause ist. Das bedeutet nicht, dass Sie dort unbedingt eine Pause machen müssen, sondern, dass Sie an anderen Stellen bitte keine Lernpausen einlegen.

Einleitung

In dieser Vorlesung werden wir einige mathematische Grundlagen lernen. Einiges davon wird Ihnen grob aus der Schule bekannt vorkommen. So werden die meisten von Ihnen die Frage „Was ist die Ableitung von $x^2 + 1$?“ sofort beantworten können.[1] Allerdings geht es in der Mathematik um Präzision. Daher wird sich der Zugang zu den Themen, den Sie hier kennenlernen, deutlich von dem Zugang aus Schulzeiten unterscheiden.

Wir werden zunächst kurz besprechen was ein mathematischer Beweis ist. Dazu brauchen wir die Möglichkeit, zu entscheiden ob eine Aussage wahr oder falsch ist, und wie verschiedene Aussagen miteinander verknüpft werden können. Weiter kann es sehr langwierig werden, eine mathematische Aussage nur mit Hilfe der Alltagssprache (dabei kommt es nicht darauf an, ob wir auf Deutsch, Englisch oder sonst einer Sprache kommunizieren) präzise zu beschreiben. Der Persische Gelehrte Abū Ǧa’far Muḥammad b. Mūsā al-Ḫwārazmī verfasste ca 825 ein Werk in dem er erklärt, wie man quadratische Gleichungen lösen kann. Dieses Verfahen ist aus heutiger Sicht mit der *pq*-Formel in einer halben Zeile beschrieben. Da es zu der Zeit jedoch noch keine *mathematische Sprache* gab und der Autor keine negativen Zahlen kannte, musste der Verfasser tatsächlich ein ganzes Buch schreiben um die Lösung zu erklären. Es ist also zwingend erforderlich, neue Symbole zu Hilfe zu nehmen. Diese werden wir ebenfalls kurz einführen. Wir sind also weit davon entfernt die Vorlesung mit dem *Rechnen* zu beginnen.[2]

Bevor wir rechnen können, müssen wir als nächstes wissen, womit man denn rechnen kann. Damit ist nicht gemeint, dass Bayern München auch

[1] Sollte das bei Ihnen nicht der Fall sein, ist das kein Problem – wir werden alles in Ruhe erarbeiten.

[2] Die angesprochenen Themen haben die meisten von Ihnen schon in der Vorlesung „Diskreten Mathematik“ gesehen. Wir werden sie daher ziemlich schnell abhandeln.

dieses Jahr wieder die Bundesliga gewinnt, sondern auf welchen Objekten wir *Rechenregeln* definieren können. Wir führen also kurz die bekannten Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ein. Etwas aufwendiger wird es sein formal zu beschreiben was die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind. Von einem Computer (*Rechner*) erwarten wir, dass er rechnen kann. Dass es nicht schwierig ist zwei beliebig große natürliche Zahlen zu addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, können wir uns bereits mit dem Schulwissen gut veranschaulichen. Wir erwarten aber selbst von kleinen Taschenrechnern, dass sie uns halbwegs präzise sagen können welchen Wert die Zahl $e^{\sqrt{2}}$ hat. Beide Zahlen e und $\sqrt{2}$ haben in der Dezimaldarstellung unendlich viele Nachkommastellen. Um den Wert $e^{\sqrt{2}}$ dennoch bestimmen zu können (oder einem Computer zu erklären, wie das geht) sollten wir also die reellen Zahlen und ihre Eigenschaften verstehen.
Wir werden auch noch einen weitern Zahlbereich kennenlernen – die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Ist das geschafft, dann haben wir unser Grundgerüst aufgebaut und wissen nun, wie und womit wir es hier zu tun bekommen.
Das Ziel für den weiteren Verlauf der Vorlesung ist es Funktionen auf den reellen Zahlen untersuchen zu können. Auf dem Weg dahin werden wir Unendlichkeiten (tatsächlich mehrere!) kennenlernen und herausfinden, wann wir unendlich viele reelle Zahlen aufsummieren können und trotzdem ein Ergebniss erhalten – in endlicher Zeit.

Kapitel 1

Grundlagen

$$(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$$

Hier werden wir die wesentlichen Definitionen kennenlernen, auf denen die ganze Vorlesung aufgebaut ist. Einiges aus diesem Kapitel werden Sie evtl. bereits aus der Vorlesung *Diskrete Mathematik* kennen.

1.1 Mengen und Logik

Wenn uns eine Frage gestellt wird, ist es in den meisten Fällen klar welche *Objekte* als Antwort möglich sein können. Auf die Frage „Für welches x ist $x + 7 = 3$?“ ist die Antwort „Nürnberg“ sicher nicht unter den Elementen, die als Antwort in Frage kommen. Um die Frage zu präzisieren müssen wir also von Zusammenschlüssen von verschiedenen Elementen sprechen können. Das gilt auch, wenn wir die Antwort nicht kennen. Die Antwort „17“ ist sicher keine gültige Antwort auf die Frage „Wer gewinnt 2026 die Abacus Medaille?“.

Definition 1.1.1. Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Bemerkung 1.1.2. Diese Definition stammt von Georg Cantor. Da es sich hier um das erste mathematische Objekt handelt, können wir es (hier)

tatsächlich nur in unserer Alltagssprache definieren. Das Wort *bestimmten* bedeutet, dass für jedes Objekt eindeutig geklärt ist, ob es sich in der Menge M befindet oder nicht. Das Wort *wohlunterschieden* bedeutet, dass ein Objekt nicht zweimal in einer Menge sein kann. Natürlich ist es dennoch möglich eine Menge mit zwei Gitarren zu haben. Dann werden diese aber auch als zwei verschiedene Gitarren angesehen.
Wir werden am Ende des Abschnittes sehen, dass diese Definition einer Menge etwas zu kurz greift. Die Mengenlehre, die wir hier betrachten, wird daher auch *naive Mengenlehre* genannt.

Definition 1.1.3. Zwei Mengen M und N heißen *gleich*, geschrieben $M = N$, wenn sie die selben Elemente enthalten. Sind M und N nicht gleich, dann schreiben wir dafür $M \neq N$.

Notation 1.1.4.

- Mengen können beschreibend definiert werden. Z. B. Sei M_1 die Menge aller kreisfreien Städte Deutschlands.

- Sind die Elemente einer Menge explizit gegeben, so schreiben wir diese Elemente in geschweifte Klammern. So ist z.B.

$$M_2 = \{\text{Berlin, Hamburg, Köln, München}\}$$

  die Menge, die aus genau den Elementen Berlin, Hamburg, Köln und München besteht.

- Ist ein Element m in einer Menge M, so schreiben wir dafür $m \in M$, ist das Element m nicht in der Menge M, dann beschreiben wir dies durch $m \notin M$. Es ist also Köln $\in M_2$ und Essen $\notin M_2$. (Diese Notationen können wir nun in unser Vokabelheft schreiben.)

- Mengen können auch durch die Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben werden. Es ist M_2 die Menge aller deutschen Städte mit mehr als 1 Mio. Einwohner*innen. Daher können wir die Menge auch schreiben als

$$M_2 = \{x \in M_1 | x \text{ hat mehr als 1 Mio. Einwohner*innen}\}.$$

  Der Strich „|“ in geschweiften Klammern, kann also stets als *mit der Eigenschaft* übersetzt werden.

- Da es in einer Menge keine Reihenfolge gibt und Elemente nicht mehrfach vorhanden sein können, gilt auch

$$M_2 = \{\text{Hamburg, München, Hamburg, Berlin, Berlin, Köln}\}.$$

1.1.5. Eine der wichtigsten Mengen ist die *leere Menge*, die keine Elemente enthält. Da jede Menge durch ihre Elemente definiert ist, gibt es genau eine leere Menge, die wir mit $\emptyset$ bezeichnen. In der Schreibweise mit geschweiften Klammern gilt also $\emptyset = \{\}$.

Nun haben wir das erste Werkzeug zur Hand. Wir wollen in dieser Vorlesung Aussagen treffen und beweisen. Dazu sollten wir uns darauf einigen, was eine Aussage denn eigentlich ist.

Definition 1.1.6. Eine *Aussage* ist ein sprachlicher Satz, der seiner inhaltlichen Bedeutung nach entweder *wahr* oder *falsch* ist. Die Zuordnungen *wahr* und *falsch* nennen wir *Wahrheitswerte* und kürzen sie mit W bzw. F ab.

Bemerkung 1.1.7. Es ist dabei nicht relevant ob man weiß ob die Behauptung wahr oder falsch ist. Der Satz „Am 19.12.2022 wird es in Duisburg regnen.“ ist schon heute eine Aussage, auch wenn wir erst in mehreren Monaten wissen ob sie wahr oder falsch ist. Der Satz „Duisburg ist besser als Essen.“ ist nach unserer Definition keine Aussage, da er nicht eindeutig als wahr oder falsch bezeichnet werden kann. Präzisieren wir in dem Satz jedoch *ist bester* durch *hat mehr Einwohner*innen*, dann wird daraus eine (falsche) Aussage.

Wir wollen mit Aussagen arbeiten und Aussagen miteinander verknüpfen.

Definition 1.1.8. Seien A und B Aussagen.

(i) Die *Negation* (Verneinung) der Aussage A ist die Aussage $\neg A$, die wahr ist, wenn A falsch ist und falsch ist, wenn A wahr ist.

(ii) Die *Konjugation* von A und B ist die Aussage $A \wedge B$, die wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr sind und in allen anderen Fällen falsch ist. Die Aussage $A \wedge B$ nennen wir kurz A *und* B.

(iii) Die *Disjunktion* von A und B ist die Aussage $A \vee B$, die falsch ist, wenn sowohl A als auch B falsch sind und in allen anderen Fällen wahr ist. Die Aussage $A \vee B$ nennen wir kurz A *oder* B.

Den Wahrheitswert dieser neu konstruierten Aussagen können wir übersichtlich in einer Tabelle – einer so genannten *Wahrheitstafel* – zusammenfassen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
W	W	F	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	F

Tabelle 1.1: Eine Wahrheitstafel für die Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$ und $A \vee B$. In den ersten zwei Spalten sind alle Kombinationen der Wahrheitswerte von A und B gelistet. Die restlichen Einträge ergeben sich dann durch die Definition 1.1.8.

Bemerkung 1.1.9. Die Negation einer Aussage darf nicht mit dem umgangssprachlichen Gegenteil der Aussage verwechselt werden. Die Negation von „Alle Teilnehmer*innen dieser Veranstaltung sind im Moodle-Kurs angemeldet.“ ist NICHT „Kein*e Teilnehmer*in dieser Veranstaltung ist im Moodle-Kurs angemeldet.“ SONDERN „Nicht alle Teilnehmer*innen dieser Veranstaltung sind im Moodle-Kurs angemeldet.“. Die Negation von einer Aussage kann man immer dadurch erhalten, dass man die Phrase „Es ist nicht richtig, dass“ vor die Aussage schreibt.
Die Disjunktion ist KEIN *entweder ... oder*, da sie auch wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind.
An der Wahrheitstafel 1.1 kann man leicht absehen, dass $A \wedge B$ (bzw. $A \vee B$) stets den selben Wahrheitswert hat wie $B \wedge A$ (bzw. $B \vee A$).

Beispiel 1.1.10. Wir betrachten die Aussagen

(A) Die Vorlesung MafIn1 findet Montags 12-14 Uhr statt.

(B) Die Vorlesung MafIn1 findet Mittwochs 08-10 Uhr statt.

(C) Ihre Übung zur Vorlesung MafIn1 findet Montags 10-12 Uhr statt.

(D) Ihre Übung zur Vorlesung MafIn1 findet Mittwochs 12-14 Uhr statt.

(E) Ihre Übung zur Vorlesung MafIn1 findet Donnerstas 10-12 Uhr statt.

Da in jedem Fall A und B wahr sind, sind die Aussagen $A \wedge B$ und $A \vee B$ wahr. Die Aussage $C \vee D \vee E$ ist ebenfalls wahr, da Sie mindestens eine Übungsgruppe besuchen. Die Aussage $C \wedge D \wedge E$ ist hingegen falsch, da Sie nicht alle drei Übungstermine besuchen.

1.1.11. Die Aussagen C, D und E im obigen Beispiel sind nur dann Aussagen, wenn klar ist wer mit „Ihre“ gemeint ist. Es wäre natürlich präziser an dieser Stelle den Namen einer/eines Teilnehmerin/Teilnehmers stehen zu haben. Das können wir dadurch hinbekommen, dass wir Aussagen und Mengen miteinander verbinden. Sei dazu S die Menge aller Studierenden, die in diesem Semester MafIn1 studieren. Für jedes $s \in S$ (also für jede*n von Ihnen) können wir nun Aussage C formulieren als „Die Übung von s zur Vorlesung MafIn1 findet Montags 10-12 Uhr statt.“. Wir haben hier eine Aussage, die von einer *Variablen* abhängt. Durch die Wahl der Menge M haben wir festgelegt, welche Elemente wir für die Variable einsetzen dürfen.

Definition 1.1.12. Sei M irgendeine Menge und für jedes $m \in M$ sei $A(m)$ eine Aussage.

(i) Die Aussage, dass $A(m)$ wahr ist für alle $m \in M$, beschreiben wir kurz durch die Symbole

$$\underbrace{\forall}_{\text{für alle}} m \underbrace{\in}_{\text{in}} M \underbrace{:\ A(m)}_{\text{gilt } A(m)}$$

(ii) Die Aussage, dass $A(m)$ wahr ist für mindestens ein $m \in M$, beschreiben wir kurz durch die Symbole

$$\underbrace{\exists}_{\text{es existiert ein}} m \underbrace{\in}_{\text{in}} M \underbrace{:\ A(m)}_{\text{für das } A(m) \text{ gilt}}$$

Das Symbol $\forall$ heißt *Allquantor* und das Symbol $\exists$ wird *Existenzquantor* genannt.

Bemerkung 1.1.13. Diese Quantoren können wir natürlich auch zu neuen Aussagen verschachteln. Dabei ist allerdings die Reihenfolge entscheidend. Welche der beiden folgenden Aussagen ist wahr und welche nicht? (Wir setzen hier ein wenig Schulmathematik voraus, die wir später formal einführen werden.)

(1) $\forall x \in \mathbb{N} \ : \ (\exists y \in \mathbb{N} \ : x < y)$

(2) $\exists y \in \mathbb{N} \ : \ (\forall x \in \mathbb{N} \ : x < y)$

Die erste Aussage können wir lesen als „Für alle natürlichen Zahlen x existiert eine natürliche Zahl y, so dass $x < y$ gilt.“. Diese Aussage ist wahr, da es keine größte natürliche Zahl gibt – Wir könnten z.B. stets y als $x + 1$ wählen.
Die zweite Aussage bedeutet „Es existiert eine natürliche Zahl y, so dass für alle natürlichen Zahlen x die Ungleichung $x < y$ gilt.“. Diese Aussage ist offensichtlich falsch, da es (wie eben schon benutzt) keine größte natürliche Zahl gibt.

Wir werden versuchen aus bekannten Tatsachen neue Erkenntnisse zu schließen. Dazu müssen wir in der Lage sein aus einer Aussage eine andere zu folgern.

Definition 1.1.14. Seien A und B Aussagen.

(i) Die *Subjunktion* von A und B ist die Aussage $A \Rightarrow B$, die durch folgende Wahrheitswerte gegeben ist

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Wir sagen kurz A *impliziert* B.

(ii) Die *Bijunktion* von A und B ist wahr, wenn A und B den selben Wahrheitswert haben und falsch, wenn A und B unterschiedliche Wahrheitswerte haben. Wir sagen auch A und B sind *äquivalent*.

Bemerkung 1.1.15. Sind A und B zwei Aussagen, dann kann die Aussage $A \Rightarrow B$ mit „Aus A folgt B." übersetzt werden. Beachten Sie, dass man somit aus einer falschen Aussage alles schließen kann. Die Aussage „Wenn ein Eichhörnchen fliegen kann, dann ist es grün." ist daher eine wahre Aussage, da es kein Eichhörnchen gibt und eine Implikation immer whr ist, wenn die Voraussetzung (die WENN-Aussage) falsch ist.
Für die Aussage $A \Leftrightarrow B$ sagen wir auch „Es gilt A genau dann, wenn B gilt.". Das Zeichen für die Bijunktion von A und B sieht aus gutem Grund aus wie die Zusammensetzung von $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Es gilt nämlich

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A))$$

was wir schnell an der folgenden Wahrheitstafel ablesen:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Beispiel 1.1.16. Sei M eine Menge und $A(m)$ eine Aussage über $m \in M$. Was ist die Negation von $\forall m \in M \ : \ A(m)$?
Die Antwort ist: „Es ist nicht wahr, dass für alle m aus M die Aussage $A(m)$ wahr ist.". Wenn $A(m)$ aber nicht für alle $m \in M$ wahr ist, dann ist es für (mindestens) eine $m \in M$ falsch. Es gilt also

$$\neg(\forall m \in M \ : \ A(m)) \Longleftrightarrow (\exists m \in M \ : \ \neg A(m)).$$

Verändern wir den Wahrheitswert auf beiden Seiten, dann bleibt die Äquivalenz bestehen. Damit erhalten wir

$$(\forall m \in M \ : \ A(m)) \Longleftrightarrow \neg(\exists m \in M \ : \ \neg A(m)).$$

Ersetzen wir die Aussage $A(m)$ durch die Aussage $\neg A(m)$ erhalten wir die beiden Äquivalenzen

$$\neg(\exists m \in M \ : \ A(m)) \Longleftrightarrow (\forall m \in M \ : \ \neg A(m))$$

und

$$(\exists m \in M \ : \ A(m)) \Longleftrightarrow \neg(\forall m \in M \ : \ \neg A(m)).$$

Wir wollen (mathematische) Aussagen beweisen. Hier sind einige der Spielregeln (die wir alle schnell aus den Wahrheitstafeln von oben ablesen können):

Beweisregeln 1.1.17. Seien A, B und C Aussagen. Es gilt:

(a) direkter Beweis: Sind die Aussagen A und $A \Rightarrow B$ beide wahr, so ist auch B wahr.

(b) Kettenschluss: Sind die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ beide wahr, so ist auch $A \Rightarrow C$ wahr.

(c) indirekter Beweis: Ist die Aussage B falsch und ist $A \Rightarrow B$ wahr, so ist A falsch.

(d) Kontraposition: Es gilt $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Diese Regeln sollten unserem intuitiven Verständnis von *Beweisen* entsprechen.

Beispiel 1.1.18. *Inspektor Mafin lag in seinem Bett. Durch einen Schlitz zwischen den Vorhängen fielen Sonnenstrahlen in sein Zimmer. Der Wecker neben ihm zeigte 05:30 Uhr an. „Auch das noch!“ dachte Inspektor Mafin.*
Wenn es April ist, dann ist um 05:30 Uhr in Duisburg noch nicht die Sonne aufgegangen. Es war offensichtlich sein Zimmer in dem er lag und sein Zimmer war in Duisburg. Wenn also in Duisburg um 05:30 Uhr noch nicht die Sonne aufgegangen ist, dann ist auch vor seinem Fenster um 05:30 Uhr noch nicht die Sonne aufgegangen. Mit dem Kettenschluss (b) wusste er sofort, dass gilt: „Wenn es April ist, dann ist um 05:30 Uhr vor meinem Fenster noch nicht die Sonne aufgegangen.“
Es war April - ganz klar! Der direkte Beweis (a) lieferte ihm nun, dass um 05:30 Uhr vor seinem Fenster noch nicht die Sonne aufgegangen ist. Wenn es also 05:30 Uhr ist, dann scheint keine Sonne in sein Fenster. Es ist aber falsch, dass keine Sonne in sein Fenster scheint. Der indirekte Beweis (c) lieferte also, dass es nicht 05:30 Uhr ist.
Inspektor Mafin wsste natürlich, dass die Aussagen „Wenn mein Wecker heile ist, dann ist jetzt 05:30 Uhr“ nach Kontraposition (d) äquivalent ist

zu „Wenn es jetzt nicht 05:30 Uhr ist, dann ist mein Wecker nicht heile.“. Da er vorher schon bewiesen hatte, dass es nicht 05:30 Uhr ist, wusste er nun ganz sicher (wieder durch den direkten Beweis), dass sein Wecker nicht heile – also kaputt – war. „Auch das noch!“ dachte Inspektor Mafin schon wieder.

Wir kommen zurück zu Mengen.

Definition 1.1.19. Seien M und N zwei Mengen. Dann heißt N *Teilmenge* von M, wenn jedes Element aus N auch in M liegt. Dies bezeichnen wir mit $N \subseteq M$.
Formal gilt: $(N \subseteq M) \Longleftrightarrow (\forall\, x \in N \ : \ x \in M)$.
Die *Potenzmenge* $\mathfrak{P}(M)$ *von* M ist die Menge, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind. Es gilt somit $\mathfrak{P}(M) = \{N | N \subseteq M\}$.

Lemma 1.1.20. *Seien L, M und N drei Mengen.*

(a) Die Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.

Formal: $(M = N) \Longleftrightarrow (M \subseteq N) \wedge (N \subseteq M)$

(b) Ist $L \subseteq M$ und $M \subseteq N$, so ist auch $L \subseteq N$.

Beweis. Wir zeigen nur Teil (a). Wir wissen, dass M und N gleich sind, genau dann wenn sie dieselben Elemente enthalten. Sei $\mathcal{U}$ irgendeine Menge, mit $M \subseteq \mathcal{U}$ und $N \subseteq \mathcal{U}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
M = N &\Longleftrightarrow (\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ x \in M \Leftrightarrow x \in N) \\
&\Longleftrightarrow (\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in M \Rightarrow x \in N) \wedge (x \in N \Rightarrow x \in M)) \\
&\Longleftrightarrow (\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in M \Rightarrow x \in N)) \wedge (\forall\, x \in \mathcal{U} \ : \ (x \in N \Rightarrow x \in M)) \\
&\Longleftrightarrow (\forall\, x \in M \ : \ (x \in M \Rightarrow x \in N)) \wedge (\forall\, x \in N \ : \ (x \in N \Rightarrow x \in M)) \\
&\Longleftrightarrow (\forall\, x \in M \ : \ x \in N) \wedge (\forall\, x \in N \ : \ x \in M) \\
&\Longleftrightarrow M \subseteq N \ \wedge \ N \subseteq M.
\end{aligned}$$

Damit ist unser erster Beweis abgeschlossen.[1] Der erste Äquivalenzpfeil kann hier als formale Definition der Gleichheit von M und N angesehen werden. $\square$

Beispiel 1.1.21. (a) Für jede Menge M ist $\emptyset \subseteq M$. Die Potenzmenge einer Menge ist daher nie die leere Menge. Es gilt $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(b) Die Teilmengen der Menge $\{a, b, c\}$ sind

$$\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}.$$

Damit besteht die Potenzmenge von $\{a, b, c\}$ aus genau acht Elementen.

Definition 1.1.22. Sei $\mathcal{U}$ eine Menge und seien M und N Teilmengen von $\mathcal{U}$.

(a) Die *Vereinigung* von M und N ist die Menge

$$M \cup N = \{x \in \mathcal{U} | x \in M \ \vee \ x \in N\}.$$

(b) Der *Schnitt* von M und N ist die Menge

$$M \cap N = \{x \in \mathcal{U} | x \in M \ \wedge \ x \in N\}.$$

(c) Die *Differenz* von M und N ist die Menge

$$M \setminus N = \{x \in \mathcal{U} | x \in M \ \wedge \ x \notin N\}.$$

Die Menge $M \setminus N$ bezeichnen wir kurz mit M *ohne* N.

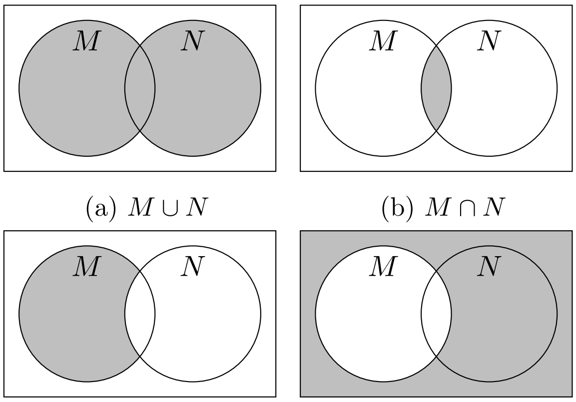
(d) Das *Komplement von M in $\mathcal{U}$* ist die Menge

$$M^{\mathcal{C}_\mathcal{U}} = \{x \in \mathcal{U} | x \notin M\}.$$

Ist aus dem Kontext heraus klar, was die Menge $\mathcal{U}$ ist, so schreiben wir für das Komplement schlicht $M^{\mathcal{C}}$.

Proposition 1.1.23. *Seien M, N, L Teilmengen der Menge $\mathcal{U}$. Das Komplement wird im Folgenden stets in $\mathcal{U}$ gebildet. Es gilt*

[1] Dieser Beweis ist wirklich nicht besonders schön zu lesen oder aufzuschreiben. Wir werden sehr bald Beweise etwas anschaulicher führen. Es ist allerdings wichtig zu beachten, dass die Logik aus diesem Kapitel immer im Hintergrund sichtbar ist.



(a) $M \cup N$ (b) $M \cap N$

(c) $M \setminus N$ (d) $M^{\mathcal{C}}$

Abbildung 1.1: In diesen Mengen-Diagrammen ist das Rechteck als die Obermenge $\mathcal{U}$ zu verstehen. Der graue Bereich beschreibt die jeweilige Menge

(a) $M \setminus M = \emptyset$ *und* $M \setminus \emptyset = M$*,*

(b) $M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$*,*

(c) $M \cap M = M$ *und* $M \cup M = M$*,*

(d) $M \cap N = N \cap M$ *und* $M \cup N = N \cup M$*,*

(e) $[M \cap N = M \iff M \subseteq N]$ *und* $[M \cup N = M \iff N \subseteq M]$*,*

(f) $(M \cap N)^{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{C}} \cup N^{\mathcal{C}}$ *und* $(M \cup N)^{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{C}} \cap N^{\mathcal{C}}$*,*

(g) $(M^{\mathcal{C}})^{\mathcal{C}} = M$*,*

(h) $M \subseteq N \Longrightarrow N^{\mathcal{C}} \subseteq M^{\mathcal{C}}$*,*

(i) $M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$ *und* $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$*,*

(j) $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$ *und* $M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$*.*

Wie in dieser Proposition gesehen, können wir auch den Schnitt und die Vereinigung von drei Mengen bilden. Wir erhalten dann wieder eine Menge, die wir mit einer anderen Menge schneiden oder vereinigen können. Das können wir aufgrund der Assoziativität der Operationen (Proposition 1.1.23 (i)) beliebig erweitern. Dies fürt uns zu folgender allgemeiner Definition.

Definition 1.1.24. Sei $\mathcal{U}$ eine Menge. Weiter sei I eine nicht-leere Menge (d.h. $I \neq \emptyset$) und sei für jedes $i \in I$ eine Menge $M_i \subseteq \mathcal{U}$ gegeben. Der *Durchschnitt der Mengen M_i, mit $i \in I$* ist die Menge

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \in \mathcal{U} | \forall i \in I \ : \ x \in M_i\}.$$

Die *Vereinigung der Mengen M_i, mit $i \in I$* ist die Menge

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \in \mathcal{U} | \exists i \in I \ : \ x \in M_i\}.$$

Die Aussagen aus Proposition 1.1.23 übertragen sich auf die Vereinigung und Schnitte von beliebig vielen Mengen.

Satz 1.1.25. *Sei $\mathcal{U}$ eine Menge. Weiter sei I eine nicht-leere Menge (d.h. $I \neq \emptyset$) und sei für jedes $i \in I$ eine Menge $M_i \subseteq \mathcal{U}$ gegeben. Das Komplement bilden wir stets in $\mathcal{U}$. Dann gilt*

(a) $\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{i \in I} M_i^{\mathcal{C}}$ *und*

(b) $\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)^{\mathcal{C}} = \bigcup_{i \in I} M_i^{\mathcal{C}}$.

Beweis. Wir beweisen wieder nur Teil (a). Sei $x \in \mathcal{U}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^{\mathcal{C}} &\overset{1.1.22}{\Longleftrightarrow} x \in \mathcal{U} \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} M_i \\
&\Longleftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge \left(\neg \left(x \in \bigcup_{i \in I} M_i\right)\right) \\
&\overset{1.1.24}{\Longleftrightarrow} x \in \mathcal{U} \wedge (\neg (\exists i \in I \ : \ x \in M_i)) \\
&\overset{1.1.16}{\Longleftrightarrow} x \in \mathcal{U} \wedge (\forall i \in I \ : \ x \notin M_i) \\
&\Longleftrightarrow \forall i \in I \ : \ x \in \mathcal{U} \wedge x \notin M_i \\
&\overset{1.1.22}{\Longleftrightarrow} \forall i \in I \ : \ x \in M_i^{\mathcal{C}} \\
&\overset{1.1.24}{\Longleftrightarrow} x \in \bigcap_{i \in I} M_i^{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für jedes $x \in \mathcal{U}$ die Äquivalenz $x \in \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^{\mathcal{C}} \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} M_i^{\mathcal{C}}$ gilt. Das bedeutet gerade, dass die postulierte Gleichung $\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)^{\mathcal{C}} = \bigcap_{i \in I} M_i^{\mathcal{C}}$ gilt. □

Abschließend zeigen wir noch eine weitere Möglichkeit um aus zwei gegebenen Mengen, eine neue Menge zu konstruieren.

Definition 1.1.26. Seien M und N Mengen. Das *kartesische Produkt von M und N* ist die Menge

$$M \times N = \{(x, y) | x \in M \wedge y \in N\}$$

der geordneten Paare von Elementen aus M und N.

Beispiel 1.1.27. (a) Diese Konstruktion kennen Sie alle bereits von einem Koordinatensystem. Denn, wenn wir mit $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen bezeichnen, dann ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Es ist $\{1, 2\} \times \{a, b, c\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

1.1.28. Wir haben oft benutzt, dass es eine Menge $\mathcal{U}$ gibt, die gewisse andere Mengen enthält. Dieses $\mathcal{U}$ können Sie sich als *Universum* vorstellen (daher auch die Bezeichnung), das alles was irgendwie ein Element einer Menge sein kann, enthält. Hier stoßen wir nun aber an die Grenzen unserer Definition einer Menge.

Wir haben unsere Theorie so aufgebaut, dass eine Aussage nicht glechzeitig wahr und falsch sein kann. Wenn nun alles, was wir uns vorstellen können eine Menge bildet, dann existiert auch die Menge aller Mengen. D.h. eine Menge, deren Elemente alle Mengen sind. Nennen wir diese Menge E. Da E selbst eine Menge ist, ist $E \in E$. Es gibt also (nach unserem jetzigen Wissen) Mengen, die sich selbst als Element enthalten. Wir betrachten nun die Menge

$$P = \{M \in E | M \notin M\}.$$

Da wir gefordert haben, dass wir von jeder Menge eindeutig bestimmen können, ob ein gegebenes Objekt in dieser Menge liegt oder nicht, ist „$P \in P$“ eine Aussage. Ist diese Aussage „$P \in P$“ wahr oder falsch? Wenn sie wahr ist, dann ist nach Definition von P auch $P \notin P$. Wenn sie falsch ist, dann ist nach Definition von P aber $P \in P$. Damit gilt

$$P \in P \Longleftrightarrow P \notin P.$$

Die Aussage $P \in P$ ist also wahr genau dann, wenn sie falsch ist. Das widerspricht unserer Definition einer Aussage. Die Annahme, dass eine Menge sich selbst als Element enthalten kann, führt also zu einem Widerspruch in der Aussagen-Logik. Der einzige Ausweg ist die folgende Einschränkung an Mengen:

Eine Menge darf sich nicht selbst als Element enthalten!

1.2 Abbildungen

Definition 1.2.1. Seien M und N nichtleere Mengen. Eine *Abbildung* (auch *Funktion* genannt) f von M nach N ordnet jedem Element $m \in M$ ein eindeutiges Element $n \in N$ zu. Dieses n nennen wir $f(m)$. Formal schreiben wir eine solche Abbildung

$$f : M \longrightarrow N \quad ; \quad m \mapsto f(m)$$

Zwei Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : M \longrightarrow N$ sind genau dann gleich, wenn für alle $m \in M$ die Gleichung $f(m) = g(m)$ gilt.

Beispiel 1.2.2. (a) Sei M eine nichtleere Menge. Dann beschreibt die Zuordnung $m \mapsto m$ für alle $m \in M$ eine Abbildung von M nach M. Diese Abbildung wird auch *Identitätsabbildung* id genannt. Es ist also

$$\mathrm{id} : M \longrightarrow M \quad ; \quad m \mapsto m.$$

(b) Ordnen wir jeder Person aus diesem Kurs ihr Geburtsdatum zu, so erhalten wir eine Abbildung von der Menge aller Personen aus diesem Kurs, in die Menge der Daten im Gregorianischen Kalender nach dem 01.01.1900. Denn jede*r von Ihnen hat genau ein Geburtsdatum, und niemand von Ihnen ist älter als 122 Jahre.[2]

Definition 1.2.3. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, $m \in M$ und $n \in N$.

(i) Die Menge M heißt *Definitionsbereich* von f.

[2] Laut der Gerontology Research Group wurde der älteste lebende Mensch am 02.01.1903 geboren [Stand 2022].

(ii) Die Menge N heißt *Wertebereich* von f.

(iii) Das Element $f(m) \in N$ heißt *Bild von m unter f*.

(iv) Ein Element $x \in M$, mit $f(x) = n$ heißt *Urbild von n unter f*.

Wir können natürlich auch Bilder und Urbilder von Mengen betrachten. Das geht so:

Definition 1.2.4. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$. Dann heißt

$$f(A) = \{f(m) | m \in A\}$$

Bild von A unter f und

$$f^{-1}(B) = \{m \in M | f(m) \in B\}$$

heißt *Urbild von B unter f*.

Beispiel 1.2.5. Sei wieder f die Geburtstagsabbildung aus 1.2.2 (b). Wenn A die Menge aller Teilnehmer*innen ist, deren Vorname mit A beginnt, dann ist $f(A)$ genau die Menge aller Geburtsdaten, der Teilnehmer*innen dieses Kurses deren Vorname mit A beginnt.
Sei nun $B = \{01.01.1900, 06.04.2002\}$. Dann ist $f^{-1}(B)$ die Menge aller Teilnehmer*innen dieses Kurses, deren Geburtstag am 01.01.1900 oder am 06.04.2002 ist. Es ist also gut möglich, dass das Urbild von B die leere Menge ist (wenn niemand von Ihnen an einem der beiden Tage geboren wurde) oder, dass das Urbild von B mehr Elemente besitzt als B (wenn mindestens drei von Ihnen am 06.04.2002 geboren wurden).

Definition 1.2.6. Die Abbildung $f : M \longrightarrow N$ heißt

(i) *injektiv*, falls gilt: $m_1 \neq m_2 \in M \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$,

(ii) *surjektiv*, falls $f(M) = N$,

(iii) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 1.2.7. Durch Kontraposition erhalten wir eine alternative Definition von *injektiv*. Nämlich ist eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ injektiv, wenn für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt $f(m_1) = f(m_2) \Longrightarrow m_1 = m_2$.

Beispiel 1.2.8. (a) Die Abbildung aus Beispiel 1.2.2

$$f : \{\text{Teilnehmer*innen dieses Kurses}\} \longrightarrow \{\text{Tage seit dem 01.01.1900}\}$$

ist nicht surjektiv, da niemand am 01.01.1900 geboren wurde. Sie ist injektiv, genau dann, wenn keine zwei von Ihnen am gleichen Tag geboren wurden.

(b) Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbb{N}$; d.h. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Die Abbildung

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto n^2$$

ist injektiv (verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Quadrate), aber nicht surjektiv (da z.B. 2 keine Quadratzahl ist).

(c) Die Abbildung

$$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist nicht injektiv (da $h(1) = h(2)$, aber $1 \neq 2$), aber surjektiv (für jede natürliche Zahl n ist $f(2n) = n$).

Definition 1.2.9. Seien M, N und L Mengen und $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow L$ Abbildungen. Dann ist die *Hintereinanderausführung von f und g* die Abbildung

$$g \circ f : M \longrightarrow L \quad ; \quad m \mapsto g(f(m)).$$

Beispiel 1.2.10. Wir betrachten wieder die Abbildungen

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto n^2$$

und

$$h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

aus Beispiel 1.2.8. Beide Abbildungen haben als Definitions- und Wertebereich die Menge $\mathbb{N}$. Wir können alsosowohl $g \circ h$ als auch $h \circ g$ konstruieren. Es gilt

$$h \circ g(2) = h(g(2)) = h(2^2) = h(4) = \frac{4}{2} = 2$$

und

$$g \circ h(2) = g(h(2)) = g(\frac{2}{2}) = g(1) = 1^2 = 1.$$

Die Reihenfolge ist bei der Hintereinanderausführung also entscheident, denn wir haben gerade gesehen, dass $g \circ h \neq h \circ g$ gilt.

Bemerkung 1.2.11. Es gilt stets: Falls $f : M \longrightarrow N$ eine injektive Abbildung ist, so ist $f : M \longrightarrow f(M)$ eine bijektive Abbildung.

Satz 1.2.12. *Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $f^{-1} : N \longrightarrow M$ gibt mit $f \circ f^{-1}(n) = n$ für alle $n \in N$ und $f^{-1} \circ f(m) = m$ für alle $m \in M$. Wenn eine solche Abbildung f^{-1} existiert, heißt sie* Umkehrabbildung *von f.*

Beweis. Jede *Genau-dann-wenn*-Aussage beschreibt eine Äquivalenz von Aussagen. Damit müssen wir zwei Implikationen beweisen.

- $\Rightarrow$ Sei also f bijektiv. Dann ist $N = f(M) = \{f(m) | m \in M\}$. Weiter ist mit $f(m) = f(k)$ auch $m = k$. Damit erhalten wir eine Abbildung

  $$f^{-1} : N \longrightarrow M \quad ; \quad f(m) \mapsto m.$$

  Diese erfüllt die geforderten Eigenschaften: Per Konstruktion gilt für alle $m \in M$ die Gleichung $f^{-1}(f(m)) = m$. Ist andererseits $n \in N$ beliebig, dann gibt es eine $m \in M$, mit $f(m) = n$ (hier benutzen wir $N = f(M)$). Es folgt

  $$f \circ f^{-1}(n) = f(f^{-1}(n)) = f(f^{-1}(f(m))) = f(m) = n.$$

- $\Leftarrow$ Sei also eine Abbildung f^{-1} wie beschrieben gegeben. Da es für jedes $n \in N$ ein Element $f^{-1}(n) \in M$ mit $f(f^{-1}(n)) = n$ gibt, ist f surjektiv.

  Sei nun $f(m) = f(k)$ für $m, k \in M$. Dann folgt

  $$m = f^{-1}(f(m)) = f^{-1}(f(k)) = k.$$

  Das bedeutet nichts anderes als dass f^{-1} auch injektiv ist.

□

Bemerkung 1.2.13. Die Bezeichnung f^{-1} ist uns nun in zwei verschiedenen Bedeutungen über den Weg gelaufen. Für *jede* Abbildung f und *jede* Teilmenge B des Wertebereiches von f ist das Urbild $f^{-1}(B)$ definiert. Beachte, dass das B dafür eine Menge sein muss!
Nur für injektive Abbildungen f ist auch die Funktion f^{-1} definiert für die wir auch f^{-1} von einem Element bestimmen können. Diese scheinbare Doppeldeutigkeit wird dadurch aufgelöst, dass im Falle einer bijektiven Abbildung f und einer Teilmenge B des Wertebereiches, das Urbild $f^{-1}(B)$ dasselbe ist, wie das Bild von B unter der Abbildung f^{-1}.

Als letztes in diesem Abschnitt klären wir noch wie sich die Mengenoperationen $\cup$, $\cap$, $\subseteq$ unter Abbildungen verhalten.

Satz 1.2.14. *Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Weiter seien Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ gegeben. Dann gilt*

(a) $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(b) $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

Beweis. Den kurzen Beweis geben wir hier nicht an. Sie können ihn sehr gerne als Übung selbst führen. □

Satz 1.2.15. *Sei wieder $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Weiter seien I, J beliebige Mengen und für jedes $i \in I$ sei A_i eine Teilmenge von M und für jedes $j \in J$ sei B_j eine Teilmenge von N. Dann gilt*

(a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

(b) $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

(c) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

(d) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die Aussage (c). Sei dazu $x \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &\overset{\text{Def. Urbild}}{\iff} f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j \\ &\overset{\text{Def. Vereinigung}}{\iff} \exists j \in J \ :\ f(x) \in B_j \\ &\overset{\text{Def. Urbild}}{\iff} \exists j \in J \ :\ x \in f^{-1}(B_j) \\ &\overset{\text{Def. Vereinigung}}{\iff} x \in \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j). \end{aligned}$$

Damit ist ein Element aus M genau dann in $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$, wenn es in $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ ist. Die beiden Mengen sind also – wie behauptet – gleich. $\square$

1.3 Die natürlichen Zahlen

Wir werden in diesem Abschnitt endlich die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ einführen. Genauer werden wir $\mathbb{N}$ durch Axiome, also die grundlegenden Eigenschaften, beschreiben. Die wichtigste Eigenschaft ist die, dass die natürlichen Zahlen in regelmäßigen Abständen auftauchen. Sie sind also gegeben durch 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$, usw. Für die Definition der natürlichen Zahlen ist es allerdings etwas unglücklich die Addition bereits vorauszusetzen. Daher sagen wir nur, dass jedes Element aus $\mathbb{N}$ einen *direkten Nachfolger* besitzt. Sagen wir, $S(n)$ ist der direkte Nachfolger von n. Dann ist S nichts anderes als eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Wenn Sie also die nächste Definition lesen, können Sie stets $S(n)$ durch $n+1$ ersetzen um sofort Ihr Wissen aus der Grundschule anwenden zu können. Da wir die Null ebenfalls brauchen, werden wir die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ definieren.

Definition 1.3.1. Die *natürlichen Zahlen mit Null* $\mathbb{N}_0$ sind dadurch definiert, dass es eine Abbildung $S : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ gibt, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind.

(P1) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{N}_0$. ($\mathbb{N}_0$ *ist nicht die leere Menge.*)

(P2) $S(n) \neq n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (*Eine natürliche Zahl ist nie der direkte Nachfolger von sich selbst.*)

(P3) $S(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (*Keine natürliche Zahl hat die* 0 *als direkten Nachfolger.*)

(P4) S ist injektiv. (*Verschiedene natürliche Zahlen haben auch verschiedene direkte Nachfolger.*)

(P5) Ist $T \subseteq \mathbb{N}_0$ mit

(i) $0 \in T$ und

(ii) $t \in T \Longrightarrow S(t) \in T$,

so ist $T = \mathbb{N}_0$.

Die Eigenschaften (P1)-(P5) heißen *Peano-Axiome*.

1.3.2. Das Axiom (P5) werden wir uns noch genauer anschauen. Es sagt uns gerade, dass $\mathbb{N}_0$ genau die Menge $\{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots\}$ ist. Der *direkte Nachfolger* $S(n)$ einer natürlichen Zahl n ist das Element $n+1$. Das können Sie als Definition der Addition mit 1 betrachten. Den Wert $n+S(1)$ definieren wir als $S(n+1)$, den Wert $n+S(S(1))$ als $S(n+S(1)) = S(S(n+1))$,... Auf diese Art können wir die gesamte Addition auf $\mathbb{N}_0$ definieren. Natürlich erhalten wir dabei genau das, was wir aus der Grundschule kennen. Nun setzen wir endlich:

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, \ldots\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ und
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mit Hilfe von $\mathbb{N}$ kann man nun auch die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruieren. Das werden wir hier allerdings nicht weiter ausführen.

Das Axiom (P5) liefert uns eine sehr wichtige Beweistechnik.

Prinzip der vollständigen Induktion (1. Version) 1.3.3. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $A(n)$ *eine Aussage über* n. *Dann gilt*

$$(A(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_0 \ : \ A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}_0 \ : \ A(n)).$$

D. h.: Möchte man zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, so genügt es zu zeigen:

- *$A(0)$ ist wahr (*Induktionsanfang *oder kurz* IA*)*
- *Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein beliebiges aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}_0$ (*Induktionsvoraussetzung *oder kurz* IV*) gilt auch, dass $A(n+1)$ wahr ist (*Induktionsschritt *oder kurz* IS*).*

Beweis. Sei $T = \{n \in \mathbb{N}_0 | A(n)\} \subseteq \mathbb{N}_0$ die Menge aller Elemente aus $\mathbb{N}_0$ für die $A(n)$ wahr ist. Wir nehmen an, dass

$$A(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}_0 \ : \ A(n) \Rightarrow A(n+1))$$

gilt. Dann ist also $0 \in T$ und es gilt $t \in T \Rightarrow t+1 \in T$. Aus Axiom (P5) folgt nun $T = \mathbb{N}_0$, was nichts anderes bedeutet, als dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert also tatsächlich. $\square$

Beispiel 1.3.4. Wir werden folgende Behauptung per Induktion beweisen. Wenn sich n Personen untereinander per Fistbump begrüßen, dann finden insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ Begrüßungen statt.
Der Ablauf eines Induktionsbeweises ist immer der selbe.
IA: $\boxed{n = 0\text{:}}$ Wenn sich null Personen untereinander begrüßen, dann gibt es $0 = \frac{0 \cdot (0-1)}{2}$ Begrüßungen. Die Aussage ist also wahr für $n = 0$.
IV: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte folgendes: Wenn sich n Personen untereinander begrüßen, dann finden insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ Begrüßungen statt.
IS: $\boxed{n \to n+1\text{:}}$ Sei n aus der Induktionsvoraussetzung. Seien nun $n+1$ Personen gegeben, die sich alle untereinander begrüßen. Wir wählen eine Person aus, die zunächst garnichts macht – nennen wir diese P. Nun begrüßen sich alle Personen, die nicht P sind untereinander. Da das genau $n + 1 - 1 = n$ Personen sind, gibt es nach der IV genau $\frac{n(n-1)}{2}$ Begrüßungen. Um nun alle möglichen Begrüßungen zu erhalten, muss noch P jede der anderen n Person begrüssen. Es kommen also noch genau n Begrüssungen dazu. Es gibt also insgesamt

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}$$

Begrüssungen. Damit ist die Aussage auch für $n + 1$ korrekt und der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Oft ist es praktisch das Induktionsprinzip nicht bei Null, sondern bei irgendeiner anderen ganzen Zahl starten zu lassen.

Prinzip der vollständigen Induktion (2. Version) 1.3.5. *Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ sei $A(n)$ eine Aussage über n. Sei weiter $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $\mathbb{Z}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0\}$. Dann gilt*

$$(A(n_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0} \ : \ A(n) \Rightarrow A(n+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0} \ : \ A(n)).$$

D. h.: Möchte man zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ wahr ist, so genügt es zu zeigen:

- *$A(n_0)$ ist wahr (*Induktionsanfang *oder kurz* IA*)*
- *Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein beliebiges aber fest gewähltes $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$ (*Induktionsvoraussetzung *oder kurz* IV*) gilt auch, dass $A(n+1)$ wahr ist (*Induktionsschritt *oder kurz* IS*).*

Beweis. Setze einfach nur $T = \{n \in \mathbb{N}_0 | A(n + n_0)\}$. Jetzt ist der Beweis identisch zum Beweis von 1.3.3. □

Definition 1.3.6. Sei wieder $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq n_0\}$. Weiter sei $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$. Dann setzen wir für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq n_0}$

- $\sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_n$ und
- $\prod_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdot \ldots \cdot a_n$

Für $n < n_0$ setzen wir $\sum_{k=n_0}^{n} a_k = 0$ und $\prod_{k=n_0}^{n} a_k = 1$.

D.h.: Wir haben

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} a_k = a_{n_0} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} a_k \right) + a_{n+1} \text{ für alle } n \geq n_0$$

und genau so für das Produkt $\prod$.

Lemma 1.3.7. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \qquad \textit{und} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_{k-1}.$$

Diese Gleichung nennen wir auch Indexshift*.*

Beweis. Wir zeigen nur die Gleichung für die Summe. Die Aussage ist vollkommen klar, wenn man sich einmal die Mühe macht die Summen aufzuschreiben: $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Auf der anderen Seite haben wir $\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = a_{1-1} + a_{2-1} + a_{3-1} + \ldots + a_{n-1}$. Damit sind tatsächlich beide Seiten gleich. Für das Produkt argumentiert man ganz genauso. $\square$

Beispiel 1.3.8. Solche Summen und Produkte eignen sich gut für Beispiele von Induktionsbeweisen. Wir möchten folgendes beweisen: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

IA: $\boxed{n = 0:}$ Für $n = 0$ gilt die Aussage trivialerweise (beide Seiten der Gleichung sind gleich 0.

IV: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

IS: $\boxed{n \to n+1:}$ Sei n das Element aus der IV. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{IV}{=} \frac{(n+1)^2 n^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2 n^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4))}{4} \overset{1.\ \mathrm{BF}}{=} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Das bedeutet gerade, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

1.3.9. *Die Universitätsverwaltung ist in heller Aufregung. Gerade hat ein übereifriger Informatikstudent bewiesen, dass alle Studierenden der Uni dieselbe Matrikelnummer haben. Das kann doch gar nicht richtig sein! Oder? Hier kann nur Inspektor Mafin helfen. Er schaut sich den Brief in Ruhe an:*

Sehr geehrte Damen und Herren,
hiermit weise ich Sie darauf hin, dass alle Studierenden Ihrer Universität dieselbe Matrikelnummer haben. Dazu genügt es natürlich zu zeigen, dass n beliebig ausgewählte Studierende stets dieselbe Matrikelnummer haben. Das soll natürlich für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.
Wie in der Vorlesung gelernt führe ich einen Induktionsbeweis über n.
IA: $\boxed{n = 1}$ *Haben wir nur eine*n Studierenden ausgewählt, so haben sicher alle ausgewählten Studierenden dieselbe Matrikelnummer. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.*
IV: *Für beliebiges, aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass n beliebig ausgewählte Studierende alle dieselbe Matrikelnummer haben.*
IS: $\boxed{n \to n+1}$ *Seien also $n+1$ Studierende ausgewählt. Diese nenne ich s_1, s_2, s_3, ..., s_{n+1}. Dann ist die Menge dieser Studierenden gegeben durch $S = \{s_1, \ldots, s_{n+1}\}$. Ich betrachte die Menge $S' = S \setminus \{s_{n+1}\}$. In S' sind genau n Studierende und somit haben diese nach Induktionsvoraussetzung alle dieselbe Matrikelnummer – sagen wir m. Insbesondere haben s_1 und s_2 die Matrikelnummer m.*
Betrachte nun $S'' = S \setminus \{s_1\}$. Wieder folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass alle Studierenden in S'' dieselbe Matrikelnummer haben – sagen wir k. Da aber s_2 in S'' ist und die Matrikelnummer von s_2 gleich m ist, muss $m = k$ gelten.
Weiter ist $S = S' \cup S''$. Wir haben also gezeigt, dass alle Studierenden aus S dieselbe Matrikelnummer haben. Das war zu zeigen. □
Mit freundlichen Grüßen
U. N. Fug

„Netter Versuch!“ murmelte Inspektor Mafin. Danach versicherte er der Verwaltung, dass alles so bleiben könnte wie es ist. „Der Beweis ist tatsächlich fast richtig.“ fing er an zu dozieren, ohne dass es irgendjemand hören wollte. „Die Argumente sind korrekt für alle natürlichen Zahlen, bis auf eine einzige. Das genügt natürlich um eine Aussage herzuleiten, die vollkommen falsch ist. Das ist das gemeine an Aussagen, die nur wahr *oder* falsch *seien können:* Fast richtig *bedeutet im wesentlichen das gleiche wie* vollkommen falsch.*“ Damit trottete er wieder zur Tür hinaus und hinterließ diesesmal leider mehr Fragen als Antworten.*
Können Sie etwas besser beschreiben, für welche eine natürliche Zahl n der Induktionsschritt nicht funktioniert?

Notation 1.3.10. Auch das Potenzieren von reellen Zahlen kennen wir

bereits. Mit Hilfe des Produktzeichens schreiben wir für $a \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a^n = \prod_{k=1}^{n} a.$$

Insbesondere setzen wir für alle $a \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1.$$

Beispiel 1.3.11. Seien wieder $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Da auf $\mathbb{R}$ das Distributivgesetz gilt, folgt für jedes $b \in \mathbb{R}$:

$$b \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = b \cdot (a_0 + \ldots + a_n) = b \cdot a_0 + \ldots + b \cdot a_n = \sum_{k=0}^{n} b \cdot a_k. \tag{1.1}$$

Sei weiter $b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann rechnen wir

$$\begin{aligned}
(1-b) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b^k \right) &= 1 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b^k \right) - b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b^k \right) \\
&\overset{(1.1)}{=} \sum_{k=0}^{n} b^k - \sum_{k=0}^{n} b \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} b^k - \sum_{k=0}^{n} b^{k+1} \\
&\overset{1.3.7}{=} \sum_{k=0}^{n} b^k - \sum_{k=1}^{n+1} b^k \\
&= b^0 + \sum_{k=1}^{n} b^k - \sum_{k=1}^{n} b^k - b^{n+1} = 1 - b^{n+1}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Satz 1.3.12. *Sei $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Beweis. Wenn $b \neq 1$ ist, ist $1 - b \neq 0$. Wir können also in (1.2) einfach auf beiden Seiten durch $1 - b$ teilen. □

Wir kommen nun zu einer speziellen Klasse von natürlichen Zahlen. Wir alle kennen (das hoffe ich zumindest sehr) die binomische Formel $(a + b)^2 =$

$a^2 + 2ab + b^2$. Dies gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Gibt es so eine Formel auch für $(a+b)^3$? Eine kleine Rechnung liefert uns $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Wir wollen diese Ausdrücke studieren, wenn wir den Exponenten durch eine beliebige natürliche Zahl n ersetzen.

Definition 1.3.13. Wir definieren $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $n!$ wird *Fakultät von* n genannt.

Beispiel 1.3.14. Es ist $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ab jetzt wachsen die Zahlen unglaublich schnell. Es ist z.B. 10! die Anzahl von Sekunden in sechs Wochen und

$$25! = 15511210043330985984000000.$$

Definition 1.3.15. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

(gesprochen: n *über* k). Diese Zahl heißt *Binomialkoeffizient.*

Beispiel 1.3.16. Wir sehen, dass wir für festes $n \in \mathbb{N}_0$ nur endlich viele Werte $k \leq n$ zur Verfügung haben um einen Wert ungleich Null für $\binom{n}{k}$ zu konstruieren.

$$\begin{array}{cc} n = 0: & \binom{0}{0} = 1 \\ n = 1: & \binom{1}{0} = 1, \quad \binom{1}{1} = 1 \\ n = 2: & \binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1 \\ n = 3: & \binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1 \end{array}$$

Wir stellen fest, dass jede dieser Zeilen mit einer 1 beginnt und symmetrisch ist. Das ist natürlich kein Zufall sondern folgt direkt aus der Definition. Weiter sehen wir, dass die angegebenen Binomialkoeffizienten alles natürliche Zahlen sind. Das ist nicht offensichtlich von der Definition, die zunächst nur eine rationale Zahl definiert.

Lemma 1.3.17. *Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(a) $\binom{n}{n} = 1$

(b) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ *falls* $k \geq 1$.

Beweis. Die Teile (a) und (b) sind schnell erledigt. Es ist $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$ und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.
Beweisen wir nun Teil (c). Falls $n \leq k$ ist, ist die gewünschte Gleichheit offensichtlich. Seien also $n, k \in \mathbb{N}_0$, mit $1 \leq k < n$, gegeben. Wir berechnen die rechte Seite und erhalten

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1))!} + \frac{1}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!} \\
&= \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1))!} \\
&= \frac{n}{(n-k) \cdot k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen! □

Jetzt haben wir genug Informationen zusammengetragen um eine „verallgemeinerte Binomischeformel“ zu beweisen.

Theorem 1.3.18. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n.
IA: $\boxed{n = 0:}$ Für $n = 0$ müssen wir einsehen, dass die Gleichung $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ stimmt. Aber auf beiden Seiten der Gleichung

steht eine 1, damit stimmt die Gleichung und der Induktionsanfang ist erledigt.
IV: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte die die Aussage $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
IS: $\boxed{n \to n+1:}$ Sei n wie in der Induktionsvoraussetzung. Wir müssen nun eine Formel für $(a+b)^{n+1}$ finden. Wir fangen einfach mal an zu rechnen.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \overset{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \cdot (a+b) \\
&= a \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) + b \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right)
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass wir in der ersten Summe schon Ausdrücke der Form $a^{(n+1)-k} b^k$ haben. Wir scheinen also auf der richtigen Spur zu sein. Wir berechnen nun in der ersten Summe den den Summanden für $k = 0$ und in der zweiten Summe den Summanden für $k = n$ einzeln. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right) + b^{n+1} \\
&\overset{1.3.7}{=} a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.3.17 wissen wir, dass folgende Gleichungen gelten: $a^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0$, $b^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$ und $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Benutzen wir diese Gleichungen in der letzten Formel, erhlaten wir endlich

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k.
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Kapitel 2

Die reellen Zahlen

$(n \in \mathbb{N}_0 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x > 0) \Longrightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$

Hier lernen wir nun endlich die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kennen. Wir nähern uns also dem „rechnen".

2.1 Körper

Wir wissen, dass wir in $\mathbb{R}$ rechnen können. Wir sollten also kurz klären, was rechnen ist und welche Spielregeln dabei gelten. Es gibt verschiedene Rechenoperationen: Addition($+$), Subtraktion($-$), Multiplikation($\cdot$) und Division($\div$). Aber was genau ist denn z.B. die Addition auf $\mathbb{R}$? Die Addition ordnet *jedem* Paar von reellen Zahlen a und b *genau eine* reelle Zahl $\mathbb{R}$ zu. Damit ist die Addition eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir fassen die Addition also auf als

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad (a, b) \mapsto a + b.$$

Gleiches gilt natürlich für die Multiplikation.

Definition 2.1.1. Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Abbildungen

$$+ : K \times K \longrightarrow K \quad ; \quad (a, b) \mapsto a + b$$

und

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K \quad ; \quad (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(A1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität bzgl. $+$)

(A2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$ (Kommutativität bzgl. $+$)

(A3) Es existiert ein Element $0 \in K$, mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$ (Existenz des *neutralen Elementes bzgl.* $+$)

(A4) Für alle $x \in K$ existiert ein Element $-x \in K$, mit $x + (-x) = 0$ (Existenz von additiven Inversen)

(M1) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität bzgl. $\cdot$)

(M2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität bzgl. $\cdot$)

(M3) Es existiert ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$ (Existenz des *neutralen Elementes bzgl.* $\cdot$)

(M4) Für alle $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein Element $x^{-1} \in K$, mit $x \cdot x^{-1} = 1$ (Existenz von multiplikativen Inversen)

(D) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$ (Distributivgesetz)

Bemerkung 2.1.2. Meistens werden wir einen Körper nur mit K bezeichnen. Etwas präziser ist es auch die Verknüpfungen noch zu erwähnen. Dann bezeichnen wir einen Körper mit $(K, +, \cdot)$. Sei so ein Körper nun gegeben. Sprechen wir nur vom *Inversen* eines Elementes $x \in K \setminus \{0\}$, so meinen wir immer das multiplikative Inverse x^{-1}. Manchmal werden wir den Punkt bei der Multiplikation weglassen und kurz xy für den Ausdruck $x \cdot y$ schreiben. Als letztes bemerken wir noch dass jeder Körper aus mindestens zwei Elementen besteht, da per Definition $1 \neq 0$ gilt.

Beispiel 2.1.3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden einen Körper. Zur Erinnerung:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Beispiel 2.1.4. Wir hatten gerade gesehen, dass ein Körper aus mindestens zwei Elementen bestehen muss. Es gibt auch tatsächlich einen Körper, der aus *genau* zwei Elementen besteht. Nach Definition 2.1.1 müssen diese Elemente 1 und 0 heißen.

Da 0 das neutrale Element bzgl. $+$ ist, muss gelten $0+0=0$ und $0+1=1$. Weiter muss es ein Element -1 geben, mit $1+(-1)=0$. Es ist aber $1+0=1$ und wir haben nur die Elemente 0 und 1 zur Verfügung. Damit muss auch gelten $(-1)=1$ und $1+1=0$.
Da 1 das neutrale Element bzgl. $\cdot$ ist, muss gelten $1\cdot 0=0$ und $1\cdot 1=1$. Setzen wir zusätzlich noch $0\cdot 0=0$, so haben wir alle möglichen Rechnungen definiert. Diese können wir in so genannten Verknüpfungstafeln zusammenfassen

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Man überprüft leicht, das diese Verknüpfungen tatsächlich einen Körper aus zwei Elementen definieren. Diesen bezeichnen wir mit $\mathbb{F}_2$.

Satz 2.1.5. *Sei K ein Körper. Dann gilt*

(a) Jedes $x \in K$ besitzt genau ein additives Inverses.

(b) Jedes $x \in K \setminus \{0\}$ besitzt genau ein multiplikatives Inverses.

(c) Es gibt genau ein netrales Element bzgl. $+$ in K.

(d) Es gibt genau ein netrales Element bzgl. $\cdot$ in K.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussagen über die Addition. Die Aussagen zur Multiplikation beweist man ganz genau so.

Zu (a): Sei $x \in K$ beliebig. Dann gilt $x+(-x)=0$. Sei nun $y \in K$ ein weiteres Element mit $x+y=0$. Dann ist insbesondere $x+(-x)=x+y$. Wir addieren auf beiden Seiten mit $(-x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&(-x)+(x+(-x)) = (-x)+(x+y)\\
\Longleftrightarrow\ &((-x)+x)+(-x) = ((-x)+x)+y\\
\Longleftrightarrow\ &0+(-x) = 0+y\\
\Longleftrightarrow\ &(-x) = y
\end{aligned}$$

Damit ist tatsächlich $-x$ das einzige additive Inverse von x.

Zu (c): Sei $x \in K$ beliebig und $y \in K$, mit $x + y = x$. Wir werden zeigen, dass daraus bereits $y = 0$ folgt. Der Beweis funktioniert genau wie gerade. Wir addieren beide Seiten der Gleichung $x + y = x$ mit $(-x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} & (-x) + (x + y) = (-x) + x \\ \iff & ((-x) + x) + y = 0 \\ \iff & 0 + y = 0 \\ \iff & y = 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch dieser Teil bewiesen.

□

Wir haben in diesem Beweis zweimal benutzt, dass wir in einem Körper bei der Gleichung $x + y = x + z$, das x „wegkürzen“ dürfen. Ähnliches gilt auch für die Multiplikation. Beides sollten wir als eigenständige Aussage festhalten:

Proposition 2.1.6. *Sei K ein Körper und seien $x, y, z \in K$. Dann gilt*

(a) Wenn $x + y = x + z$ ist, dann ist $y = z$.

(b) Wenn $x \neq 0$ ist und $x \cdot y = x \cdot z$, dann folgt $y = z$.

(c) $-(-x) = x$

(d) Wenn $x \neq 0$ ist, dann $(x^{-1})^{-1} = x$.

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage (d). Sei also $x \in K \setminus \{0\}$. Das Element $(x^{-1})^{-1}$ ist ein Element in K mit $x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = 1$ (vgl. (M4)). Es ist aber auch $1 = x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x$. Da das Inverse eindeutig bestimmt ist nach Satz 2.1.5, folgt hieraus schon $(x^{-1})^{-1} = x$. □

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kennen wir ganz gut, daher eignen diese sich gut um ein Gespür für Rechenregeln zu bekommen. Wir wissen zum Beispiel, dass $(-1) \cdot 400 = -400$ ist und $0 \cdot 400 = 0$ ist. Hier kann die 400 durch jede andere rationale Zahl α ersetzt werden. Es gilt immer $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$ und $0 \cdot \alpha = 0$. Das gilt genauso auch in beliebigen Körpern:

Satz 2.1.7. *Sei K ein Körper. Für jedes $x \in K$ gilt*

(a) $0 \cdot x = 0$

(b) $(-1) \cdot x = -x$

(c) $x \cdot y = 0 \implies x = 0$ *oder* $y = 0$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen der Reihe nach. Sei also $x \in K$ beliebig. Es ist

$$0 + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Mit Proposition 2.1.6(a) können wir aus dieser Gleichung ein $0 \cdot x$ auf jeder Seite kürzen und wir erhalten $0 = 0 \cdot x$. Damit ist Teil (a) bewiesen.
Um Teil (b) zu beweisen, berechnen wir

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x \overset{(a)}{=} 0.$$

Da aber das additive Inverse $(-x)$ eindeutig bestimmt ist (siehe Satz 2.1.5), muss damit bereits $-x = (-1) \cdot x$ folgen.
Als letztes müssen wir noch Teil (c) zeigen. Sei daze $x \cdot y = 0$ für $x, y \in K$. Falls $x = 0$ ist, sind wir fertig (dann ist sicher $x = 0$ oder $y = 0$). Falls $x \neq 0$ ist, gibt es das multiplikative Inverse x^{-1}. Multiplizieren wir auf beiden Seiten der Gleichung $x \cdot y = 0$ mit x^{-1}, so erhalten wir

$$y = 1 \cdot y = x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \overset{\text{(a)}}{=} 0.$$

Damit ist auch in diesem Fall $x = 0$ oder $y = 0$ richtig. Das beweist auch Teil (c). □

Wir hatten am Anfang gesagt, dass wir in $\mathbb{R}$ vier Rechenoperationen haben. Bisher haben wir aber nur zwei kennengelernt – nämlich $+$ und $\cdot$. Glücklicherweise genügt das bereits um auch die Subtraktion und die Division zu definieren.

Definition 2.1.8. Sei $(K, +\cdot)$ ein Körper und $x, y \in K$. Dann definieren wir

$$x - y = x + (-y).$$

Falls $y \neq 0$ ist, definieren wir weiter

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Insbesondere setzen wir also $\frac{1}{y} = y^{-1}$ für alle $y \in K \setminus \{0\}$.

Bemerkung 2.1.9. Es ist also „minus y“ zu rechnen genau das gleiche, wie das additive Inverse von y zu addieren. Genauso ist „geteilt durch y“ zu rechnen das gleiche, wie das multiplikative Inverse von y zu multiplizieren. Da dieses multiplikative Inverse aber nur für $y \neq 0$ existiert, können wir nie – wirklich NIE! – durch Null teilen.

Als kleinen Spoiler verraten wir hier, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ebenfalls einen Körper bilden.

2.2 Geordnete Körper

Die reellen Zahlen, wie wir Sie aus der Schule kennen, haben noch eine Eigenschaft, die nicht direkt mit dem rechnen zu tun hat. Wenn wir zwei verschiedene reellen Zahlen gegeben haben, wissen wir, dass eine stets größer ist als die andere. Auch dies wollen wir formal (und allgemein) definieren.

Definition 2.2.1. Ein Körper K heißt *geordnet*, wenn es eine Teilmenge $P \subseteq K \setminus \{0\}$ gibt, so dass gilt

(O1) Für jedes $x \in K \setminus \{0\}$ gilt entweder $x \in P$ oder $-x \in P$.

(O2) Für $x, y \in P$ ist auch $x + y \in P$.

(O3) Für $x, y \in P$ ist auch $x \cdot y \in P$.

Wenn so eine Menge P existiert, dann nennen wir die Elemente aus P *positiv*.

Beispiel 2.2.2. Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist geordnet. Die Menge P der positiven Zahlen ist genau das, was Sie sich als positive Zahl vorstellen:

$$P = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Beispiel 2.2.3. Ist auch der Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen geordnet? Da die Menge P nicht leer sein kann (dies würde (O1) verletzen), müsste $P = \{1\}$ gelten. Es ist aber $1 + 1 = 0 \notin P$, was (O2) widerspricht. Der Körper $\mathbb{F}_2$ ist somit nicht geordnet.

Definition 2.2.4. Sei K ein geordneter Körper und sei P die Menge der positiven Elemente in K. Für $x, y \in K$ schreiben wir

- $x > 0$, falls $x \in P$.
- $x < 0$, falls $-x \in P$.
- $x > y$, falls $x - y > 0$.
- $x \geq y$, falls $x - y > 0$ oder $x = 0$.
- $x < y$ falls $y > x$.
- $x \leq y$, falls $y \geq x$.

Bemerkung 2.2.5. Das spiegelt alles genau das wieder, was wir schon aus der Grundschule kennen. Sei nun K ein geordneter Körper. Mit der gerade kennengelernten Notation übersetzen sich die Axiome (O1), (O2) und (O3) zu:

(O1) Für jedes $x \in K$ gilt entweder $x > 0$ oder $-x > 0$ oder $x = 0$.

(O2) Für $x, y > 0$ ist auch $x + y > 0$.

(O3) Für $x, y > 0$ ist auch $x \cdot y > 0$.

Die Ordnung verhält sich zum Glück recht brav in Kombination mit Rechnungen.

Proposition 2.2.6. *Sei K ein geordneter Körper und seien $x, y, z \in K$. Dann gilt:*

(a) $-x > 0 \iff x < 0$

(b) $x > y$ *und* $y > z \Longrightarrow x > z$

(c) $x > y \iff x + z > y + z$

(d) $x > y$ *und* $z > 0 \Longrightarrow x \cdot z > y \cdot z$

(e) $x > y$ *und* $z < 0 \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z$

(f) für $x \neq 0$ *gilt* $x^2 > 0$

(g) $x > y > 0 \implies y^{-1} > x^{-1} > 0$.

Beweis. Die Beweise zu den Teilen (d)-(g) haben wir nicht in der Vorlesung behandelt. Sie sind hier nur für Ihr persönliches Interesse angegeben.

Zu (a): Es gilt $-x > 0 \overset{-x=0-x}{\iff} 0 - x > 0 \overset{\text{Def.}}{\iff} 0 > x$. Das wollten wir zeigen.

Zu (b): Wieder beweisen wir die Aussage per direktem Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} x > y \text{ und } y > z &\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} x - y > 0 \text{ und } y - z > 0 \\ &\overset{(O2)}{\Longrightarrow} (x-y) + (y-z) > 0 \implies x - z > 0 \\ &\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} x > z. \end{aligned}$$

Zu (c): Es ist $x - y = (x+z) - (y+z)$. Damit besagt $x - y > 0$ nichts anderes als $(x+z) - (y+z) > 0$. Wenden wir die Definition von $x > y$ an so übersetzt sich diese Aussage dazu, dass $x > y$ nichts anderes bedeutet als $x + z > y + z$.

Zu (d): Das folgt sofort aus (O3). Denn:

$$\begin{aligned} x > y \text{ und } z > 0 &\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} x - y > 0 \text{ und } z > 0 \\ &\overset{(O3)}{\Longrightarrow} z \cdot (x-y) = zx - zy > 0 \implies zx > zy. \end{aligned}$$

Zu (e): Diese Aussage folgt fast genauso:

$$\begin{aligned} x > y \text{ und } z < 0 &\overset{\text{Def.}\&(a)}{\Longrightarrow} x - y > 0 \text{ und } (-z) > 0 \\ &\overset{(O3)}{\Longrightarrow} (-z) \cdot (x-y) = -zx + zy > 0 \implies zy > zx. \end{aligned}$$

Zu (f): Falls $x > 0$ ist, dann ist $x^2 = x \cdot x > 0$ nach Eigenschaft (O3). Ist andererseits $x < 0$, so ist $-x > 0$ und $(-x) \cdot (-x) > 0$. Allerdings ist $(-x) \cdot (-x) = (-x) \cdot (-1) \cdot x = (-1) \cdot (-x) \cdot x = -(-x) \cdot x = x \cdot x$. Damit ist $x^2 > 0$ auch im Fall $x < 0$.

Zu (g): Sei also $x > y > 0$. Wir zeigen zunächst, dass $x^{-1} > 0$ und $y^{-1} > 0$: Wir wissen aus Teil (f), dass $(x^{-1}) \cdot (x^{-1}) > 0$ gilt. Mit (O3) folgt nun $x \cdot (x^{-1}) \cdot (x^{-1}) = 1 \cdot x^{-1} > 0$. Genauso folgt auch $y^{-1} > 0$. Nun gilt (schon wieder mit (O3)), dass $x^{-1} \cdot y^{-1} > 0$ gilt. Mit Teil (c) folgt nun aus $x > y$

$$y^{-1} = x \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) > y \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = x^{-1}.$$

Hier haben wir nur benutzt, dass wir in K das Assoziativ- und das Kommutativgesetz haben. Dadurch können wir x und x^{-1} (und genauso y und y^{-1}) immer zu einer 1 zusammenfassen.

□

Da wir immer $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ haben, erhalten wir aus Teil (f):

Korollar 2.2.7. *In jedem geordneten Körper ist* $1 > 0$.

Wieder erwähnen wir als Spoiler, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist.

2.3 Vollständige Körper

Wir wissen, dass $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper ist. Warum brauchen wir denn dann überhaupt die reellen Zahlen $\mathbb{R}$?

Beispiel 2.3.1. Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha^2 < 2$. Na klar, wir können einfach $\alpha = 1$ wählen. Es gibt auch ein $\beta \in \mathbb{Q}$, mit $\beta^2 > 2$. Auch das ist klar, da zum Beispiel $\beta = 2$ diese Ungleichung erfüllt. Es gibt aber kein $\gamma \in \mathbb{Q}$, mit $\gamma^2 = 2$. Der Körper $\mathbb{Q}$ hat also „Lücken“. Diese Lücken werden von den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ geschlossen.
Wir zeigen noch kurz, dass es tatsächlich keine rationale Zahl γ gibt, mit $\gamma^2 = 2$. Angenommen es gäbe so ein γ. Dann könnten wir das schreiben als $\frac{a_0}{b_0}$, mit $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$. Aus $1 < 2 = (a_0/b_0)^2 < 2^2$ folgt $1 < \frac{a_0}{b_0} < 2$. Wir wissen also, dass gilt $b_0 < a_0 < 2b_0$. Ziehen wir in allen Teilen b_0 ab erhalten wir

$$0 < a_0 - b_0 < b_0. \tag{2.1}$$

Wir setzen nun $a_1 = 2b_0 - a_0 \in \mathbb{N}$ und $b_1 = a_0 - b_0 \in \mathbb{N}$. Weiter rechnen wir schnell aus

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2b_0 - a_0}{a_0 - b_0} = \frac{\frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot b_0 - a_0}{a_0 - b_0} = \frac{\frac{a_0}{b_0}(a_0 - b_0)}{a_0 - b_0} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Es ist also $\gamma = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1}$, mit $0 < b_1 < b_0$. Jetzt können wir aber einfach a_0, b_0 durch a_1, b_1 ersetzen und wir erhalten natürliche Zahlen a_2, b_2 mit $\gamma = \frac{a_2}{b_2}$ und $b_2 < b_1$. Weiteres wiederholen dieses Argumentes liefert für jedes $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen a_n, b_n, mit $\gamma = \frac{a_n}{b_n}$ und $b_n < b_{n-1} < \ldots < b_0$. Das kann aber nicht richtig sein, da es nur $b_0 - 1$ natürliche Zahlen gibt, die kleiner sind als b_0. Spätestens für $n = b_0$ kann der letzte Satz also nicht mehr stimmen. Was sagt uns das nun? Alle Argumente waren in Ordnung und trotzdem kommt etwas falsches heraus. Dann muss unsere Annahme falsch gewesen sein! Unsere Annahme war, dass es ein $\gamma \in \mathbb{Q}$ gibt, mit $\gamma^2 = 2$. Da wir eingesehen haben, dass das falsch ist, wissen wir nun, dass es kein $\gamma \in \mathbb{Q}$ gibt mit $\gamma^2 = 2$.

Im folgenden versuchen wir diese „Lücken“ in $\mathbb{Q}$ etwas genauer zu definieren.

Definition 2.3.2. Sei K ein geordneter Körper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge. Falls ein $a \in K$ existiert, so dass für alle $x \in M$ die Ungleichung $x \leq a$ gilt, so nennen wir a eine *obere Schranke* von M. In diesem Fall ist die Menge M *nach oben beschränkt.* Existiert ein $b \in K$, so dass für alle $x \in M$ die Ungleichung $x \geq b$ gilt, so nennen wir b eine *untere Schranke* von M. In diesem Fall ist die Menge M *nach unten beschränkt.*

Beispiel 2.3.3. Wir betrachten Teilmengen des geordneten Körpers $\mathbb{Q}$:

- Die Menge $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben und nach unten beschränkt. Eine obere Schranke ist 1 (oder jede rationale Zahl ≥ 1) und eine untere Schranke ist 0 (oder jede rationale Zahl ≤ 0).
- Die Menge $\mathbb{Q}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- Die Menge $\mathbb{N}$ ist nach unten beschränkt durch jede rationale Zahl ≤ 1, aber nicht nach oben beschränkt.
- Die Menge $B = \{\alpha \in \mathbb{Q} | 0 < \alpha \wedge \alpha^2 < 2\}$ ist ebenfalls nach oben und unten beschränkt.

Definition 2.3.4. Sei K ein geordneter Körper und M eine Teilmenge von K

(a) Falls M ein größtes Element besitzt, so bezeichen wir dieses mit $\max M$ und nennen es das Maximum von M. (Wenn es exisitert ist $\max M$ also ein Element mit: $(x \in K \wedge x > \max M) \Longrightarrow x \notin M$.)

(b) Falls M ein kleinstes Element besitzt, so bezeichen wir dieses mit $\min M$ und nennen es das Minimum von M. (Wenn es exisitert ist $\min M$ also ein Element mit: $(x \in K \wedge x < \min M) \Longrightarrow x \notin M$.)

(c) Falls es existiert ist das *Supremum von M* gegeben durch

$$\sup M = \min\{x \in K | x \text{ ist obere Schranke von } M\}.$$

(d) Falls es existiert ist das *Infimum von M* gegeben durch

$$\inf M = \max\{x \in K | x \text{ ist untere Schranke von } M\}.$$

Bemerkung 2.3.5. Eine Menge M kann natürlich nur dann ein Maximum (Minimum) haben, wenn M nach oben (unten) beschränkt ist. Existiert ein Maximum der Menge M, so existiert auch das Supremum und es ist $\max M = \sup M$. Dies liegt daran, dass das Maximum eine obere Schranke ist, aber es natürlich keine kleinere obere Schranke geben kann. Gleiches gilt für das Verhältnis zwischen dem Minimum und dem Infimum.
Falls ein Supremum (oder ein Infimum) existiert, so kann das in M liegen oder auch nicht. Betrachten wir nochmal die Menge $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$, so ist $\inf A = 0 \notin A$ und $\sup A = 1 \in A$.

Beispiel 2.3.6. Wir kommen nun zu einem Beispiel in dem eine Menge zwar nach oben beschränkt ist, aber kein Maximum existiert. Sei dazu wieder $B = \{\alpha \in \mathbb{Q} | 0 < \alpha \wedge \alpha^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$. Für jedes $\beta \in \mathbb{Q}$ setzen wir $\beta' = \frac{2\beta+2}{\beta+2} \in \mathbb{Q}$. Man rechnet leicht nach, dass gilt

$$\beta' = \beta + \frac{2-\beta^2}{2+\beta} \quad \text{und} \quad (\beta')^2 = 2 + \frac{2(\beta^2-2)}{(\beta+2)^2}. \tag{2.2}$$

Ist nun $\beta \in B$ so folgt aus (2.2), dass gilt $\beta < \beta' \in B$. Wir finden also zu jedem Element aus B ein größeres Element aus B. Damit kann B kein Maximum besitzen.
Insbesondere ist jede obere Schranke von B kein Element von B. Ist nun β eine obere Schranke von B, dann gilt $\beta^2 > 2$. Daraus folgt nun – wieder mit (2.2) – dass $\beta > \beta'$ und $(\beta')^2 > 2$ gilt. Damit ist auch β' eine obere Schranke von B. Zu jeder oberen Schranke von B finden wir also eine kleinere obere Schranke von B. Damit gibt es keine kleinste obere Schranke von B – also kein Supremum von B.

Bemerkung 2.3.7. Wir betrachten die Menge $B = \{\alpha \in \mathbb{Q} | 0 < \alpha \wedge \alpha^2 < 2\}$ nun als Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Dann ist das Supremum von B einfach $\sqrt{2}$. Das ist ein Beispiel dafür, wie $\mathbb{R}$ eine „Lücke“ in $\mathbb{Q}$ schließt.

Definition 2.3.8. Sei K ein geordneter Körper. Dann heißt K *vollständig*, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq K$ ein Supremum besitzt.

Wie wir gesehen haben, ist $\mathbb{Q}$ zwar ein geordneter Körper aber nicht vollständig. Jetzt können wir endlich verraten, was $\mathbb{R}$ denn eigentlich ist.

Theorem 2.3.9. *Es gibt genau einen vollständigen geordneten Körper der $\mathbb{Q}$ enthält. Diesen Körper nennen wir* den Körper der reellen Zahlen *und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.*

Beweis. Der Beweis würde den Rahmen sprengen (und man würde nicht viel dabei lernen). Daher lassen wir ihn einfach weg. □

Wir sammeln ein paar Folgerungen aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Satz 2.3.10 (Archimedisches Prinzip)**.** *Seien $x, y \in \mathbb{R}$, mit $x > 0$. Dann*

(a) existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $nx > y$.

(b) existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $\frac{1}{n} < x$.

Beweis. Wir beweisen zunächst Aussage (a). Wir führen einen Widerspruchsbeweis. *Angenommen*, es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, mit $nx > y$. Dann ist die Menge $\{nx | n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt durch y. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert nun, dass die reelle Zahl $a = \sup\{nx | n \in \mathbb{N}\}$ existiert. Jedes Element das kleiner ist als a ist keine obere Schranke der Menge $\{nx | n \in \mathbb{N}\}$. Insbesondere ist $a - x$ keine obere Schranke. Wir finden also ein Element aus der Menge, sagen wir kx, mit $k \in \mathbb{N}$, so dass $a - x < kx$ ist. Daraus folgt nun aber $a < kx + x = \underbrace{(k+1)}_{\in \mathbb{N}} x$.

Aber a ist doch eine obere Schranke der Menge $\{nx|n \in \mathbb{N}\}$. Das ist ein Widerspruch. Unsere Annahme muss also falsch gewesen sein! Daraus folgt die Behauptung.
Aussage (b) folgt sofort aus (a), wenn wir $y = 1$ wählen. $\square$

Aus Satz 2.3.10 können wir noch eine interessante Aussage folgern. Diese wird üblicherweise durch „$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$“ beschrieben.

Proposition 2.3.11. *Seien $x, y \in \mathbb{R}$, mit $x > y$. Dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $x > \alpha > y$.*

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht geführt. Hier finden Sie die Beweisidee für Ihr privates Vergnügen: Aus $x > y$ folgern wir $x - y > 0$. Mit Satz 2.3.10 wissen wir nun, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, mit $n(x-y) > 1$. Da die ganzen Zahlen nicht beschränkt sind, gibt es ein kleinstes $m \in \mathbb{Z}$, mit $m > ny$. Es folgt sofort $y < \frac{m}{n}$. Aufgrund der Minimalität von m wissen wir $m - 1 \leq ny$. Mit $n(x - y) > 1$ folgt nun

$$m \leq ny + 1 < nx$$

und somit $x > \frac{m}{n}$. Setzen wir $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ erhalten wir, wie gewünscht, $x > \alpha > y$. $\square$

Lemma 2.3.12 (Bernoulli Ungleichung)**.** *Sei $x \in \mathbb{R}$, mit $x \geq -1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Das lässt sich (natürlich) per Induktion nach n beweisen. Den einfachen Beweis werden wir aber nicht führen. $\square$

Proposition 2.3.13. *Sei $x > 0$ beliebig. Dann gilt:*

(a) Für jedes $b \in \mathbb{R}$, mit $b > 1$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $b^n > x$.

(b) Für jedes $b \in \mathbb{R}$, mit $0 < b < 1$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $b^n < x$.

Das sagt uns nur, dass die Potenzen von b beliebig groß werden, wenn $b > 1$, und beliebig klein werden, wenn $0 < b < 1$.

Beweis. Wir beweisen nur (a). Es ist $b - 1 > 0$. Also existiert nach Satz 2.3.10 ein $n \in \mathbb{N}$, mit $n(b-1) > x - 1$. Zusammen mit der Bernoulli Ungleichung 2.3.12 erhalten wir

$$b^n = (1 + (b - 1))^n \geq 1 + n(b - 1) > 1 + x - 1 = x.$$

Das war zu zeigen. $\square$

Als letzte Anwendung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ erwähnen wir noch die Existenz von n-ten Wurzeln in $\mathbb{R}$.

Theorem 2.3.14. *Sei $x > 0$ eine reelle Zahl und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $\sqrt[n]{x} > 0$, mit $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Das Element $\sqrt[n]{x}$ nennen wir n-te* Wurzel von x.

Beweis. Wie man soetwas beweisen kann, lässt sich aus Bemerkung 2.3.7 erahnen: Die Menge $C = \{y \in \mathbb{R} | y > 0 \wedge y^n < x\} \subseteq \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ garantiert nun die Existenz des Supremums dieser Menge. Falls nun $(\sup C)^n > x$ ist, so findet man eine obere Schranke von C, die kleiner ist als $\sup C$. Falls $(\sup C)^n < x$, so ist $\sup C$ keine obere Schranke. (Die Details überspringen wir.) Da beides ein Widerspruch zur Definition des Supremums ist, folgt

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbb{R} | y > 0 \wedge y^n < x\}.$$

$\square$

2.4 Betrag und Abstand

In diesem kurzen Abschnitt klären wir noch wie man den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen beschreiben kann.

Definition 2.4.1. Der *Betrag* auf den reellen Zahlen ist gegeben durch die Funktion

$$|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 2.4.2. Eine äquivalente Beschreibung des Betrages ist $|x| = \max\{x, -x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.4.3. *Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:*

(a) $|x| \geq 0$, *und* $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(b) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Die Aussage (c) nennen wir Dreiecksungleichung.

Beweis. Diese Eigenschaften folgen leicht aus den Eigenschaften von $>$, $<$, $\geq$ und $\leq$. Wir zeigen nur die Dreiecksungleichung. Es ist $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Insbesondere ist also $x + y \leq |x| + |y|$. Genauso folgt aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$, dass gilt $-(x+y) = (-x)+(-y) \leq |x|+|y|$. Beides zusammen liefert

$$|x + y| = \max x + y, -(x + y) \leq |x| + |y|.$$

Das war zu zeigen. $\square$

Beispiel 2.4.4. Ein paar einfache Beispiele:

- $|\sqrt{2}| = \sqrt{2} = \sqrt{|2|}$
- $|3 + (-7)| = 4 = ||3| - |-7||$ und $|(-3) + (-7)| = 10 = |-3| + |-7|$
- $|{}^1/_{(-2)}| = {}^1/_2 = {}^1/_{|2|}$

Das alles verallgemeinert sich für beliebige reelle Zahlen.

Lemma 2.4.5. *Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$, mit $z > 0$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(a) $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$,

(b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,

(c) für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.

Jede Abbildung mit Definitions- und Wertebereich gleich $\mathbb{R}$, können wir visualisieren.

Definition 2.4.6. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von f gegeben durch die Menge $\{(x, f(x))|x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Die Elemente eines Graphen können wir nun als Punkte in der Ebene darstellen. Dabei nimmt der erste Eintrag die Rolle der ersten Koordinate und der zweite Eintrag die Rolle der zweiten Koordinate ein. Zeichnen wir nun den Graph der Betragsfunktion, so ergibt sich

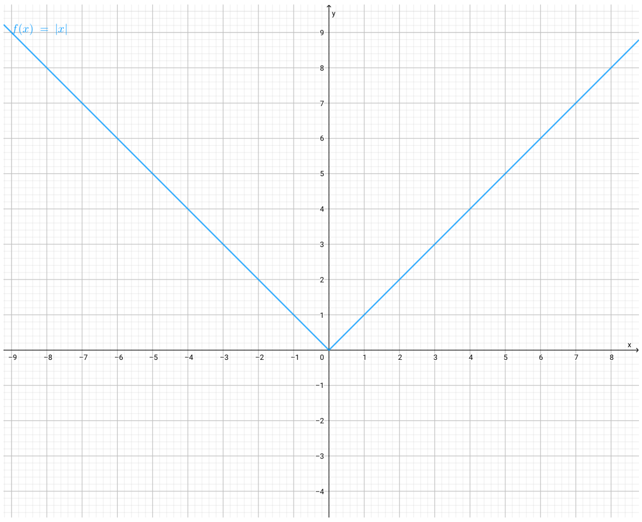


Abbildung 2.1: Der Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$.

Definition 2.4.7. Der *Abstand* zwischen reellen Zahlen x und y ist gegeben durch

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Proposition 2.4.8. *Es gilt für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$*:*

(a) $d(x, y) \geq 0$, *und* $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Alle diese Aussagen folgen sofort aus den gerade kennengelernten Eigenschaften des Betrages.
Wir nutzen die Gelegenheit um wichtige Teilmengen der reellen Zahlen zu definieren.

Definition 2.4.9. Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Intervall*, wenn für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x, y \in I \wedge x < z < y) \Longrightarrow z \in I.$$

Das bedeutet gerade, dass wenn x und y in einem Intervall sind. Dann sind auch alle reellen Zahlen zwischen x und y in diesem Intervall.

Beispiel 2.4.10. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Mengen Intervalle

- $\emptyset$
- $\mathbb{R}$
- $(x, y) = \{a \in \mathbb{R} | x < a < y\}$
- $[x, y) = \{a \in \mathbb{R} | x \leq a < y\}$
- $(x, y] = \{a \in \mathbb{R} | x < a \leq y\}$
- $[x, y] = \{a \in \mathbb{R} | x \leq a \leq y\}$
- $(x, \infty) = \{a \in \mathbb{R} | x < a\}$
- $(x, \infty] = \{a \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $(-\infty, y) = \{a \in \mathbb{R} | a < y\}$
- $(-\infty, y] = \{a \in \mathbb{R} | a \leq y\}$

Bemerkung 2.4.11. Die Mengen aus Beispiel 2.4.10 beschreiben bereits alle Intervalle! Für ein Intervall müssen wir nur die Endpunkte festsetzen und entscheiden, ob diese Endpunkte Teil des Intervalls seien sollen, oder nicht. Eine runde Klammer bedeutet dabei, dass der entsprechende Endpunkt kein Element des Intervalls ist. Eine eckige Klammer bedeutet, dass der entsprechende Endpunkt ein Element des Intervalls ist.

Kapitel 3

Die komplexen Zahlen

$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \cdot i\right)^n = 1$

Wir kennen mittlerweile die Teilmengen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

In diesem Kapitel werden wir die Fragen klären, ob man diese Kette noch „sinnvoll“ um ein Glied verlängern kann.

...Pssst... Die Antwort ist: Ja!

3.1 Neue Zahlen

Wir alle können in $\mathbb{R}$ ohne Probleme die Gleichung $x^2 + 5x + 3 = 0$ lösen. Sie können dafür die *pq*-Formel benutzen oder – für Leute, die sich Formeln nur sehr schlecht merken können[1]– quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}
& x^2+5x+3=0 \\
\iff\quad & x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2-3=\frac{13}{4} \\
\iff\quad & x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{13}{4}}=\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \\
\iff\quad & x=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{5}{2}\quad\text{oder}\quad x=-\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Da wir eingesehen haben, dass $\sqrt{13}$ eine reelle Zahl ist, erhalten wir zwei Lösungen der Gleichung. Das sollte doch bitte für alle Gleichungen dieser Form funktionieren. Versuchen wir also die Gleichung $x^2+3x+3=0$ zu lösen. Wir gehen ganz genau so vor wie eben:

$$\begin{aligned}
& x^2+3x+3=0 \\
\iff\quad & x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff\quad & \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir auf der linken Seite ein Quadrat stehen und auf der rechten Seite eine negative Zahl. Es gibt also keine reelle Zahl x, die diese Gleichung löst (vgl. Proposition 2.2.6(f)). Das ist sehr unbefriedigend! Wir könnten uns damit abfinden, oder folgende Frage stellen:

Ist $\mathbb{R}$ vielleicht gar nicht so vollständig?

Bemerkung 3.1.1. Es gibt eine sehr einfache quadratische Gleichung, die wir in $\mathbb{R}$ nicht lösen können: $x^2+1=0$.

Wir möchten also neue Zahlen konstruieren, in denen das Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen immer funktioniert. Wir stellen eine Wunschliste zusammen.

[1] wie z.B. den Autor dieser Zeilen

Wunschliste 3.1.2. Von unseren neuen Zahlen wünschen wir uns:

- dass sie die reellen Zahlen enthalten. *(Die kennen wir ja schon)*
- dass sie einen Körper bilden. *(Wir wollen rechnen dürfen!)*
- dass sie ein Element i enthalten, mit $i^2 = -1$. *(Wir wollen ja quadratische Gleichungen lösen können – insbesondere $x^2 + 1 = 0$.)*

Wenn diese Wünsche aber gelten sollen, dann brauchen wir in unseren neuen Zahlen auch für alle $b \in \mathbb{R}$ das Element $b \cdot i$. Dann brauchen wir aber auch für alle $a, b \in \mathbb{R}$ das Element $a + b \cdot i$. Am allerbesten wäre es also, wenn sich die Verknüfungen auf den reellen Zahlen so erweitern ließen, dass die Menge

$$\{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\} \tag{3.1}$$

einen Körper bildet.

Bemerkung 3.1.3. Wie könnten diese Verknüpfungen aussehen? Wenn die Menge aus (3.1) einen Körper bilden soll, dann muss für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten:

(i) $(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) \overset{\text{(A1)}}{=} a + b \cdot i + c + d \cdot i \overset{\text{(A2)}}{=} (a + c) + b \cdot i + d \cdot i \overset{\text{(D)}}{=} (a + c) + (b + d) \cdot i$

(ii) $(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) \overset{\text{(D)}}{=} a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot i \cdot c + b \cdot i \cdot d \cdot i \overset{\text{(A2)\&(M2)}}{=} a \cdot c + b \cdot d \cdot \underbrace{i^2}_{=-1} + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i \overset{\text{(D)}}{=} (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$

Glücklicherweise können wir diese Gleichnungen tatsächlich als Definition der neuen Verknüpfungen wählen.

Theorem 3.1.4. *Mit den folgenden Verknüpfungen bildet die Menge $\{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ einen Körper:*
Addition: $(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$
Multiplikation: $(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$
Diesen Körper nennen wir Körper der komplexen Zahlen *und bezeichnen ihn mit $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wir müssen die Körpereigenschaften aus Definition 2.1.1 nachweisen. Seien dazu $a + b \cdot i, c + d \cdot i \in \mathbb{C} = \{a + b \cdot i | a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$ beliebig (insbesondere sind also $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

Zu (A2): Es gilt $(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i) \stackrel{\text{Def.}}{=} (a+c)+(b+d)\cdot i$. Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, ist $a+c=c+a$ und $b+d=d+b$. Es folgt also $(a+b\cdot i)+(c+d\cdot i) = (c+a)+(d+b)\cdot i \stackrel{\text{Def}}{=} (c+d\cdot i)+(a+b\cdot i)$. Damit ist die Addition kommutativ.

Zu (A3): Es gilt $(a+b\cdot i)+(0+0\cdot i) = (a+0)+(b+0)\cdot i = a+b\cdot i$. Damit ist $0+0\cdot i$ das neutrale Element bzgl. $+$.

Zu (A4): Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist, existieren $-a$ und $-b \in \mathbb{R}$. Mit diesen Elementen erhalten wir $(a+b\cdot i)+((-a)+(-b)\cdot i) = (a+(-a))+(b+(-b))\cdot i = 0+0\cdot i$. Also ist $(-a)+(-b)\cdot i$ das additive Inverse von $a+\cdot i$.

Zu (M3): Das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist die 1. Wir rechnen daher $(a+b\cdot i)\cdot(1+0\cdot i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)\cdot i = a+b\cdot i$. Es ist also $1+0\cdot i$ das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.

Zu (M4): Für die Konstruktion von multiplikativen Inversen wollen wir benutzen, dass es multiplikative Inverse von Elementen in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gibt. Sei also $a+b\cdot i \neq 0+0\cdot i$ (d.h. mindestens eine der Zahlen a und b ist ungleich 0). Dann ist $a^2+b^2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Insbesondere existiert $\frac{1}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
&(a+b\cdot i)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\cdot i\right)\\
=&\underbrace{\left(\frac{a\cdot a}{a^2+b^2}-\frac{b\cdot(-b)}{a^2+b^2}\right)}_{=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1}+\underbrace{\left(\frac{a\cdot(-b)}{a^2+b^2}+\frac{b\cdot a}{a^2+b^2}\right)}_{=\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}=0}\cdot i\\
=&1+0\cdot i. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Die Eigenschaften (A1), (M1), (M2) und (D) zeigt man ganz ähnlich. □

Bemerkung 3.1.5. Wir schreiben kurz $a+0\cdot i = a$ für alle $a\in\mathbb{R}$. Damit wird $\mathbb{R}$ tatsächlich zu einer Teilmenge von $\mathbb{C}$. Weiter ist mit dieser Notation das neutrale Element bzgl. $+$ gegeben durch 0 und das neutrale Element bzgl. $\cdot$ durch 1. Das sind also genau die neutralen Elemente in $\mathbb{R}$.
Genau so schreiben wir kurz $0+b\cdot i = b\cdot i$ für alle $b\in\mathbb{R}$, und $a+(-b)\cdot i = a-b\cdot i$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$.
Mit diesen Notationen wird das Inverse eines Elementes $a+b\cdot i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ zu $\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a-b\cdot i)$ (vgl. (3.2)).

Beispiel 3.1.6. Wir rechnen mal mit konkreten Zahlen:

$$(5+7\cdot i)+(8+3\cdot i)=(5+8)+(7+3)\cdot i=13+10\cdot i.$$

Es ist also so wie immer: die Addition ist so einfach wie möglich. Sie müssen nur die ersten Einträge addieren und die zweiten Einträge addieren. Die Multiplikation ist geringfügig anspruchsvoller. Es gibt aber zwei Wege die Multiplikation durchzuführen. Sie können die Definition der Multiplikation benutzen:

$$(5+7\cdot i)\cdot(8+3\cdot i)=(5\cdot 8-7\cdot 3)+(5\cdot 3+7\cdot 8)\cdot i=19+71\cdot i.$$

Oder das Distributivgesetz:

$$(5+7\cdot i)\cdot(8+3\cdot i)=5\cdot 8+5\cdot 3\cdot i+7\cdot 8\cdot i+7\cdot 3\cdot\underbrace{i^2}_{=-1}=40-21+15\cdot i+56\cdot i=19+71\cdot i.$$

Definition 3.1.7. Für jedes $z=a+b\cdot i\in\mathbb{C}$ nennen wir a den *Realteil* von z, und b den *Imaginärteil* von z. Den Realteil von z bezeichnen wir mit $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil von z mit $\mathrm{Im}(z)$.
Weiter definieren wir die zu z *komplex konjugierte Zahl* $\overline{z}=a-b\cdot i$.

Für jedes $z\in\mathbb{C}$ ist somit $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$, $z=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\cdot i$ und $\overline{z}=\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z)\cdot i$.

Lemma 3.1.8. *Für jedes $z\in\mathbb{C}$ gilt*

(a) $z\cdot\overline{z}=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$ *ist eine nicht-negative reelle Zahl. Ist $z\neq 0$, so ist $z\cdot\overline{z}>0$.*

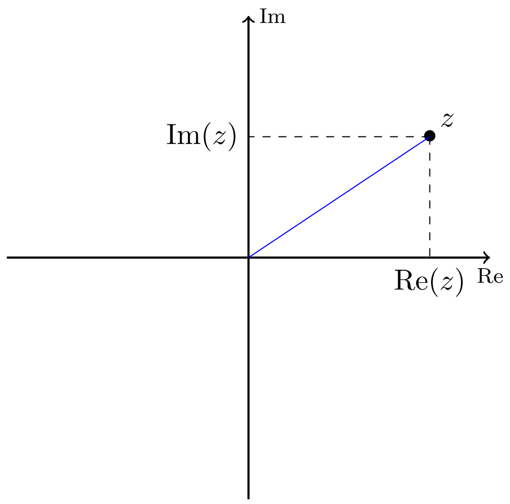
(b) Für $z\neq 0$ ist $z^{-1}=\overline{z}\cdot(z\cdot\overline{z})^{-1}$.

Beweis. Die erste Gleichung kann man schnell nachrechnen. Die Aussage aus (b) folgt dann sofort aus Bemerkung 3.1.5. □

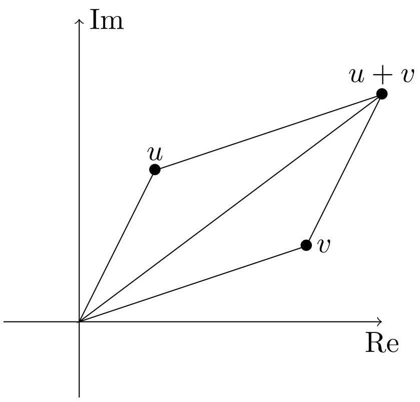
Bemerkung 3.1.9. Wir möchten die komplexen Zahlen geometrisch deuten. Dazu stellen wir fest, dass eine komplexe Zahl z eindeutig durch die zwei reellen Zahlen $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ gegeben ist. Ein Paar von reellen Zahlen kennen wir bereits als Punkte in einem Koordinatensystem. Damit können wir die komplexen Zahlen durch die (bijektive) Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$$

als Ebene darstellen; wir sprechen auch von der *Gauß'schen Zahlenebene*. Beachten Sie, dass das wunderbar unsere Anschauung der reellen Zahlen als Zahlengerade erweitert!



Damit können wir nun die komplexen Zahlen auch geometrisch studieren. Wir können z.B. sinnvoll den Abstand einer komplexen Zahl z zum Nullpunkt definieren. Wenn wir diesen Abstand $|z|$ nennen, dann ist mit dem Satz von Pythagoras $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ – also ist der Abstand von z zum Nullpunkt gleich $\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.



Ist $u = a + b \cdot i$ und $v = c + d \cdot i$, dann ist $u + v = (a + c) + (b + d) \cdot i$. Damit ist $u+v$ gegeben durch den Punkt mit den Koordinaten $(a + c, b + d)$. Dieser Punkt entspricht genau dem vierten Punkt des Parallelogramms mit den Punkten $(0, 0), (a, b), (c, d)$.

Bemerkung 3.1.10. Weiter stellen wir fest, dass $\overline{z}$ genau die Zahl ist, die wir erhalten, wenn wir z an der reellen Achse spiegeln. Auch die Multiplikation mit -1 lässt sich geometrisch deuten. Die Zahl $-z$ erhalten wir, wenn wir z um 180° um den Nullpunkt drehen.

Definition 3.1.11. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den *Betrag* von z als $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \overset{3.1.8}{=} \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ (das ist genau der Abstand von z zum Nullpunkt).

Beachten Sie, dass wir für eine reelle Zahl a haben: $|a| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = \max\{a, -a\}$. Damit stimmt dieser Betrag auf $\mathbb{R}$ mit dem bekannten Betrag überein. Wir dürfen also ruhigen Gewissens die selbe Notation für beide Beträge benutzen.

Satz 3.1.12. *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\overline{(\overline{z})} = z$

(b) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$

(c) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$

(d) $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z)$ *und* $z - \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i$.

Beweis. Das kann man alles schnell nachrechnen, oder sich geometrisch überlegen. Z.B. folgt (a) aus der Tatsache, dass zweimal an der selben Achse zu spiegeln nichts verändert. □

Satz 3.1.13. *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $|z| \geq 0$, *und* $|z| = 0 \iff z = 0$

(b) $|\overline{z}| = |z|$

(c) $|w \cdot z| = |w| \cdot |z|$

(d) $|w + z| \leq |w| + |z|$

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage (c). Es ist

$$|w \cdot z|^2 = (w \cdot z) \cdot (\overline{w \cdot z}) \overset{3.1.12}{=} w \cdot z \cdot \overline{w} \cdot \overline{z} = (w \cdot \overline{w}) \cdot (z \cdot \overline{z}) = |w|^2 \cdot |z|^2.$$

Wurzelziehen (und beachten, dass der Betrag nie negativ ist) liefert uns Aussage (c). Alles andere folgt sofort aus der Geometrie der komplexen Zahlen. □

3.2 Reelle quadratische Gleichungen

In diesem kleinen Abschnitt betrachten wir noch einmal quadratische Gleichungen in den reellen Zahlen.

Proposition 3.2.1. *Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gibt genau zwei komplexe Zahlen z, mit $z^2 = a$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $a > 0$ ist und betrachten die Gleichungen $x^2 - a = 0$ und $x^2 + a = 0$. Im ersten Fall liefert die dritte binomische Formel $x^2 - a = (x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a})$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ so, dass $z^2 - a = 0$ ist, so ist entweder $z - \sqrt{a} = 0$ oder $z + \sqrt{a} = 0$ (vgl. Satz 2.1.7(c)). Es folgt

$$z^2 = a \iff z = \sqrt{a} \quad \text{oder} \quad z = -\sqrt{a}. \tag{3.3}$$

Als nächstes möchten wir $x^2 + a = 0$ lösen. Wieder mit der dritten binomischen Formel ist $x^2 + a = x^2 - a \cdot i^2 = (x - \sqrt{a} \cdot i) \cdot (x + \sqrt{a} \cdot i)$. Jetzt können wir genauso wie eben argumentieren, dass gilt

$$z^2 = -a \iff z = \sqrt{a} \cdot i \quad \text{oder} \quad z = -\sqrt{a} \cdot i. \tag{3.4}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

Bemerkung 3.2.2. Mit den Gleichungen (3.3) und (3.4) können wir nun mit Hilfe der komplexen Zahlen tatsächlich alle quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen. Weiter erhalten wir, dass eine quadratische Gleichung nicht mehr als zwei verschiedene Lösungen besitzt.

Beispiel 3.2.3. Wir betrachten noch einmal die Gleichung $x^2 + 3x + 3 = 0$

vom Anfang dieses Kapitels. Es ist

$$\begin{aligned}
& x^2+3x+3=0 \\
\iff & x^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff & \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=0 \\
\iff & \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=-\frac{3}{4} \\
\overset{(3.4)}{\iff} & x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\
\iff & x=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \quad \text{oder} \quad x=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i
\end{aligned}$$

Mit den komplexen Zahlen liefert uns quadratische Ergänzung (oder die pq-Formel) also wirklich alle Lösungen der Gleichung $x^2+3x+3=0$.

Es gilt noch viel mehr, was wir aber in dieser Vorlesung nicht beweisen können.

Theorem 3.2.4 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $d\in\mathbb{N}$, seien $a_0,\dots,a_{d-1}\in\mathbb{C}$ und sei x eine Variable. Dann gibt es komplexe Zahlen $z_1,z_2,\dots,z_d\in\mathbb{C}$, mit*

$$x^d+a_{d-1}\cdot x^{d-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0=(x-z_1)\cdot\ldots\cdot(x-z_d).$$

Bemerkung 3.2.5. Wir sagen dazu auch, dass das Polynom $x^d+a_{d-1}\cdot x^{d-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$ *über* $\mathbb{C}$ *in Linearfaktoren zerfällt.*
Beachten Sie, dass die Elemente $z_1,\dots,z_d$ nicht alle verschieden sein müssen. Sind etwa alle a_i's gleich Null, so ist $x^d=(x-0)^d$ und auch alle z_i's sind gleich Null.

Korollar 3.2.6. *Wir benutzen die Notation aus Theorem 3.2.4. Dann gilt*

$$x^d+a_{d-1}\cdot x^{d-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0=0 \iff x\in\{z_1,\dots,z_d\}.$$

Das Polynom $x^d+a_{d-1}\cdot x^{d-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$ hat also mindestens eine und höchstens d verschiedene Nullstellen.

Beweis. In einem Körper gilt, dass ein Produkt von Elementen nur dann gleich Null ist, wenn einer der Faktoren gleich Null ist. Nun folgt die Aussage sofort aus dem Fundamentalsatz der Algebra 3.2.4. □

Korollar 3.2.7. *Sei $w \in \mathbb{C}$ und $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es höchstens d verschiedene komplexe Zahlen z, mit $z^d = w$.*

Im nächsten Abschnitt werden wir einsehen, dass es für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *genau* d verschiedene komplexe Zahlen z gibt, mit $z^d = w$. Dazu müssen wir die Geometrie der Multiplikation studieren.

3.3 Polarkoordinaten

Bemerkung 3.3.1. Jede komplexe Zahl z lässt sich eindeutig durch die beiden reellen Zahlen $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ beschreiben. Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit komplexe Zahlen zu beschreiben. In der Gauß'schen Zahlenebene ist jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig bestimmt durch Ihren Abstand zur Null (den Betrag von z) und dem Winkel, den z mit der positiven reellen Achse (gegen den Uhrzeigersinn) einschließt.

Definition 3.3.2. Sei $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Der Winkel den z gegen den Uhrzeigersinn mit der positiven reellen Achse einschließt heißt das *Argument* von z und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet. Für jeden Winkel α bezeichnen wir mit $e(\alpha)$ die komplexe z Zahl, mit $|z| = 1$ und $\arg(z) = \alpha$.

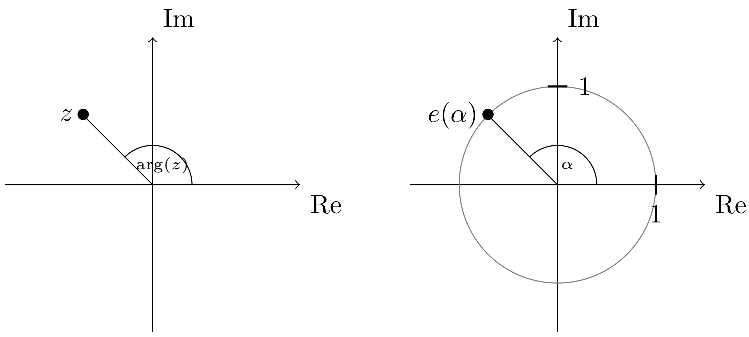


Abbildung 3.1: Grafische Definition von $\arg(z)$ und $e(\alpha)$.

Bemerkung 3.3.3. Wir messen Winkel stets im *Bogenmaß*. D.h. 360° (eine volle Umdrehung) entsprechen 2π (dem Umfang des Kreises mit Radius 1). Damit entsprechen 180° dem Bogenmaß π, 90° entsprechen $\frac{1}{2}\pi$, ... Allgemein gilt: Ist ein Winkel x in Grad gegeben, dann ist das entsprechende Bogenmaß gleich $x \cdot \frac{2\pi}{360}$.

Bemerkung 3.3.4. Sei α ein Winkel (wie immer im Bogenmaß). Da eine volle Umdrehung nichts verändert, gilt immer $e(\alpha) = e(\alpha + 2\pi)$. Da auch zwei, drei, vier, ... volle Umdrehungen nichts verändern, gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$e(\alpha) = e(\alpha + 2k\pi).$$

Insbesondere dürfen wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ stets $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ annehmen.

Beispiel 3.3.5. Da 1 auf der reellen Achse liegt, ist $\arg(1) = 0$. Es folgt $1 = e(0)$. Eine weitere komplexe Zahl mit Betrag 1 ist i. Natürlich schließt i mit der reellen Achse den Winkel 90°... äh ... $\frac{1}{2}\pi$ ein. Also ist $i = e(\frac{1}{2}\pi)$. Was ist nun $e(\frac{1}{4}\pi)$? Der Winkel $\frac{1}{4}\pi$ entspricht einem 45° Winkel. Damit ist $e(\frac{1}{4}\pi)$ genau so weit von der reellen Achse, wie von der imaginären Achse entfernt. Weiter müssen sowohl Real- als auch Imaginärteil positiv sein. Damit ist $e(\frac{1}{4}\pi) = r + r \cdot i$, mit einer reellen Zahl $r > 0$, so dass $|r + r \cdot i| = 1$ ist. Es muss also $1 = r^2 + r^2 = 2r^2$ gelten. Da $r > 0$ ist, folgt $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und somit $e(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$.

Bemerkung 3.3.6. Multiplizieren wir eine komplexe Zahl $z \neq 0$ mit einer reellen Zahl $r > 0$, so entspricht das einer Streckung (falls $r \geq 1$) bzw. einer Stauchung (falls $r < 1$). Insbesondere gilt stets

$$\arg(r \cdot z) = \arg(z).$$

Satz 3.3.7. *Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z = |z| \cdot e(\arg(z))$.*

Beweis. Nach der letzten Bemerkung haben z und $|z| \cdot e(\arg(z))$ das gleiche Argument. Da $|e(\arg(z))| = 1$ ist, haben z und $|z| \cdot e(\arg(z))$ auch den gleichen Betrag. Damit stellen Sie die gleiche komplexe Zahl dar. □

Definition 3.3.8. Die Darstellung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in der Form $z = r \cdot e(\alpha)$, für ein $0 < r \in \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, nennen wir die *Polarkoordinaten* von z.

Die Darstellung von z als $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \cdot i$ nennen wir *kartesische Darstellung.*

Es folgt ein Interlude zur Schulmathematik.

Definition 3.3.9. Sei K der Kreis im $\mathbb{R}^2$ um den Punkt $(0,0)$ mit Radius 1. Für jeden Winkel α sind die Werte $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ die reellen Zahlen, mit den Eigenschaften

(i) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in K$ und

(ii) $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ schließt mit der positiven ersten Achse den Winkel α ein (gegen den Uhrzeigersinn).

Der Wert $\cos(\alpha)$ heißt *Kosinus* von α und der Wert $\sin(\alpha)$ heißt *Sinus* von α.

Bemerkung 3.3.10. Aus dieser Definition folgt sofort, dass für alle Winkel α gilt

- $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ (wegen (i)), und
- $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \wedge \sin(\alpha) = \sin(\beta) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \alpha = \beta + 2\pi k.$

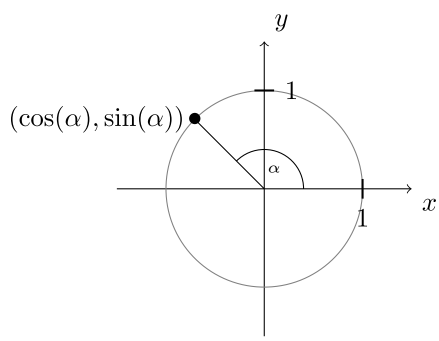


Abbildung 3.2: Grafische Definition von Kosinus und Sinus.

Moment mal! Das hab ich doch schonmal gesehen!

Satz 3.3.11. *Für jeden Winkel α ist $e(\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i$.*

Beweis. Die Definitionen von $e(\alpha)$ in der Gauß'schen Zahlenebene und dem Punkt $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ im $\mathbb{R}^2$ sind identisch. Wir müssen also nur den Punkt $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ als komplexe Zahl identifizieren und schon sind wir fertig. $\square$

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir.

Korollar 3.3.12. *Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt*

$$z = |z| \cdot (\cos(\arg(z)) + \sin(\arg(z)) \cdot i).$$

Wir kommen nun zur Geometrie der Multiplikation komplexer Zahlen. Mit elementarer Geometrie lässt sich zeigen, dass folgendes gilt.

Theorem 3.3.13. *Für alle Winkel α und β gilt $e(\alpha) \cdot e(\beta) = e(\alpha + \beta)$.*

Korollar 3.3.14. *Für alle Winkel α, β gelten die folgenden Rechenregeln:*

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$.

Beweis. Alles was wir tun müssen, ist zwei komplexe Zahlen zu multiplizieren.

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cdot i \stackrel{3.3.11}{=} e(\alpha + \beta) \stackrel{3.3.13}{=} e(\alpha) \cdot e(\beta) \\ \stackrel{3.3.11}{=} &(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot i) \cdot (\cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot i) \\ \stackrel{\text{Def.}}{=} &(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) + (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)) \cdot i. \end{aligned}$$

Jetzt vergleichen wir den Realteil und den Imaginärteil auf der linken und der rechten seite und schon sind wir fertig. $\square$

Bemerkung 3.3.15. Natürlich wird ein (Taschen)rechner in den Sie $\cos(0,2)$ eintippen, nicht anfangen Kreise zu zeichnen und Winkel zu messen. Wir werden die Funktionen Kosinus und Sinus später noch formal definieren und klären, wie deren Werte berechnet werden. Dabei werden wir eine fantastische Verknüpfung zur Exponentialfunktion e^x aufdecken. (Diese wird auch durch unsere Bezeichnung $e(\alpha)$ schon angedeutet.)

Korollar 3.3.16. *Seien $z = r \cdot e(\alpha)$ und $w = s \cdot e(\beta)$ zwei komplexe Zahlen in Polarkoordinaten. Dann gilt* *(a)* $z \cdot w = (r \cdot s) \cdot e(\alpha + \beta)$

(b) $z^{-1} = r^{-1} \cdot e(-\alpha) = r^{-1} \cdot e(2\pi - \alpha)$

(c) $z^n = r^n \cdot e(n\alpha)$

Beweis. Teil (a) folgt sofort aus Theorem 3.3.13. Für Teil (b) rechnen wir einfach

$$(r \cdot e(\alpha)) \cdot (r^{-1} \cdot e(-\alpha)) \overset{(a)}{=} (r \cdot r^{-1}) \cdot (\alpha - \alpha) = 1 \cdot e(0) \overset{3.3.5}{=} 1.$$

Teil (c) folgt per Induktion über n.
IA: $\boxed{n = 1:}$ Die Aussage ist offensichtlich richtig.
IS: $\boxed{n \mapsto n+1:}$ Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Dann gilt

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = (r^n \cdot e(n\alpha)) \cdot (r \cdot e(\alpha)) \overset{(a)}{=} r^{n+1} \cdot e(n\alpha + \alpha) = r^n \cdot e((n+1)\alpha).$$

Das war zu zeigen. □

Bemerkung 3.3.17. Die Geometrie der Multiplikation ergibt sich also durch folgende Regel: Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente (Winkel) addiert!

3.3.18. Das können wir nutzen um Wurzeln in den komplexen Zahlen zu ziehen. Fangen wir mit den einfachsten und wichtigsten Wurzeln an: Wir wollen die Gleichung $z^8 = 1$ lösen. Wir stellen fest, dass $|z^8| = |z|^8 = 1$ gelten muss. Damit ist $|z| = 1$. Die Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ sind also von der Form $e(\alpha)$. Da $1 = e(0)$ ist, muss also gelten $e(0) = 1 = e(\alpha)^8 = e(8\alpha)$. Der Winkel 8α muss also eine volle Umdrehung beschreiben. D.h. $8\alpha = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Weiter wissen wir, dass α – als Argument einer komplexen Zahl – in $[0, 2\pi)$ liegt. Es folgt, dass die Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ gegeben sind durch

$$e(\frac{2 \cdot 0 \cdot pi}{8}),\ e(\frac{2 \cdot 1 \cdot pi}{8}),\ e(\frac{2 \cdot 2 \cdot pi}{n}),\ \ldots,\ e(\frac{2 \cdot 7 \cdot pi}{8}).$$

Weiter sind diese komplexen Zahlen alle verschieden. Ersetzen wir überall 8 durch n gelten die Argumente ganz genauso . Damit folgt:

Satz 3.3.19. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$, mit $z^n = 1$. Diese sind gegeben durch die n-ten* Einheitswurzeln

$$\zeta_{n,k} = e\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot i, \text{ für } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Als Verallgemeinerung erhalten wir:

Satz 3.3.20. *Sei $w = s \cdot e(\beta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen z, mit $z^n = w$. Diese sind gegeben durch*

$$\sqrt[n]{s} \cdot e(\frac{\beta}{n}) \cdot \zeta_{n,k}, \text{ für } k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Beweis. Dass diese Elemente alle die Gleichung $z^n = w$ erfüllen folgt schnell aus Korollar 3.3.16. Noch mehr Lösungen kann es nach Korollar 3.2.6 nicht geben. $\square$

Kapitel 4

Kardinalitäten

$\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$

Bevor es nun endlich mit dem Hauptteil der Vorlesung los geht, werden wir in diesem Kapitel noch klären wie viele reelle Zahlen es gibt. Die naive Antwort ist „unendlich-viele". Wenn ich fragen würde wie viele natürliche Zahlen es gibt, wäre die Antwort ebenfalls „unendlich-viele". Das ist auch beides richtig, aber leider gilt *unendlich*$\neq$*unendlich*. Das werden wir im folgenden formalisieren.

4.1 Endliche Mengen

4.1.1. Angenommen ich hätte einen Haufen Bonbons dabei und ich möchte wissen ob es mehr Bonbons als Teilnehmer*innen der Vorlesung gibt – ohne zu Zählen. Dann könnte ich allen anwesenden Personen ein Bonbon in die Hand drücken: bleiben am Ende Bonbons übrig, dann hatte ich mehr Bonbons als es Teilnehmer*innen gibt (die könnte ich dann irgendwie auf die Teilnehmer*innen verteilen, wenn ich möchte); bekommen manche kein Bonbon ab, dann gibt es weniger Bonbons als Teilnehmer*innen; bekommt jede Person genau ein Bonbon und kein Bonbon bleibt übrig, dann hatte ich genau so viele Bonbons, wie es Teilnehmer*innen gab. Klar!
Die Zuordnung der Bonbons auf die Personen kann man als Abbildung betrachten. Dann können wir das einfache Beispiel oben übersetzen zu:

- Gibt es eine surjektive Abbildung von der Menge der Bonbons in die

Menge der Personen, dann gibt es mindestens so viele Bonbons wie Personen.

- Gibt es eine injektive Abbildung von der Menge der Bonbons in die Menge der Personen, dann gibt es höchstens so viele Bonbons wie Personen.

- Gibt es eine bijektive Abbildung von der Menge der Bonbons in die Menge der Personen, dann gibt es genau so viele Bonbons wie Personen.

Definition 4.1.2. Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow N$ gibt.

Bemerkung 4.1.3. Wir müssen noch kurz überprüfen ob diese Definition gut gewählt ist. Sprachlich macht es nämlich keinen unterschied, ob M und N gleichmächtig sind, oder ob N und M gleichmächtig sind. Daher sollte beides auch mathematisch keinen unterschied machen. Das ist zum Glück der Fall:
Sei $f : M \longrightarrow N$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : N \longrightarrow N$ (vgl. Satz 1.2.12). Damit ist aber f die Umkehrabbildung von f^{-1}. Es muss also (wieder mit Satz 1.2.12) auch die Abbildung $f^{-1} : N \longrightarrow M$ bijektiv sein.
Es ist also ganz egal ob wir fordern, dass es eine bijektive Abbildung von M nach N gibt, oder dass es eine bijektive Abbildung von N nach M gibt.

Slogan: gleichmächtig = gleich viele Elemente

Lemma 4.1.4. *Seien M, N, T Mengen. Sind M und N gleichmächtig, und N und T gleichmächtig, dann sind auch M und T gleichmächtig.*

Beweis. Seien also bijektive Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow T$ gegeben. Dann ist $g \circ f : M \longrightarrow T$ eine Abbildung. Da f und g bijektiv sind, gibt es Umkehrabbildungen $f^{-1} : N \longrightarrow M$ und $g^{-1} : T \longrightarrow N$. Damit existiert auch die Abbildung $f^{-1} \circ g^{-1} : T \longrightarrow M$. Für jedes $t \in T$ gilt nun

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(t) = g(f(f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(t)}_{\in N}))) = g(g^{-1}(t)) = t.$$

Genau so sieht man leicht ein, dass für jedes $m \in M$ die Gleichung

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(m) = m$$

gilt. Damit besitzt $g \circ f : M \longrightarrow T$ eine Umkehrabbildung (nämlich $f^{-1} \circ g^{-1}$) und ist daher bijektiv. Das bedeutet gerade, dass M und T gleichmächtig sind. $\square$

Definition 4.1.5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Menge M, die gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ ist, hat *Kardinalität* n. Wir bezeichnen das mit $|M| = n$. Die Kardinalität der leeren Menge $\emptyset$ setzen wir gleich 0 und bezeichnen das mit $|\emptyset| = 0$.
Eine Menge heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, mit $|M| = n$. Eine Menge, die nicht endlich ist nennen wir *unendlich*.

Slogan: Kardinalität = Anzahl der Elemente

Beispiel 4.1.6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{id} : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ bijektiv. Damit ist $|\{1, \ldots, n\}| = n$.

Die nächste Aussage sollte dank unserer Vorüberlegungen sehr einleuchtend sein. Daher verzichten wir auf den formalen Beweis.

Lemma 4.1.7. *Seien M und N endliche Mengen und sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) f ist injektiv $\Longrightarrow |M| \leq |N|$

(b) f ist surjektiv $\Longrightarrow |M| \geq |N|$

(c) f ist bijektiv $\Longrightarrow |M| = |N|$

4.2 Abzählbare Mengen

Wir versuchen jetzt einige der Resultate aus dem letzten Abschnitt auf Mengen auszuweiten, die unendlich sind.

Beispiel 4.2.1. Wir wollen ein paar Fragen klären. Erinnern Sie sich daran, dass zwei Mengen *gleichmächtig* heißen, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen gibt, und dass das nichts anderes aussagt, als dass die beiden Mengen *gleich viele Elemente* haben.

(a) Sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ gleichmächtig?

Die Antwort ist „Ja“! Denn die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad ; \quad n \mapsto n - 1$$

ist bijektiv. Beachte, dass die Umkehrabbildung gegeben ist durch $n \mapsto n + 1$.

(b) Sind die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \cup \{-1, -2, \ldots, -39\}$ gleichmächtig?

Wieder ist die Antwort „Ja“! Die bijektive Abbildung können Sie nach Teil (a) schnell erraten:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \ldots, -39\} \quad ; \quad n \mapsto n - 40$$

(c) Sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig?

Es ist kaum zu glauben, aber die Antwort ist auch hier „Ja“! Wir können eine bijektive Abbildung konstruieren, in dem wir die negativen Zahlen auf die geraden natürlichen Zahlen abbilden und die nicht-negativen Zahlen auf die ungeraden. Formal:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \quad ; \quad n \mapsto \begin{cases} 2n + 1 & \text{, falls } n \geq 0 \\ 2 \cdot (-n) & \text{, falls } n < 0 \end{cases}$$

Wir weisen wieder nach, dass f bijektiv ist. Man kann sich wieder eine Umkehrabbildung konstruieren, oder aber die Injektivität und Surjektivität einzeln nachweisen. Wir machen zur Abwechslung mal letzteres.

Zur Injektivität: Seien $n, k \in \mathbb{Z}$, mit $f(n) = f(k)$. Dann sind $f(n)$ und $f(k)$ entweder beide gerade oder beide ungerade. Die Definition der Abbildung f impliziert nun, dass entweder $n, k \geq 0$ oder $n, k < 0$ gilt. Damit erhalten wir

$$f(n) = f(k) \implies 2n + 1 = 2k + 1 \ \vee 2 \cdot (-n) = 2 \cdot (-k) \implies n = k.$$

Die Abbildung f ist also tatsächlich injektiv.

Zur Surjektivität: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Falls n gerade ist, ist $0 > (-\frac{n}{2}) \in \mathbb{Z}$, und es ist $f(-\frac{n}{2}) = 2 \cdot (-(-\frac{n}{2})) = n$. Falls n ungerade ist, ist $0 \leq \frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$, und es gilt $f(\frac{n-1}{2}) = 2 \cdot \frac{n-1}{2} + 1 = n$. Wir finden also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element aus $\mathbb{Z}$, das von f auf n abgebildet wird. Damit ist f auch surjektiv.

Zusammengenommen erhalten wir, dass f wie behauptet bijektiv ist.

Definition 4.2.2. Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt. Eine Menge, die abzählbar aber nicht endlich ist, heißt auch *abzählbar unendlich.*

Beispiel 4.2.3. Sei M irgendeine endliche Menge. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Erweitern wir bei dieser Abbildung den Wertebereich zu $\mathbb{N}$, ist die Abbildung immer noch injektiv (wir fügen zu dem Wertebereich nur Elemente hinzu, die kein Urbild besitzen). Es folgt, dass jede endliche Menge abzählbar ist.

Proposition 4.2.4. *Jede abzählbare Menge ist entweder endlich oder gleichmächtig zu* $\mathbb{N}$.

Beweis. Sei also M abzählbar unendlich. Dann gibt es eine injektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$. Damit ist aber die Abbildung $f : M \longrightarrow f(M)$ bijektiv (vgl. Bemerkung 1.2.11). Damit sind M und $f(M)$ gleichmächtig. Da $f(M) \subseteq \mathbb{N}$ ist, können wir durch Ersetzen von M durch $f(M)$ annehmen, dass M eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.
Nun sortieren wir die Elemente in M. Wir definieren induktiv

$$m_1 = \min M \qquad \text{und} \qquad m_{k+1} = \min M \setminus \{m_1, \ldots, m_k\} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da M nicht endlich ist, ist tatsächlich für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $m_k \in M$ definiert und es gilt

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots \tag{4.1}$$

Weiter gibt es für ein beliebiges $m \in \mathbb{M}$ nur endlich viele Elemente in M, die kleiner sind als m (da $M \subseteq \mathbb{N}$). Es kommt also auch jedes $m \in M$ in der Liste (4.1) vor. Damit gilt $M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$.

Das ist im wesentlichen alles, was wir zeigen mussten. Denn die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow M \quad ; \quad n \mapsto m_n$$

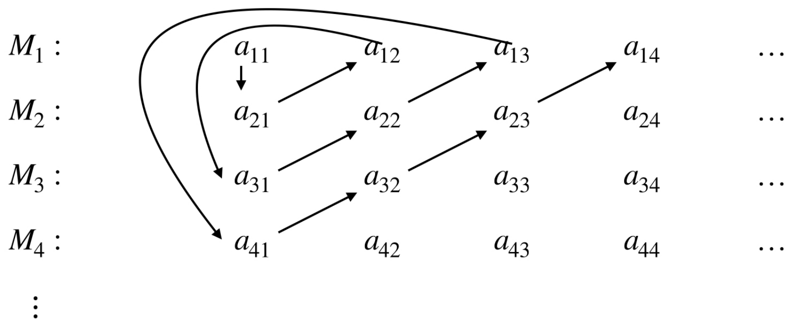
ist nun (offensichtlich) bijektiv.

OK, man sollte nie das Wort *offensichtlich* benutzen. Also nochmal langsam: Seien $n, k \in \mathbb{N}$, mit $f(n) = f(k)$. Dann ist $m_n = m_k$. Per Konstruktion ist das aber nur möglich, wenn $n = k$ ist. Damit ist f injektiv. Ist nun $m \in M$ belibeig, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, mit $m = m_k$. Es ist also $f(k) = m_k = m$. Damit ist f auch surjektiv. □

Bemerkung 4.2.5. Betrachten wir den Beweis in Ruhe, sehen wir, dass eine Menge abzählbar ist, wenn wir ihre Elemente in eine Liste eintragen können.

Satz 4.2.6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei M_n eine abzählbare Menge. Dann ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar.*

Beweis. Wir geben nur ein Idee an, wie man alle Elemente aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ auflisten kann. Da alle Mengen M_n abzählbar sind, können wir die Elemente von M_n auflisten als $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots$ Sollte M_n endlich sein, dann listen wir einfach ein Element unendlich oft auf (dadurch verändert sich die Menge nicht). Nun betrachten wir folgendes Schema



Dies gibt eine Reihenfolge an, in der wir alle Elemente aus $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ auflisten können – wir starten bei a_{11} und folgen den Pfeilen. Sollten wir auf ein Element treffen, dass wir schon gelistet haben, dann überspringen wir das einfach. Nach Bemerkung 4.2.5 ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ abzählbar. □

Korollar 4.2.7. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Es ist $\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} | k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{k}{n}|k \in \mathbb{Z}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{\frac{k}{n}|k \in \mathbb{Z}\}$ gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$ (finden Sie die bijektive Abbildung?). Da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, nach Beispiel 4.2.1(c), folgt, dass $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist. Mit Satz 4.2.6 folgt nun, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. $\square$

Bemerkung 4.2.8. Manchmal wird gesagt, dass alle abzählbar unendlichen Mengen die Kardinalität α_0 (Aleph Null) haben. Dies können wir wieder durch $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ abkürzen.

4.3 Überabzählbare Mengen

Eine Frage, die sich nach dem letzten Abschnitt aufdrängt ist nun: Gibt es auch unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind? Das klären wir nun.

Definition 4.3.1. Eine unendliche Menge, die nicht abzählbar ist, heißt *überabzählbar*.

4.3.2. Wir studieren im folgenden die Menge

$$C = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} | f \text{ ist Abbildung}\} \tag{4.2}$$

C ist also die Menge aller Abbildungen von den natürlichen Zahlen in die Menge $\{0,1\}$. Wir überlegen uns als erstes, dass diese Menge unendlich ist. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_k : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \quad ; \quad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = k \\ 0 & \text{, falls } n \neq k \end{cases}$$

Das sind alles unterschiedliche Abbildungen und somit unterschiedliche Elemente in C. Damit ist C tatsächlich unendlich.

Satz 4.3.3. *Die Menge C aus (4.2) ist überabzählbar.*

Beweis. Wenn C abzählbar wäre, so gäbe es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach C. Wir wolle nzeigen, dass es so eine Abbildung nicht geben kann. Sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow C$ eine Abbildung. Jedes $g(n)$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$. Zur Übersichtlichkeit setzen wir $g(n) = g_n : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$.
Wir wollen ein $f \in C$ konstruieren, das nicht von der Form g_n, $n \in \mathbb{N}$ ist. Das ist erstaunlicherweise recht einfach. Wir definieren

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \quad ; \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } g_n(n) = 1 \\ 1 & \text{, falls } g_n(n) = 0 \end{cases}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist damit $f(n) \neq g_n(n)$. Insbesondere ist $f \neq g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Anders formuliert heißt das nichts anderes, als dass $f \in C$ nicht im Bild $g(\mathbb{N})$ liegt. Die Abbildung g ist also nicht surjektiv.
Da g beliebig gewählt war, gibt es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach C. Erst recht gibt es also keine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach C. Damit kann C nicht abzählbar sein. □

Bemerkung 4.3.4. Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ eine Abbildung. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \overset{1.3.12}{<} 1$$

Die Menge $\{\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{2^k} | n \in \mathbb{N}\}$ ist somit nach oben und nach unten beschränkt. Die Definition der reellen Zahlen garantiert nun, dass diese Menge ein Supremum $a_f \in \mathbb{R}$ besitzt. Da alle Elemente der Menge in $[0,1)$ liegen, gilt sogar $a_f \in [0,1]$. Die Zuordnung $f \mapsto a_f$ beschreibt also eine Abbildung von C in das Intervall $[0,1]$.
Umgekehrt kann man auch zeigen, dass es für jedes $a \in [0,1]$ ein $f \in C$ gibt mit $a_f = a$. Damit kann man (nicht trivial) zeigen:

Satz 4.3.5. *Die Menge C aus (4.2) und das Intervall $[0,1]$ sind gleichmächtig. Insbesondere ist $[0,1]$ überabzählbar.*

Korollar 4.3.6. *$\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbar.*

Beweis. Da $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$, ist $\mathbb{R}$ nicht kleiner als $[0,1]$. Damit kann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein.
Wäre $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ abzählbar, so wäre auch die Vereinigung $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ abzählbar. Das ist nicht der Fall! Damit kann $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht abzählbar sein. □

Slogan: Es gibt (viel) mehr irrationale reelle Zahlen, als rationale Zahlen.

Bemerkung 4.3.7. Es gilt sogar, dass $\mathbb{R}$ und $[0,1]$ gleichmächtig sind. Das sieht auf den ersten Blick überraschend aus, allerdings haben wir etwas ganz ähnliches schon eingesehen. Die Abbildung

$$f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad ; \quad (a,b) \mapsto a + b \cdot i$$

ist bijektiv. Stellen wir komplexe Zahlen in Polarkoordinaten dar, erhalten wir eine bijektive Abbildung

$$g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow (0, \infty \times [0, 2\pi) \quad z \mapsto (|z|, \arg(z)).$$

Da auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ bijektiv ist, folgt, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ und $(0,\infty) \times [0, 2\pi)$ gleichmächtig sind. Damit sieht es nun doch recht plausiebel aus, dass $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu einem Intervall ist.

Wir beenden das Kapitel mit zwei Bemerkungen.

Bemerkung 4.3.8. Der Beweis von Satz 4.3.3 lässt sich verallgemeinern zu folgender Aussage: Sei M eine Menge, dann gibt es keine bijektive Abbildung zwischen M und der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$.
Die Potenzmenge ist also immer echt größer als die Menge selbst. Insbesondere gibt es keien „größte Unendlichkeit“.

Bemerkung 4.3.9. Man sagt auch, dass die Kardinalität von $\mathbb{R}$ gegeben ist durch $\mathfrak{c}$ (das Kontinuum). Da es tatsächlich mehr reelle Zahlen gibt als es natürliche Zahlen gibt, ist „$\mathfrak{c} > \aleph_0$“.

Kapitel 5

Folgen und Reihen

$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

5.1 Folgen

Definition 5.1.1. Sei M eine Menge. Eine *Folge* in M ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to M \quad ; \quad n \mapsto a_n$$

Dies entspricht (wie wir im letzten Kapitel gesehen haben) einer Auflistung der Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Daher schreiben wir eine Folge auch als $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ und kurz als $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ein Element a_n aus dieser Folge heißt *Folgenglied.*

Eine Folge in $\mathbb{R}$ heißt *reelle Folge*, eine Folge in $\mathbb{C}$ heißt *komplexe Folge.*

Bemerkung 5.1.2. Es ist wichtig zwischen der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Menge $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ zu unterscheiden. In der Folge gibt es eine Reihenfolge der Elemente (anders als in der Menge); Es ist klar, dass a_1 der erste Eintrag ist und a_{321} der 321-te. Weiter können in der Folge viele – auch alle – Folgenglieder gleich sein.

Wir werden fast nur reelle und komplexe Folgen betrachten. Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben wir nämlich ein sehr wichtiges Hilfsmittel für das Studium von Folgen zur Hand: den Betrag!

Beispiel 5.1.3. Hier sind ein paar Beispiele von Folgen:

(a) $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die konstante Folge $(1, 1, 1, \ldots)$.

(b) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

(c) Allgemeiner liefert jedes $z \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (z, z^2, z^3, \ldots)$.

(d) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ der natürlichen Zahlen.

(e) $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$.

(f) $(n + (-1)^n \cdot i)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $(1 - i, 2 + i, 3 - i, \ldots)$.

(g) $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, \ldots)$ ist eine Folge, deren Abbildungsvorschrift wir nicht kennen.

Bei einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir die Punkte (n, a_n) in ein Koordinatensystem einzeichnen um die Folge zu untersuchen. Das hilft der Anschauung, allerdings können so immer nur endlich viele (also fast keine) Folgenglieder betrachtet werden.
Wir starten mit ein paar Grundlegenden Definitionen.

Definition 5.1.4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge heißt

- *monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$.
- *streng monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} > a_n$.
- *monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \leq a_n$.
- *streng monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} < a_n$.
- *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.
- *streng monoton*, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beispiel 5.1.5. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend. Die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monotan fallend. Eine konstante reelle Folge ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.

Die Folgen $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n+99)_{n\in\mathbb{N}}$ (das sind die Folgen der natürlichen Zahlen, der geraden Zahlen und der natürlichen Zahlen ab 100) sind nicht völlig unabhängig von einander. Jede der beiden letzen Folgen ist „in der ersten Folge enthalten“. Dafür gibt es auch eine Definition.

Definition 5.1.6. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge M und sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die spezielle Teilfolge $(a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die dadurch entsteht, dass wir die ersten k Folgenglieder weglassen, bezeichnen wir kurz mit $(a_n)_{n>k}$.

Bemerkung 5.1.7. Da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gilt, ist auch für eine Folge in $\mathbb{N}$ definiert wann sie streng monoton heißt. Die strenge Monotonie der Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorgt dafür, dass in einer Teilfolge die Ordnung/Reihenfolge aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beibehalten wird.

Beispiel 5.1.8. Die Folgen $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n+99)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\geq 100}$ sind Teilfolgen von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge $(1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 11, \ldots)$ besteht zwar aus lauter verschiedenen natürlichen Zahlen, ist aber trotzdem keine Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, da die Reihenfolge aus $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beibehalten wird.

Wir kommen nun zu der wesentlichen Definition von Folgen, die uns noch lange begleiten wird.

Definition 5.1.9. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle (oder eine komplexe) Folge und sei $a \in \mathbb{R}$ (oder $a \in \mathbb{C}$). Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* a, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N \ : \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

D.h.: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, wenn es für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ erfüllen.
Ist dies der Fall, dann heißt a der *Grenzwert* oder *Limes* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wird mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet. Die Folge heißt dann *konvergent* (gegen a). Existiert kein a mit dieser Eigenschaft, dann heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent*.

Bemerkung 5.1.10. Sie können sich vorstellen, dass eine Folge gegen a konvergiert, wenn es immer mehr Folgenglieder gibt die nah an a liegen, als

Folgenglieder die nicht nah an a liegen. Dabei muss es egal sein, wie Sie Nähe definieren (ob $1,5$ oder $0,00000001$).
Es gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ genau dann wenn $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder nicht im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen.

Wieder sollten wir uns fragen, ob der Begriff *Grenzwert* sinnvoll definiert ist. Dass dies der Fall ist, wird durch den folgenden Satz bestätigt.

Satz 5.1.11. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle oder komplexe Folge. Dann besizt Sie genau einen Grenzwert.*

Beweis. Die Definition von *konvergent* sagt aus, dass es mindestens einen Grenzwert geben muss. Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte gibt und führen das auf einen Widerspruch. Seien diese beiden Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Zahlen a und b. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$. Dann gibt es ein $N_a \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_a$ gilt. Genau so gibt es ein $N_b \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_b$ gilt. Für $N = \max\{N_a, N_b\}$ gilt nun

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_n - b| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Daraus folgt aber, dass für alle $n \geq N$ (uns genügt tatsächlich ein einziges solches n) gilt

$$|a-b| = |(a-a_n) - (b-a_n)| \leq |a-a_n| + |b-a_n| < 2\varepsilon = |a-b|.$$

Das ist offensichtlich eine flasche Aussage. Damit muss unsere Annahme falsch gewesen sein. Es gibt also nicht zwei Grenzwerte der konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Bemerkung 5.1.12. Ist eine Folge konvergent gegen a, so ist auch jede Teilfolge konvergent gegen a: Wenn für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder a_n nicht in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen, dann ist das erst recht richtig wenn wir zu einer Teilfolge übergehen.

Beispiel 5.1.13.

- Für $a \in \mathbb{C}$ konvergiert die konstante Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ... na klar: a. Jedes Folgenglied a_n ist gleich a. Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $0 = |a-a| = |a-a_n| < \varepsilon$ erfüllt.

- Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent. Sie hat die konstanten Teilfolgen $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 1 konvergiert, und $(-1)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen -1 konvergiert. Mit Bemerkung 5.1.12 folgt sofort, dass $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

- Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls nicht konvergent. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $\varepsilon = 1/2$ enthält das Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ höchstens eine natürliche Zahl. Insbesondere enthält dieses Intervall nicht alle bis auf endlich viele natürliche Zahlen. Es folgt, dass a kein Grenzwert der Folge ist. Da $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, besitzt die Folge überhaupt keinen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

Wir haben im Beispiel gerade zwei verschiedene Gründe kennengelernt, warum eine Folge nicht konvergiert. Einmal, weil wir Teilfolgen finden, die gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren, und einmal, weil jedes Intervall nur endlich viele Folgenglieder enthält. Natürlich gibt es auch für das eine mathematsche Definition.

Definition 5.1.14. Eine reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$ fr alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beachte, dass $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (und nicht konvergiert) und $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist (und nicht konvergiert).

Satz 5.1.15. *Jede konvergente reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

Beweis. Die Idee ist ganz einfach: Alle bis auf endlich viele Folgenglieder müssen nah an $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ liegen. Diese können sich also nicht weit von a entfernen und sind somit beschränkt. Die endlich vielen Folgenglieder die übrig bleiben sind natürlich auch bechränkt. Das machen wir jetzt nochmal formal:
Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a - a_n| < 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Insbesondere ist $1 > |a_n - a| \geq |a_n| - |a|$ und somit

$$|a_n| < 1 + |a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Kombinieren wir das mit den trivialen Ungleichungen $|a_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \{1, \ldots, N-1\}$, erhalten wir

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich beschränkt. $\square$

Bemerkung 5.1.16. Wie wir schon eingesehen haben, gilt die Rückrichtung der gerade bewiesenen Aussage nicht, da es beschränkte Folgen gibt, die nicht konvergieren. Z.B. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Damit die Rückrichtung gilt, müssen wir eine weitere Bedingung an die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stellen.

Satz 5.1.17. *Jede monotone beschränkte reelle Folge konvergiert.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine relle Folge, die monoton und beschränkt ist. Wir nehmen an, dass die Folge monoton wachsend ist. Da auch die Menge $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, existiert $a = \sup\{a_n|n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass das der Grenzwert der Folge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Da a die kleinste obere Schranke von $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ ist, ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke mehr. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, mit

$$\underbrace{a}_{\text{obere Schranke}} \geq a_N > \underbrace{a-\varepsilon}_{\text{keine obere Schranke}}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt $a \geq a_n > a-\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Umstellen der Gleichung liefert $0 \leq a - a_n \leq \varepsilon$ und somit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist wie gewünscht a der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist zeigt man ganz genauso dass die Folge gegen $\inf\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert. $\square$

Beispiel 5.1.18. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ gilt, ist die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt. Es folgt, dass die Folge konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \inf\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Definition 5.1.19. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle (oder komplexe) Folge. Ein $a \in \mathbb{R}$ (oder $a \in \mathbb{C}$) heißt *Häufungspunkt der Folge*, wenn es eine Teilfoge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel 5.1.20. Wie wir in Beispiel 5.1.13 gesehen haben, sind die Werte 1 und (-1) Häufungspunkte von $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Allgemein folgt aus Bemerkung 5.1.12, dass jede konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt – nämlich ihren Grenzwert.

Lemma 5.1.21. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Die Aussage ist nicht besonders überraschend. Was überraschend ist, ist dass der Beweis ziemlich lang ist. Wir werden ihn hier (leider) nicht führen. □

Satz 5.1.22. *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungspunkt.*

Beweis. Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge nach Lemma 5.1.21. Diese Teilfolge ist notwendigerweise immer noch beschränkt und reell. Damit konvergiert sie nach Satz 5.1.17. Der Grenzwert dieser Teilfolge ist nun der ein Häufungspunkt der Folge. □

Wir kommen zu einigen Beispielen.

Beispiel 5.1.23. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Falls $|z| > 1$ ist die reelle Folge $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt nach Proposition 2.3.13. Aus $|z^n| = |z|^n$ folgt sofort, dass auch die komplexe Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Es folgt:

$$\text{die Folge } (z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist divergent, falls } |z| > 1.$$

Falls $|z| < 1$, ist die reelle Folge $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und (wieder nach Proposition 2.3.13) ist $\inf\{|z|^n | n \in \mathbb{N}\} = 0$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, mit $||z|^n - 0| = |z^n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Das besagt gerade

$$\text{die Folge } (z^n)_{n\in\mathbb{N}}\text{konvergiert gegen } 0, \text{ falls } |z| < 1.$$

Das ist eine schöne Fallunterscheidung. Was passiert nun, wenn $|z| = 1$? Hier sind, wie wir schon gesehen haben, beide Fälle möglich. Für $z = 1$ haben wir die konstante Folge $(1, 1, 1, \ldots)$ die konvergiert. Für $z = -1$ hingegen haben wir in Beispiel 5.1.13 gesehen, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Beispiel 5.1.24. Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (vgl. Übungsblatt 3, Aufgabe 2). Wir zeigen als nächstes, dass die Folge monoton wächst.

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\overset{3.\,\mathrm{BF}}{=} \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &\overset{2.3.12}{\geq} 1-(n+1)\cdot\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Da $0 < 1 - 1/n+1$, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\overset{(5.1)}{\geq} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\end{aligned}$$

Das besagt nichts anderes, als dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Nach Satz 5.1.17 konvergiert diese Folge.

Definition 5.1.25. Wir setzen

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

und nennen diese Zahl, die *Euler'sche Zahl* e.

5.2 Rechnen mit Grenzwerten

Bisher haben wir uns fast nur um reelle Folgen gekümmert. Der nächste Satz sagt, dass das eigentlich auch reicht.

Satz 5.2.1. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein komplexe Folge. Wir erhalten daraus die beiden reellen Folgen* $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$. *Es gilt: Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn* $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathrm{Im}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergieren. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(a_n)\right) + \left(\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}(a_n)\right)\cdot i.$$

Beweis. Wir schreiben $a_n = x_n + y_n \cdot i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ sind. Wir müssen zwei Richtungen beweisen.

$\Rightarrow$ Sei also $a = \lim_{n\to\infty} a_n = x + y \cdot i \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass dann auch $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so für alle $n \geq N$ gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon &> |a - a_n| = |(x + y \cdot i) - (x_n + y_n \cdot i)| = |(x - x_n) + (y - y_n) \cdot i| \\ &= \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist aber auch für jedes $n \geq N$:

$$\varepsilon^2 > |x - x_n|^2 + |y - y_n|^2$$

was sofort

$$\varepsilon > |x - x_n| \qquad \text{und} \qquad \varepsilon > |y - y_n|$$

impliziert. Damit gilt tatsächlich $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$.

$\Leftarrow$ Sei nun $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Jetzt müssen wir zeigen, dass daraus $\lim_{n\to\infty} a_n = x + y \cdot i$ gilt. Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x - x_n| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |y_n - y| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N. \tag{5.2}$$

Es folgt wie oben, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|(x + y \cdot i) - a_n| = \sqrt{|x - x_n|^2 + |y - y_n|^2} < \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon. \tag{5.3}$$

Das ist leider nicht das, was wir haben wollten. Oder doch? Wir nutzen aus, dass es für *jedes* $\varepsilon' > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass (5.2) und (5.3) gelten. Unser ε ist fest gewählt. Wir setzen jetzt $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$. Jetzt machen wir genau das gleiche nochmal mit ε ersetzt durch ε' und erhlaten, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$\begin{aligned}|(x + y \cdot i) - a_n| &= \sqrt{|x - x_n|^2 + |y - y_n|^2} \\ &< \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.\end{aligned}$$

Das ist jetzt tatsächlich genau das, was wir haben wollten. Denn nun gilt wie gewünscht $\lim_{a_n} = x + y \cdot i$.

$\square$

Dieser Satz kann als Spezialfall der folgenden Aussage angesehen werden.

Satz 5.2.2. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle oder komplexe Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt*

(a) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a + b$.

(b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

(c) Falls $b \neq 0$ ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$. Weiter konvergiert die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq N}$ gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis. Diesen Beweis haben wir in der Vorlesung nicht geführt. Nur für Ihr privates Interesse kommt hier der Beweis von Teil (b):
Wir beweisen nur Teil (b). Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist die Folge nach Satz 5.1.15 beschränkt. Es gibt also ein $A \in \mathbb{R}$, mit $|a_n| \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist auch $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|b|+A} > 0$. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a - a_n| < \varepsilon'$ und $|b - b_n| < \varepsilon'$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}|ab - a_nb_n| &= |ab - a_nb + a_nb - a_nb_n| = |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)| \\ &\leq |(a - a_n)b| + |a_n(b - b_n)| = |a - a_n| \cdot |b| + |a_n| \cdot |b - b_n| \\ &< |b| \cdot \varepsilon' + |a_n| \cdot \varepsilon' \leq |b| \cdot \varepsilon' + A \cdot \varepsilon' \\ &= \varepsilon' \cdot (|b| + A) = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \geq N$. Das bedeutet nichts anderes, als dass (a_nb_n) gegen ab konvergiert. □

Korollar 5.2.3. *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle oder komplexe Folge und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, dann konvergiert die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.*

Beweis. Wir müssen nur die konstante Folge $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Diese Folge konvergiert gegen λ. Wenden wir nun Satz 5.2.2(b) an, sind wir fertig. □

Beispiel 5.2.4. Wir betrachten die Folge $\left(\frac{3n^2-13n}{2n^2+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben die Folge etwas um. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{3n^2 - 13n}{2n^2 + 11} = \frac{\frac{1}{n^2}(3 - \frac{13}{n})}{\frac{1}{n^2}(2 + \frac{11}{n^2})} = \frac{3 - \frac{13}{n}}{2 + \frac{11}{n^2}}.$$

Wir wissen bereits, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist. Es folgt mit Satz 5.2.2 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0^2 = 0$. Weiter wissen wir nun

$$\lim_{n\to\infty} (3 - \frac{13}{n}) = 3 - 13 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 3 - 13 \cdot 0 = 3$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (2 + \frac{11}{n^2}) = 2 + 11 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + 11 \cdot 0 = 2 \neq 0.$$

Damit folgt nun endlich

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-13n}{2n^2+11}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}(3-\frac{13}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{11}{n^2})}=\frac{3}{2}.$$

Proposition 5.2.5. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente reelle Folgen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Dann gilt:*

(a) Ist $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, dann ist auch* $a \leq b$*.*

(b) Ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine weitere reelle Folge, mit* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*, und ist* $a = b$*, so konvergiert* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ebenfalls gegen* a*.*

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (b).Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt also „zwischen“ den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt

$$a-\varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a+\varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass $|c_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie behauptet gegen a. □

Bemerkung 5.2.6. Proposition 5.2.5(b) nennen wir Sandwich-Satz. Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird zwischen die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gequetscht. Wenn die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun beide einem Wert a beliebig nahe kommen, dann hat die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine andere Möglichkeit als ebenfalls dem Wert a nahe zu kommen.

Beispiel 5.2.7. Wir wissen schon, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ist. Damit folgt auch $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = (-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Wir betrachten nun die Folge $(\frac{1}{n}\cdot\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Da $|\sin(n)| \leq 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $|\frac{1}{n}\cdot\sin(n)| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das bedetet gerade

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\cdot\sin(n) \leq \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit dem Sandwich-Satz 5.2.5 muss nun auch $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin(n) = 0$ gelten.

Beispiel 5.2.8. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Wir wollen untersuchen, ob $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
1. Fall: $\boxed{a > 1}$ Dann ist auch $\sqrt[n]{a} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit können wir $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ schreiben für gewisse reelle Zahlen $h_n > 0$. Per Definition der n-ten Wurzel und mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung gilt $a = (1+h_n)^n \overset{2.3.12}{\leq} 1 + n \cdot h_n$. Umstellen liefert

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter ist $\lim_{n\to\infty} 0 = 0 = (a-1)\cdot 0 = (a-1)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n}$. Mit dem Sandwich-Satz 5.2.5 gilt nun $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Endlich folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1 + 0 = 1.$$

2. Fall: $\boxed{a < 1}$ In diesem Fal ist $\frac{1}{a} > 1$ und wir wissen, dass $(\sqrt[n]{1/a})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|\sqrt[n]{1/a} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{<1} \cdot \left|\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{a}}\right| < \left|\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{a}}\right| = |1 - 1/\sqrt[n]{a}-1| = |\sqrt[n]{1/a} - 1| < \varepsilon.$$

Es konvergiert also auch in diesem Fall $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1.
3. Fall: $\boxed{a = 1}$ Dann ist $\sqrt[n]{a} = 1$ für alle n und somit konvergiert auch hier die Folge gegen 1.
Wir halten fest: Für alle $a > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Wir betrachten noch ein Beispiel, wie man Grenzwerte bestimmen kann. Ist unsere Folge rekursiv gegeben, so ist es oft komplizierter zu zeigen, dass die Folge konvergiert, als den Grenzwert zu bestimmen.

Beispiel 5.2.9. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 2 \qquad \text{und } a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die ersten Folgenglieder sind also $(2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \ldots)$. Man sieht leicht per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq a_n \leq 2$.
IA: Für $n = 1$ ist $1 \leq 2 = a_1 \leq 2$ erfüllt.
IV: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $1 \leq a_n \leq 2$.
IS: Sei n wie in der IV. Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \overset{\text{IV}}{\leq} \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{2}{1}\right) = 2$$

und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \overset{\text{IV}}{\geq} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{2} \right) = 1.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Dann muss $1 \leq a \leq 2$ gelten. Insbesondere wäre $a \neq 0$. Da $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge ist, würde auch dies gegen a konvergieren. Mit den Rechenoperationen für den Grenzwert würde folgen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_n} \right) = \frac{1}{2} \cdot (a + \frac{2}{a}).$$

Umstellen der Gleichung führt zu $a^2 = 2$. Damit müsste $a = \sqrt{2}$ sein. Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also konvergiert, dann gegen den Grenzwert $\sqrt{2}$.

Es bleibt zu zeigen, **dass** die Folge tatsächlich konvergiert. Wir haben schon eingesehen, dass die Folge beschränkt ist. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass sie auch monoton fallend ist. Damit konvergiert sie tatsächlich – gegen $\sqrt{2}$.

5.2.10. Um die Konvergenz einer Folge mit der Definition herzuleiten, müssen wir den Grenzwert schon kennen. Das ist aber oft nicht der Fall und manchmal auch nicht möglich. Wir werden gleich sehen, dass die Folge $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist aber nicht bekannt, wie man den Grenzwert als explizite reelle Zahl schreiben kann. Der beste Weg um diese reelle Zahl aufzuschreiben ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$. Das hilft aber überhaupt nicht weiter, wenn wir die Definition der Konvergenz benutzen wollen.

Wir wollen also einen Weg finden Konvergenz zu definieren *ohne* den Grenzwert schon zu benutzen. Die Idee ist recht einfach: Wenn alle Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$, nah an einem Wert a liegen, dann liegen die Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$, auch nah beieinander. Das führt zu folgender Definition.

Definition 5.2.11. Eine reelle oder komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N \in \mathbb{N} \;:\; \forall n, k \geq N \;:\; |a_n - a_k| < \varepsilon.$$

D.h.: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, wenn es für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Folgenglieder a_n, a_k, mit $n, k \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_k| < \varepsilon$ gilt.

Theorem 5.2.12. *Eine reelle oder komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Den Beweis haben wir weggelassen. Für Ihr privates Interesse (man weiß ja nie...) finden Sie ihn hier im Kleingedruckten:
Wir müssen zwei Richtungen zeigen.

- $\Rightarrow$ Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und zeigen, dass die Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Den Grenzwert der Folge nennen wir wie immer a. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist auch $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, mit $|a_n - a| < \varepsilon'$ für alle $n \geq N$. Damit folgt für alle $n, k \geq N$

$$|a_n - a_k| = |a_n - a + a - a_k| \leq |a_n - a| + |a_k - a| < 2\varepsilon' = \varepsilon.$$

  Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge.

- $\Leftarrow$ Diese Richtung ist etwas komplizierter. Wir werden den Beweis nur skizzieren. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wir wollen zeigen, dass diese Folge konvergiert. Als erstes überlegt man sich, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist. Das macht man exakt so wie im Beweis von Satz 5.1.15. Dann gibt es aber eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 5.1.17. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen einen Wert a konvergiert. Wir müssen noch zeigen, dass dann schon die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Das machen wir jetzt.

  Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und setze $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon'$ für alle $n_k \geq N$, da $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Es gibt aber auch ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, mit $|a_{n_k} - a_n| < \varepsilon'$ für alle $n, n_k \geq \tilde{N}$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wählen wir nun $N' \in \mathbb{N}$ so groß, dass beide Bedingungen erfüllt sind für alle $n, k \geq N$, so erhalten wir

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon' = \varepsilon$$

  für alle $n \geq N$ und ein beliebiges $k \geq N$. Damit konvergiert die Cauchy-Folge tatsächlich.

$\square$

Beispiel 5.2.13. Wir betrachten zwei Beispiele:

(a) Wir zeigen, dass $({}^1\!/_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir brauchen also den Abstand von zwei beliebigen Folgengliedern. Seien also $n, k \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene natürliche Zahlen. Dann ist die eine Zahl größer als die

Andere. Wir können also ohne weiteres $n > k$ annehmen. Dann gilt $|{}^1\!/_k - {}^1\!/_n| = |{}^{(n-k)}\!/_{nk}| < {}^n\!/_{nk} = {}^1\!/_k$.

Der Abstand der Folgenglieder hängt also nur noch vom kleineren Index (in unserem Fall k) ab und wenn dieser sehr groß wird, wird der Abstand sehr klein. Das ist genau das, was wir von einer Cauchy-Folge verlangen. Denn: ist $\varepsilon > 0$ beliebig, dann wählen wir $N \in \mathbb{N}$, so dass $N \geq \varepsilon^{-1}$ gilt. Nach unseren Vorüberlegungen gilt damit für alle natürlichen Zahlen $n > k \geq N$

$$|\frac{1}{k} - \frac{1}{n}| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Die Folge $({}^1\!/_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also tatsächlich eine Cauchy-Folge.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = |\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}| \overset{3.\text{BF}}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Wir wissen auch, dass für große $n \in \mathbb{N}$ der Wert $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ beliebig klein wird. Ist die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ damit eine Cauchy-Folge?

Nein! Es genügt nicht sich nur zwei benachbarte Folgengleider anzuschauen. Es muss der Abstand von beliebigen Folgengliedern betrachtet werden und der ist bei der Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt.

Beispiel 5.2.14. Wir kommen zurück zu unserer Folge $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir möchten zeigen, dass es sich hierbei um eine Cauchy-Folge handelt. Wir müssen also den Abstand von zwei Folgengliedern bestimmen. Seien dazu $n, k \in \mathbb{N}$ beliebig, mit $n < k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\sum_{t=1}^{k} \frac{1}{t^3} - \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^3}| = |\sum_{t=n+1}^{k} \frac{1}{t^3}| \leq \sum_{t=n+1}^{k} \frac{1}{t^2} < \sum_{t=n+1}^{k} \frac{1}{t(t-1)} \\ = \sum_{t=n+1}^{k} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N > \varepsilon^{-1}$ gilt. Dann gilt nach (5.4) für alle $n, k \geq N$ die Ungleichung

$$|\sum_{t=1}^{k} \frac{1}{t^3} - \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t^3}| < \frac{1}{\min\{n,k\}} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Damit handelt es sich um eine Cauchy-Folge. Nach Theorem 5.2.12 konvergiert die Folge!

Mit diesen Folgen, die aus Summen gebastelt sind, werden wir uns später noch etwas genauer beschäftigen.

5.3 Bestimmte Divergenz

Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Wir hatten schon einige Beispiele von divergenten Folgen gesehen. Z.B. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind divergent. Einen Unterschied der beiden Folgen hatten wir schon ausgemacht: die erste ist beschränkt, die zweite nicht.
Auch die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da sie nicht beschränkt ist. Aber auch diese Folge verhält sich doch anders als $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sie springt immer zwischen negativen und positiven Zahlen hin und her. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ hingegen wächst ganz gleichmäßig immer weiter. Wir könnten sie auch dadurch beschreiben, dass sich die Folgenglieder „immer weiter dem Unendlichen annähern“. Das wollen wir nun mathematisch beschreiben.

Definition 5.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

(a) Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergiert gegen* ∞, wenn gilt

$$\forall K \in \mathbb{R} \ : \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N \ : \ a_n \geq K$$

D.h.: die Folge ist bestimmt divergent gegen ∞, wenn für jedes (noch so große) $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass alle Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$, größer als K sind. Ist dies der Fall, dann schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(b) Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergiert gegen* $-\infty$, wenn gilt

$$\forall K \in \mathbb{R} \ : \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \geq N \ : \ a_n \leq K$$

D.h.: die Folge ist bestimmt divergent gegen $-\infty$, wenn für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass alle Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$, kleiner als K sind. Ist dies der Fall, dann schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent*, wenn entweder $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ gilt. Das Symbol ∞ (bzw. $-\infty$) nennen wir auch den *uneigentlichen Grenzwert* der Folge.

Bemerkung 5.3.2. Eine Folge ist bestimmt divergent gegen ∞, wenn für jedes $K > 0$ nur endlich viele Folgenglieder nicht im Intervall (K, ∞) liegen. Offensichtlich ist jede bestimt divergente Folge unbeschränkt.

Beispiel 5.3.3. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞. Denn für jedes $K \in \mathbb{R}$ gibt es nur endlich viele natürliche Zahlen $\leq K$. Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dagegen nicht bestimmt divergent. Ist nämlich $K \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, mit $|K| < N$. Damit gilt nun für alle $n \geq N$:

$$(-1)^n n \begin{cases} < K & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ > K & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Es gibt also immer unendlich viele Folgenglieder, die kleiner als K sind und unendlich viele Folgenglieder, die größer als K sind.

Bemerkung 5.3.4. Genau wie bei der Konvergenz überlegt man sich schnell, dass jede Teilmenge einer bestimmt divergenten Folge wieder bestimmt divergent ist und den gleichen uneigentlichen Grenzwert besitzt.

Bestimmt divergente Folgen sind eng verknüpft mit Nullfolgen, also Folgen, die gegen 0 konvergieren.

Satz 5.3.5. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.*

(a) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$).

(b) Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), so existiert ein $N \in \mathbb{N}$, mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq N}$ konvergiert gegen 0.

Beweis. Beides folgt schnell aus der Definition. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $K \in \mathbb{R}$ beliebig. Falls $K \leq 0$ ist, gilt

$a_n > K$ nach Voraussetzung für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen also $K > 0$ an. Dann ist auch $\varepsilon = K^{-1} > 0$ und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, mit $a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir auf beiden Seiten der Ungleichung die Inversen, erhalten wir $\frac{1}{a_n} > \varepsilon^{-1} = K$ für alle $n \geq K$. Damit divergiert $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ wie gewünscht bestimmt gegen ∞. Wenn $a_n < 0$ ist, beweist man die Aussage ganz genau so.
Sei nun $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Per Definition sind damit alle bis auf endlich viele Folgenglieder größer als 0. Sagen wir $a_n > 0$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $K = \varepsilon^{-1} > 0$. Dann gibt es ein $\tilde{N} \geq N$, mit $a_n > K$ für alle $n \geq \tilde{N}$. Wieder nehmen wir Inverse und erhalten $|\frac{1}{a_n} - 0| = \frac{1}{a_n} < K^{-1} = \varepsilon$. Damit konvergiert die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq N}$ wie gewünscht gegen 0. Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ beweist man die Aussage ganz genau so. □

Bemerkung 5.3.6. Uns ist nun schon ein paar Mal das Symbol ∞ über den Weg gelaufen. Bei Intervallen: $(2, \infty)$, bei der Notation des Limes: $\lim_{n\to\infty}$, und nun bei der betimmten Divergenz. In allen Fällen steht es für eine „unendliche“ Größe – also für etwas was nicht nach oben beschränkt ist. Diese Unendliche Größe ist keine reelle Zahl. In allen Fällen ist es lediglich eine Notation. Nun wissen wir aber, dass wir Folgen addieren und multiplizieren können in dem wir immer die n-ten Folgenglieder addieren bzw. multiplizieren. Diese Operationen übertragen sich dann auch auf die Grenzwerte (wenn sie denn existieren). Da nun auch das Symbol ∞ einen Grenzwert darstellt, können wir damit Rechenregeln für die „unendliche Grösse“ ∞ aufstellen.

Proposition 5.3.7. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = c \in \mathbb{R}$. Es gilt*

(a) Die Folge $(a_n + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

(b) Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

(c) Die Folge $(a_n \cdot c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞ falls $c > 0$ und divergent gegen $-\infty$, falls $c < 0$.

(d) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞.

Beweis. Die einfachen Beweise lassen wir weg. □

Warnung 5.3.8. Wenn $c = 0$ ist können wir über das Verhalten von $(a_n \cdot c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Aussage treffen! Genauso wenig können wir allgemein bestimmen, wie sich die Folgen $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verhalten.

Beispiel 5.3.9.

- Es ist $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty}(n^2 \cdot \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

- Es ist $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty}(n\cdot\frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

- Sei a Ihre Lieblingszahl. Es ist $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty}(n \cdot \frac{a}{n}) = \lim_{n\to\infty} a = a$.

- Es ist $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Weiter ist $(n^2\cdot\frac{(-1)^n}{n})_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder konvergent noch bestimmt divergent.

Es können bei der Kombination $(a_n{\cdot}c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $c = 0$, also alle Möglichkeiten der Konvergenz/Divergenz auftreten. Gleiches gilt für die Folgen $(a_n{-}b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 5.3.10. Betrachten wir ∞ als Grenzwert von Folgen, so ergeben sich nach Proposition 5.3.7 folgende Rechenregeln: „$\infty + \infty = \infty$“, „$\infty + a = \infty$“ für alle $a \in \mathbb{R}$, „$\infty \cdot \infty = \infty$“, „$\infty \cdot c = \infty$“, falls $c > 0$ und „$\infty \cdot c = -\infty$“, falls $c < 0$.

5.4 Reihen

Ein kurzes Gedankenexperiment[1]: Ein Hase und eine Schildkröte machen ein Wettrennen über 100 Meter. Der Hase ist genau 10 Mal so schnell wie die Schildkröte. Damit es dem Hasen nicht zu langweilig wird, bekommt die Schildkröte 10 Meter Vorsprung. Wer gewinnt das Rennen?

[1] Das ist schon sehr alt und eines von den vier Paradoxa des Zenon. Im Original rennt die Schildkröte gegen Achilles.

Der Hase ist sich sicher, dass er gewinnt. Denn in der Zeit in der der Hase die 100 Meter läuft, legt die Schildkröte gerade einmal 10 Meter zurück. Ist also noch nicht im Ziel angekommen.
Allerdings ist sich auch die Schildkröte sicher, dass sie gewinnt. Denn wenn der Hase 10 Meter gelaufen ist, ist sie schon 1 Meter weiter. Wenn der Hase dann diesen einen Meter gelaufen ist, ist sie schon wieder 10cm weitergelaufen. Wenn der Hase diese 10cm gelaufen ist, ist sie schon wieder 1cm weiter. Auf diese Weise kann der Hase die Schildkröte niemals überholen.
Natürlich hat der Hase Recht. Die Schildkröte übersieht etwas erstaunliches: Es ist möglich immer mehr positive Werte zu addieren ohne dabei beliebig groß zu werden!
Dieses Phänomen ist uns schon ein paar Mal begegnet. Wir wissen, dass es Konstanten a und b gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < a$ und $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} < b$. Es sollte also auch die „unendliche Summe“ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ kleiner als a sein. Leider können wir nicht unendlich viele Elemente addieren. Wie wir die Notation der „unendlichen Summe“ trotzdem rechtfertigen können lernen wir in diesem Abschnitt.

Definition 5.4.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Die *n-te Partialsume* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Reihe* und wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichnet. Wenn diese Reihe gegen ein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann schreiben wir kurz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Wenn die Reihe nicht konvergiert, dann heißt sie *divergent*.

Bemerkung 5.4.2. Es ist oft praktisch den Laufindex nicht bei 1 starten zu lassen, sondern bei irgendeiner anderen Zahl aus $\mathbb{N}_0$. Für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir auch $\sum_{k=t}^{\infty} a_k$ als Reihe. Die zugehörige Folge ist dann $(a_n)_{n\geq t}$.

Beispiel 5.4.3. Sei $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Gleichung $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (vgl. Satz 1.3.12). Ist nun $|q| < 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$

nach Beispiel 5.1.23. Mit den Rechengesetzen für Grenzwerte (Satz 5.2.2) gilt nun für $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Diese Reihe heißt *geometrische Reihe.*

Im Folgenden beschreiben wir die Aussagen über Folgen für Reihen. Beachten Sie, dass Reihen auch Folgen sind. Es geht also mehr darum die Aussagen zu verstehen, als neue Aussagen kennenzulernen.

Bemerkung 5.4.4. Es gilt sogar noch mehr. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Wir setzen für den Moment $b_1 = a_1$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$. Dann ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle oder komplexe Folge. Betrachten wir die Partialsummen der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + \sum_{k=2}^{n} b_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (a_k - a_{k-1}) \overset{\text{Indexshift}}{=} a_n$$

Damit gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Reihe geschrieben. Diese Konstruktion ist nicht sonderlich hilfreich. Sie soll nur verdeutlichen, dass wir hier tatsächlich einfach nur nochmal Folgen studieren – sie sehen in diesem Abschnitt nur anders aus.

Die Rechenregeln für Grenzwerte lesen sich für Reihen so:

Satz 5.4.5. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt*

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergiert gegen $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

(b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot a_k$ konvergiert gegen $\lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis. Beide Aussagen folgen sofort aus Satz 5.2.2. Seien $(s_n)_{n\geq 0}$ und $(t_n)_{n\geq 0}$ die Folgen der Partialsummen von $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n$. Das beweist Aussage (a).
Weiter gilt mit Korollar 5.2.3 $\lim_{n\to\infty} \lambda \cdot s_n = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} s_n$. Das beweist Teil (b). $\square$

Wir erinnern daran, dass eine Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Das hatten wir schon benutzt um zu zeigen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konvergiert. Das funktioniert natürlich auch allgemein. Das Cauchy-Kriterium für Reihen ist also:

Satz 5.4.6. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit*

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{t} a_k| = |\sum_{k=t+1}^{n} a_k| < \varepsilon$$

für alle $n > t \geq N$.

Beweis. Das ist nichts anderes als die Aussage, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist (vgl. Theorem 5.2.12). □

Korollar 5.4.7. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Beweis. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent. Dann gibt es nach Satz 5.4.6 für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, mit

$$|\sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k| = |a_{n+1} - 0| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Das heißt nichts anderes als dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist. □

Wir wissen auch schon, dass jede monotone beschränkte reelle Folge konvergiert (Satz 5.1.17). Für Reihen ergibt sich damit

Satz 5.4.8. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.*

Beweis. Wenn alle $a_k \geq 0$ sind, dann ist die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Wenn wir jetzt noch verlangen, dass die Folge beschränkt ist, erhalten wir die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
Andererseits ist natürlich $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert (vgl. Satz 5.1.15). □

Leibniz-Kriterium 5.4.9. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine reelle Folge mit* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *monoton fallend und gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$.

Beweis. Wir skizzieren den Beweis nur sehr grob. Da alle a_n's positiv sind, wechselt sich das Vorzeichen der Elemente $(-1)^n \cdot a_n$ immer ab. Damit beschreiben die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$ einen „ZickZack- Kurs“:

$$s_0 \geq s_1 \leq s_2 \geq s_3 \leq s_4 \geq s_5 \leq \dots \tag{5.5}$$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fällt, ist $s_0 - s_2 = a_1 - a_2 \geq 0$ und $s_1 - s_3 = -a_2 + a_3 \leq 0$. Das gilt natürlich auch allgemein, für alle geraden n ist $s_n \geq s_{n+2}$ und für alle ungeraden n ist $s_n \leq s_{n+2}$. Damit ist $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.
Zusammen mit dem ZickZack-Kurs (5.5) erhalten wir, dass $s_0 \geq s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_1$ ist. Die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind also monoton und beschränkt! Damit konvergieren sie.
Der Abstand von s_n und s_{n+1} ist immer gegeben durch a_{n+1}. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, konvergiert auch der Abstand der beiden Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen Null. Ihre Grenzwerte müssen also übereinstimmen – sagen wir der Grenzwert beider Folgen ist $G \in \mathbb{R}$. Da jede Zahl entweder gerade oder ungerade ist, konvergiert damit auch die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen G. Das war zu zeigen.
Beachten Sie, dass wir wirklich alle Voraussetzungen an die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ benutzt haben. □

Beispiel 5.4.10. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist reell, besitzt nur positive Folgenglieder und konvergiert monoton gegen 0. Damit ist nach dem Leibniz-Kriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ konvergent.
Können wir das $(-1)^k$ auch weglassen? Leider nein! Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq (2^{n+1} - 2^n) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Es folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{4} \frac{1}{k} + \dots + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Damit sind die Partialsummen der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt. Mit Satz 5.4.8 folgt, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ nicht konvergiert.
Die divergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ heißt *harmonische Reihe*.

In unserem Beweis davon, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ konvergiert, haben wir ausgenutzt, dass für jedes $k\in\mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{1}{k^3}<\frac{1}{k^2}$ gilt. Dann haben wir gezeigt, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert und daraus auf die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ geschlossen. Das funktioniert natürlich auch allgemein.

Definition 5.4.11. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|$ konvergiert.

Bemerkung 5.4.12. Mit dem Cauchy-Kriterium 5.4.6 sieht man schnell, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist. Es ist hingegen nicht richtig, dass jede konvergente Reihe auch absolut konvergent ist, wie das Beispiel $((-1)^n\cdot\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt (vgl. Beispiel 5.4.10).

Bemerkung 5.4.13. Wir weisen noch einmal darauf hin, dass wir nicht tatsächlich unendlich viele Werte aufsummieren können. Wie immer ist im Umgang mit dem Symbol ∞ Fingerspitzengefühl erforderlich. Eine Sache, die bei Reihen im Allgemeinen verloren geht, ist die Kommutativität der „Summanden“. Die Reihenfolge der Folgenglieder ist also im Allgemeinen entscheidend für den Wert der Reihe. Wir haben zum Beispiel gesehen, dass die Reihe zur Folge $((-1)^n\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sortieren wir nun die Folgenglieder um und betrachten die Folge $(-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{2},-\frac{1}{5},-\frac{1}{7},\frac{1}{4},\ldots)$ in der immer zwei negative Zahlen hintereinander auftauchen, aber keine zwei positiven Zahlen hintereinander stehen. Dann haben wir zwar die gleichen Folgenglieder, die Partialsummen der letzten sind aber immer echt kleiner als die Partialsummen der ersten Folge. Das liegt daran, dass in jeder (endlichen) Partialsumme ungefähr doppelt so viele negative Werte, wie positive Werte stehen. Dadurch verhalten sich auch die zugehörigen Reihen anders.
Dieses Phänomen, kann nicht bei absolut konvergenten Reihen auftreten. Hier ist es tatsächlich ganz egal in welcher Reihenfolge wir die Folgenglieder aufsummieren. Die Beweise zu dieser vagen Bemerkung, lassen wir in dieser Veranstaltung weg.

Majoranten-Kriterium 5.4.14. *Sei $t\in\mathbb{N}_0$ und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge, mit $b_n\geq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$, so dass die Reihe $\sum_{k=t}^{\infty}b_k$ konvergiert.*

Ist nun $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe, mit* $|a_k| \leq b_k$ *für alle* $k \geq t$*, dann konvergiert* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut.*

Beweis. Da $\sum_{k=t}^{\infty} b_k$ konvergiert und alle b_k's nicht-negativ sind, ist die Folge der Partialsummen beschränkt (siehe Satz 5.4.8). Ist nun $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq t$, so sind auch die Partialsummen von $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt. Wieder aus Satz 5.4.8 folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. □

Beispiel 5.4.15. Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 < \frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2}$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert mit dem Majoranten-Kriterium auch $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^m}$.

Minoranten-Kriterium 5.4.16. *Sei* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine reelle Folge, mit* $b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*, so dass die Reihe* $\sum_{k=t}^{\infty} b_k$ *divergiert. Ist nun* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe, mit* $|a_k| \geq b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*, dann divergiert* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Beweis. Der Beweis funktioniert genau wie der Bewes des Majoranten-Kriteriums. □

Beispiel 5.4.17. Es ist $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ für alle $k \geq \mathbb{N}$. Da die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (siehe 5.4.10), divergiert mit dem Minoranten-Kriterium auch die Folge $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Es fehlt noch ein letztes großes Konvergenz-Kriterium für Reihen.

Quotienten-Kriterium 5.4.18. *Sei* $t \in \mathbb{N}_0$ *und sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine Reihe, mit* $a_k \neq 0$ *für alle* $k \geq t$*. Wenn es eine reelle Zahl* q *gibt, mit* $0 < q < 1$*, so dass*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \qquad \text{für alle } k \geq t.$$

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut.*
Falls andererseits $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ *für alle* $k \geq t$ *gilt, dann divergiert* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis. Sei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq t$. Weiter sei $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$ für alle $k \geq t$, wobei $q \in (0,1)$ liegt.

$$\boxed{\text{Wichtig: Für alle } k \text{ gilt die Abschätzung mit dem selben } q.}$$

Es folgt sofort, dass $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ für alle $k \geq t$. Insbesondere ist $|a_{t+1}| \leq q|a_t|$. Damit folgt aber $|a_{t+2}| \leq q|a_{t+1}| \leq q^2|a_t|$. Auf diese Weise folgt induktiv[2], dass gilt $|a_{t+r}| \leq q^r|a_t|$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$.

Die Folge

$$\sum_{r=0}^{\infty} q^r |a_t| = |a_t| \sum_{r=0}^{\infty} q^r \overset{5.4.3}{=} |a_t| \frac{1}{1-q}$$

konvergiert. Mit dem Majoranten-Kriterium 5.4.14 folgt, dass die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} |a_{t+r}| = \sum_{r=t}^{\infty} |a_r|$ konvergiert. Damit konvergiert aber natürlich auch

$$\sum_{r=0}^{\infty} |a_r| = \underbrace{\sum_{r=0}^{t-1} |a_r|}_{\in \mathbb{R}} + \sum_{r=t}^{\infty} |a_r|.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Nehmen wir nun an, dass

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \qquad \text{für alle } k \geq t.$$

Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge und die Reihe kann nicht konvergieren. $\square$

Wir kommen nun zu einem wichtigen Beispiel.

Beispiel 5.4.19. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut. Wir benutzen dafür das Quotienten-Kriterium:

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \frac{|z|}{k+1} < \frac{|z|}{2|z|} = \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } k \geq 2|z|.$$

[2] Das bedeutet, dass man es per Induktion beweisen kann

5.5 Produkt von Reihen

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen sind, dann wissen wir, dass auch $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ eine konvergente Reihe ist, mit

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Es ist also sehr einfach eine Reihe zu konstruieren, die gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert. Was ist, wenn wir $+$ durch $\cdot$ ersetzen wollen? Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit folgender Frage beschäftigen.

Frage. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, gibt es eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, die gegen $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)$ konvergiert?

Beispiel 5.5.1. Die geometrischen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ konvergieren gegen $\frac{1}{1-1/2} = 2$ und $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$. Weiter gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{1-1/6} = \frac{6}{5} \neq 2 \cdot \frac{3}{2}.$$

In Frage 5.5 können wir also nicht einfach nur $c_n = a_n \cdot b_n$ setzen.
Es ist sogar noch schlimmer: Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, mit positiven Folgengliedern. Damit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$. Quadrieren wir aber jeden der Summanden, erhalten wir die divergente harmonische Reihe. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert also.

Bemerkung 5.5.2. Seien wieder einmal $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Wir setzen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für die Folge der Partialsummen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für die Folge der Partialsummen von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann gilt nach Satz 5.2.2 und der Definition einer Reihe

$$\lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Wir sollten also $(s_n \cdot t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genauer betrachten. Es ist

$$s_n \cdot t_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(a_k \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k \cdot b_j.$$

Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k \cdot b_j\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert also gegen das Produkt der Werte der beiden Reihen. Da wir jede Folge auch als Reihe schreiben können (siehe Bemerkung 5.4.4), kann damit Frage 5.5 beantwortet werden. Das ist allerding nicht sehr befriedigend und fühlt sich etwas nach schummeln an. Es funktioniert zum Glück auch noch anders.

Definition 5.5.3. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Das *Cauchy-Produkt* der Reihen ist gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right).$$

Bemerkung 5.5.4. Die Glieder des Cauchy-Produktes sind also wieder (endliche!) Summen. Die ersten Einträge sind

$$a_0b_0, \quad a_0b_1 + a_1b_0, \quad a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots$$

Für den k-ten Eintrag summieren wir also alle Elemente a_ib_j auf, für die $i + j = k$ gilt.

Unter einer Zusatzanforderung an die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ können wir auch mit dem Cauchy-Produkt die Frage 5.5 beantworten.

Theorem 5.5.5. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut(!) konvergente Reihen. Dann erfüllt das Cauchy-Produkt der Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Beispiel 5.5.6. Wir betrachten nochmal die Reihen aus Beispiel 5.5.1 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$. Das Cauchy-Produkt dieser Reihen ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{3^{k-j}}\right).$$

Wir berechnen als erstes die endlichen Summen:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{3^{k-j}} &= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{3^k}\cdot 3^j = \frac{1}{3^k}\cdot\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^j\\ &\overset{1.3.12}{=} \frac{1}{3^k}\cdot\frac{1-(3/2)^{k+1}}{1-3/2} = \frac{3^{k+1}-2^{k+1}}{2^k\cdot 3^k} = \frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k}\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{3^{k-j}}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^k}-\frac{2}{3^k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{2^k}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{3^k}$$
$$=3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}-2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\overset{5.5.1}{=}3\cdot 2-2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Es ist also tatsächlich

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{3^{k-j}}\right)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\right)=2\cdot\frac{3}{2}=3$$

Bemerkung 5.5.7. Das Wort *absolut* darf im Theorem 5.5.5 nicht weggelassen werden. Als Gegenbeispiel kann wieder die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}$ herhalten. Diese konvergiert, aber sie ist nicht absolut konvergent. Das Cauchy-Produkt von dieser Reihe mit sich selbst ergibt jedoch eine divergente Reihe.

5.6 Die Exponentialfunktion

Wir haben im vorletzten Abschnitt gesehen, dass für jedes $z\in\mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ absolut konvergiert.

Definition 5.6.1. Für alle $z\in\mathbb{C}$ definieren wir $\exp(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\in\mathbb{C}$.

Jetzt wird es magisch!

Satz 5.6.2. *Es gilt* $\exp(1)=e$.

Beweis. Zur Erinnerung: Wir hatten den Grenzwert der Folge $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit e bezeichnet. Wir behaupten hier also, dass die Folgen $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Wert konvergieren. **Dass** beide Folgen konvergieren, wissen wir schon. Wir beweisen nun nacheinander, dass sowohl $e\le\exp(1)$ als auch $\exp(1)\le e$ ist. Daraus schließen wir dann, dass $e=\exp(1)$ sein muss.

Ein wichtiges Argument haben Sie bereits selbst gezeigt. Auf Blatt 2 Aufgabe 3 wurde gezeigt, dass für $n \geq k \geq 0$ die Ungleichung $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$ gilt. Damit folgt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{1.3.18}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \overset{\text{B2A3}}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Mit Proposition 5.2.5 erhalten wir sofort $e \leq \exp(1)$.

Es fehlt noch die Abschätzung $e \geq \exp(1)$. Dies ist wenig komplizierter. Zunächst wird wieder gerechnet. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Für alle $m \geq n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &\overset{1.3.18}{=} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \cdot \frac{1}{m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k! \cdot (m-k)! \cdot m^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(k-1))}{m^k} \cdot \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-(k-1)}{m} \cdot \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{m}\right) \cdot \frac{1}{k!} \\
&\overset{m \geq n}{\geq} \sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{k-1}{m}\right) \cdot \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Da n fest ist, gilt mit den üblichen Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 5.2.2)

$$e = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Wieder mit Proposition 5.2.5 folgt nun

$$e = \lim_{n\to\infty} e \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \exp(1).$$

Damit gilt tatsächlich $e = \exp(1)$. □

Bemerkung 5.6.3. Jetzt können wir endlich sagen, wie ein PC die Zahl e annähert: in dem sukzessive $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ für ein großes n berechnet wird.

n	1	2	3	4	5	6	7
$(1+{}^1/_n)^n$	2	2,25	2,37037...	2,44140...	2,48832...	2,52162...	2,54649...
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$	2	2,5	2,66666...	2,70833...	2,71666...	2,71805...	2,71825...

Bemerkung 5.6.4. Sie ahnen sicher schon, was wir hier nun konstruiert haben. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ erhalten wir genau eine komplexe Zahl $\exp(z)$ (der Grenzwert ist eindeutig!). Damit haben wir eine Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad z \mapsto \exp(z)$$

Diese Abbildung nennen wir *Exponentialfunktion*. Beachten Sie, dass für $z \in \mathbb{R}$, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ reell ist. Damit ist auch

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad z \mapsto \exp(z)$$

eine Abbildung, die wir ebenfalls Exponentialfunktion nennen.
Sie kennen diese Funktion wahrscheinlich als e^x. Dazu kommen wir gleich noch genauer. In dieser Form ist es aber nicht ganz klar, was eigentlich $e^{\sqrt{2}}$ sein soll. Der Wert $\exp(\sqrt{2})$ ist hingegen wunderbar definiert.

Die entscheidende Eigenschaft der Exponentialfunktion, ist ihre sogenannte *Funktionalgleichung*:

Theorem 5.6.5. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Beweis. Wir haben schon gelernt, wie wir $\exp(z)\cdot\exp(w)$ berechnen können. Mit dem Cauchy-Produkt! Wir berechnen also das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$. Die Koeffizienten des Cauchy-Produktes sind gegeben durch

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Diese berechnen wir mit der Binomischenformel 1.3.18:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{n! \cdot k! \cdot (n-k)!}}_{=\frac{1}{n!}\cdot\binom{n}{k}} z^k \cdot w^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot (z + w)^k.$$

Das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$ ist also gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (z + w)^k = \exp(z + w).$$

Das Theorem folgt nun sofort daraus, dass das Cauchy-Produkt von zwei Reihen gegen das Produkt der Grenzwerte der Reihen (in unserem Fall $\exp(z) \cdot \exp(w)$) konvergiert (vgl Theorem 5.5.5). □

Bemerkung 5.6.6. Diese Funktionalgleichung haben Sie schonmal gesehen. Erstens kennen Sie alle die Potenzgesetzt und wissen, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$ gilt. Hier können Sie natürlich auch 2 durch e ersetzen und Sie erhalten $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.
Sie haben die Funktionalgleichung aber auch in dieser Vorlesung schon gesehen – bei den Polarkoordinaten der komplexen Zahlen. Dort haben wir gesehen (Theorem 3.3.13), dass für alle Winkel (also für alle reellen Zahlen) α und β gilt: $e(\alpha + \beta) = e(\alpha) \cdot e(\beta)$.
Das alles ist kein Zufall! Wir werden noch einsehen, dass tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\exp(x \cdot i) = e^{x \cdot i} = e(x)$$

gelten. Genau genommen ist die erste Gleichung die Definition von $e^{x \cdot i}$ (siehe 5.6.9 weiter unten).

Bemerkung 5.6.7. Aus der Funktionalgleichung für exp folgt , dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!}}_{=0} = 1. \tag{5.6}$$

Insbesondere ist damit $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Genauso ist für $x \geq 0$ aus $\mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1. \tag{5.7}$$

Wenn $x \in \mathbb{R}$ nun kleiner als 0 ist, ist $-x \geq 0$ und es folgt

$$\exp(x) \overset{(5.6)}{=} \frac{1}{\exp(-x)} \overset{(5.7)}{>} 0.$$

Wir halten die wichtigsten Erkenntnisse in der folgenden Proposition fest.

Proposition 5.6.8. *Es gilt*

(a) $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(b) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$,

(c) $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\exp(n) = e^n$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Teile (a) und (c) haben wir gerade in Bemerkung 5.6.7 eingesehen. Teil (b) folgt sofort aus $\overline{z}^k = \overline{z^k}$ (vgl. Satz 3.1.12). Wir beweisen nun noch Teil (d). Dazu zeigen wir als erstes, dass $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Das machen wir natürlich per Induktion.
IA: $\boxed{n = 0:}$ Es ist $e^0 = 1$ und $\exp(0) = 1$ nach (5.6). Das zeigt den Induktionsanfang.
IV: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $\exp(n) = e^n$.
IS: $\boxed{n \mapsto n+1:}$ Sei n wie in der Induktionsvoraussetzung. Dann ist

$$\exp(n+1) \overset{5.6.5}{=} \exp(n) \cdot \exp(1) \overset{\text{IV}\&5.6.2}{=} e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Damit gilt $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit gilt aber auch für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\exp(-n) \overset{5.6}{=} \frac{1}{\exp(n)} = (e^n)^{-1} = e^{-n}.$$

Damit ist die Aussage auch für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ gezeigt. □

Notation 5.6.9. Die Funktionalgleichung von exp sagt uns, dass exp die Potenzgesetze erfüllt. Da auch noch $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt, setzen wir

$$e^z = \exp(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Damit sind nun auch Werte wie $e^{\sqrt{2}}$ definiert.

Kapitel 6

Stetige Funktionen

$\forall \delta > 0 \ : \ \exists \varepsilon >$
$0 \ : \ (|x-y| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \delta)$

Bisher haben wir hauptsächlich Abbildungen betrachtet, die eine abzählbare Menge als Definitionsbereich hatten. Beachten Sie, dass jede Folge eine Abbildung mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist. Wir werden in diesem Kapitel (einige) Abbildungen $f : D \to \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ studieren, deren Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$ aus überabzählbar vielen Elementen besteht.

Notation 6.0.1. Ab jetzt bezeichnet $\mathbb{K}$ einen der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir haben also stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter sei D eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{K}$.
Unsere Hauptobjekte für dieses Kapitel sind dann Abbildungen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto f(x).$$

In diesem Kontext werden Abbildungen meistens (auch bei uns) *Funktionen* genannt.

6.1 Grundbegriffe

Wir werden in diesem Abschnitt einige der Definitionen von Folgen (also von Abbildungen mit abzählbarem Definitionsbereich) für unsere Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ erweitern.

Beispiel 6.1.1. Ein paar Beispiele von Funktionen:

(a) Für jedes $c \in \mathbb{K}$ erhalten wir die *konstante Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto c$.

(b) Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto x^2 - x + 3$ ist ein *Polynom* vom *Grad* 2. Allgemeiner:

(c) Seien $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{K}$, mit $a_d \neq 0$, dann ist $f : D \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$ ein *Polynom* vom *Grad* d.

(d) Auch die Exponentialfunktion ist eine Funktion.

In allen diesen Beispielen kann mann $D = \mathbb{K}$ wählen. Das ist natürlich nicht immer der Fall. Wenn wir die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \frac{1}{x}$ betrachten, muss $0 \neq D$ gelten.

Aus gegebenen Funktionen können wir mit Hilfe der Multiplikation und der Addition, neue Funktionen erzeugen.

Definition 6.1.2. Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ Funktionen und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann erhalten wir

- Die *Summe* von f und g:

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto f(x) + g(x).$$

- Das *Produkt* von f und g:

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

- Das *skalare Vielfache* von f:

$$\lambda \cdot f : D \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto \lambda \cdot f(x).$$

- Falls g nicht die konstante Funktion ist, die alles auf 0 abbildet, erhalten wir auch den *Quaotienten* von f und g:

$$\frac{f}{g} : \{x \in D | g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 6.1.3. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

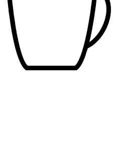
- *streng monoton wachsend*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- *monoton fallend*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *streng monoton fallend*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- *(streng) monoton*, falls f (streng) monoton wächst oder fällt.

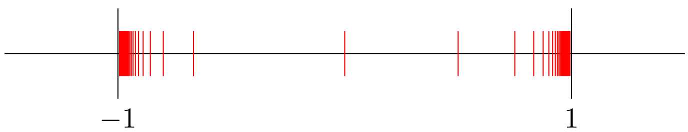
Beispiel 6.1.4. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$. Diese Funktion ist nicht monoton wachsend, da z.B. $-2 < 1$, aber $f(-2) = (-2)^2 = 4 > 1^2 = f(1)$ ist. Sie ist auch nicht monoton fallend, da z.B. $-1 < 2$, aber $f(-1) = (-1)^2 = 1 < 2^2 = f(2)$ ist.
Betrachten wir dieselbe Funktion auf einem anderen Definitionsbereich, ergibt sich ein anderes Bild. Die Funktion $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ ist streng monoton fallend. Denn: Für $x_1 < x_2$ in $(-\infty, 0]$ ist $|x_1| > |x_2|$ und somit auch $f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$.
Genauso sieht man, dass die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ streng monoton wächst. Bei der Betrachtung der Monotonie einer Funktion ist es also entscheidend, den Definitionsbereich zu berücksichtigen.
Um Schreibarbeit zu sparen sagen wir auch, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ *auf dem Intervall* $(-\infty, 0]$ streng monoton fällt, und *auf dem Intervall* $[0, \infty)$ streng monoton steigt.



Wir haben gerade gesehen, dass der Definitionsbereich einer Funktion über gewisse Eigenschaften der Funktion bestimmen kann. Er ist also wichtiger als man möglicherweise meint.

Bemerkung 6.1.5. Was war nochmal ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$? Es war ein Element $a \in \mathbb{K}$, das der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Es müssen also unendlich viele Folgenglieder „nah an a liegen". Dies können wir uns auch so vorstellen:

Wir betrachten die Menge $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}$. Elemente, die mehrfach als Folgenglieder vorkommen, werden dadurch nur einmal sichtbar. Für die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir so nur die Menge $\{-1, 1\}$. Diese Fälle wollen wir ab jetzt ausschließen. Daher nehmen wir an, dass *alle Folgenglieder verschieden voneinander sind*. Das ist zum Beispiel bei der Folge $({}^1\!/_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fall. Um es etwas interessanter zu machen betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn wir nun die Elemente der zugehörigen Menge $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ auf der Zahlengeraden einzeichnen, erhalten wir in etwa folgendes Bild (dort sind natürlich nicht alle Elemente eingezeichnet, sondern nur die ersten 140):



Die Häufungspunkte der Folge sind 1 (betrachten Sie die Folgenglieder mit einem geraden Index n) und -1 (betrachten Sie die Folgenglieder mit einem ungeraden Index n). Diese Häufungspunkte können wir auch der Skizze entnehmen, da 1 und -1 die Stellen sind, an denen sich die Folgenglieder „anhäufen". Aus diesem Beispiel ergibt sich folgende Definition.

Definition 6.1.6. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt von D*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gibt, die gegen a konvergiert und deren Folgenglieder paarweise verschieden sind.

Bemerkung 6.1.7. Paarweise verschieden ist die korrekte Beschreibung davon, dass kein Element mehrfach als Folgenglied vorkommt. Formal bedeutet es: $n \neq k \implies a_n \neq a_k$.

Lemma 6.1.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von D, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.*

Beweis. Wenn a ein Häufungspunkt ist, gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D die gegen a konvergiert und in der höchstens ein Folgenglied gleich a ist. Da einzelne Folgenglieder keinen Einfluss auf die Konvergenz haben, können wir dieses Folgenglied einfach streichen und wir erhalten eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen a konvergiert und deren Elemente alle verschieden sind von a.
Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Da alle Folgenglieder verschieden von a sind, ist diese Folge nicht konstant und enthält auch keine konstante Teilfolge. Streichen wir nun alle a_k's aus der Folge für die $a_m = a_k$, für ein $m < k$, gilt, dann erhalten wir eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der alle Elemente paarweise verschieden sind. Als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert diese Folge gegen a. Damit ist a ein Häufungspunkt von a. □

Bemerkung 6.1.9. Die Häufungspunkte von D sind also genau die Elemente aus dem Körper $\mathbb{K}$, die durch Elemente aus D beliebig nah angenähert werden können. Wichtig ist dabei, dass wir zum Annähern des Elementes a nur Elemente benutzen dürfen, die nicht gleich a sind.

Beispiel 6.1.10. Das wichtigste Beispiel erhalten wir, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und D ein Intervall ist. Die Häufungspunkte von $(-2, 1)$ sind genau die Elemente aus $[-2, 1]$. Z.B. ist $-2 = \lim_{n\to\infty}(-2 + \frac{1}{n})$ und alle Elemente der Folge $(-2 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ liegen in $(-2, 1)$ (und sind damit insbesondere verschieden von -2).
Allerdings ist -2 kein Häufungspunkt von $D = \{-2\} \cup (-1, 1)$, denn die Elemente aus $D \setminus \{-2\} = (-1, 1)$ liegen nicht beliebig nah an -2.

Definition 6.1.11. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und sei a ein Häufungspunkt von D. Wenn es ein $p \in \mathbb{K}$ gibt, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = p,$$

dann heißt p *Grenzwert von f an der Stelle a*. Wir schreiben in diesem Fall auch $p = \lim_{x\to a} f(x)$.

Bemerkung 6.1.12. Es ist wichtig, dass tatsächlich *jede* Folge die gegen a konvergiert betrachtet wird. Es genügt nicht, nur eine einzige zu finden. Weiter muss der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ nicht nur für jede dieser Folgen existieren; der Grenzwert muss auch für jede dieser Folgen identisch sein!

Beispiel 6.1.13. Wir betrachten die *stückweise definierte* Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ und jedes Element aus $\mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}$ (klar?). Nehmen wir $a = -3$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen -3 konvergiert und $a_n \neq -3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, mit $|-3 - a_n| < 3$ für alle $n \geq N$. Damit sind alle Folgenglieder a_n, mit $n \geq N$ negativ. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Der Grenzwert von f an der Stelle -3 ist somit 1 (beachten Sie, dass auch $f(-3) = 1$ ist).
Wir setzen als nächstes $a = 0$. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ besteht aus lauter verschiedenen Elementen und konvergiert gegen 0. Weiter gilt $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$. Betrachten wir hingegen die Nullfolge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ so gilt $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq -1$. Wir haben also zwei Folgen gefunden, die gegen $a = 0$ konvergieren, deren Bilder unter f aber unterschiedliche Grenzwerte haben. Damit besitzt f keinen Grenzwert an der Stelle 0.

Bemerkung 6.1.14. Solche stückweise definierten Funktionen tauchen oft auf. Wir haben zum Beispiel den Betrag als stückweise definierte Funktion eingeführt. Weiter lassen sich damit auf recht einfache Weise Beispiele und Gegenbeispiele für Grenzwerte von Folgen konstruieren. Betrachten wir etwa

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

so sehen wir genau wie gerade, dass der Grenzwert von f an der Stelle 0 existiert und gleich 0 ist (beachten Sie, dass $0 \neq f(0)$ gilt). Das liegt daran, dass $f(x)$ für x nah an 0 nichts über den Wert $f(0)$ aussagen.

Beispiel 6.1.15. Wir kommen nun zu einem Beispiel wo eine Funktion einen Grenzwert an einer Stelle besitzt an der sie nicht definiert ist. Wir betrachten

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Die 1 müssen wir aus dem Definitionsbereich nehmen, da wir nicht durch $1 - 1 = 0$ teilen dürfen. Natürlich ist 1 ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir zeigen nun, dass $\lim_{x \to 1} f(x)$ existiert.
Sei dazu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mit $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} f(a_n) &= \lim_{n \to \infty} \frac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} \overset{3.\mathrm{BF}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{(a_n - 1)(a_n + 1)}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n \to \infty} (a_n + 1) = \left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) + 1 = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Damit ist $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Proposition 6.1.16. *Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ zwei Funktionen und sei a ein Häufungspunkt von D. Wir nehmen an, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x) = p$ und $\lim_{x \to a} f(x) = q$ existieren. Dann gilt auch*

(a) $\lim_{x \to a} (f + g)(a) = p + q$.

(b) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(a) = p \cdot q$.

(c) Wenn $q \neq 0$, dann $\lim_{x \to a} (\frac{f}{g})(a) = \frac{p}{q}$.

Insbesondere existieren diese Grenzwerte.

Beweis. Das sollte Ihnen bekannt vorkommen. Wir benutzen natürlich die Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen aus Satz 5.2.2. Wir zeigen nur Teil (a), die anderen Teile folgen ganz genauso.
Sei also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} (f+g)(a_n) \overset{6.1.2}{=} \lim_{n \to \infty} (f(a_n) + g(a_n)) \overset{5.2.2}{=} \left(\lim_{n \to \infty} f(a_n)\right) + \left(\lim_{n \to \infty} g(a_n)\right) = p + q.$$

Da dies für jede solche Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt, sind wir fertig. $\square$

6.2 Stetigkeit

Meistens sind die Vokabeln in der Mathematik recht passend gewählt. Wir können uns also erst einmal überlegen, was *stetig* denn eigentlich bedeutet – es ist ein synonym für *durchgehend*. Wir studieren also durchgehende Funktionen. Dazu geben wir zunächst eine intuitive Definition von Stetigkeit, die wir danach Formalisieren wollen: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt f *stetig auf* I, wenn man den Graphen von f zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen. Der Graph soll also *durchgehend* gezeichnet werden können.
Das ist die anschauliche Definition (die nur für Funktionen auf den rellen Zahlen funktioniert, deren Wertebereich ein Intervall ist), aber können wir damit entscheiden ob

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(3x)e^{\sqrt{x^6+2}} - 5\cos(x) & \text{falls } x \leq 0 \\ -e^x - 4 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

stetig ist? Wir brauchen also wiedereinmal etwas Formalismus.

Definition 6.2.1. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann sagen wir f *ist stetig an der Stelle* a, falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Wir sagen in diesem Fall auch einfach nur f *ist stetig in* a. Ist f stetig in allen $a \in D$, dann heißt f *stetig auf* D.

Bemerkung 6.2.2. Die Stetigkeit von f in a sagt folgendes aus: Wenn sich die Werte $a_n \in D$ immer weiter a annähern, dann nähern sich die Werte $f(a_n)$ immer weiter dem Wert $f(a)$ an. Beachten Sie, dass das bedeutet, dass der lim und f vertauscht werden dürfen. Denn es gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a).$$

Da das für *jede* Folge gelten muss, die gegen a konvergiert, können wir dies für den Fall, dass $a \in D$ ein Häufungspunkt von D ist mit Hilfe des Grenzwertes von f an der Stelle a ausdrücken. Für einen Häufungspunkt $a \in D$ gilt dann, dass f genau dann stetig in a ist, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ist.

Wir hatten gesehen, dass eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder nicht im Intervall $a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen. Dass ein Element x im Intervall $a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegt, ist gleichbedeutend damit, dass $|a-x| < \varepsilon$ gilt. Dies lässt sich aber auch für komplexe Zahlen (in denen wir keine Intervalle definiert haben) anwenden. Benutzen wir diese Überlegungen in der Definition von Stetigkeit, erhalten wir eine alternative Beschreibung von Stetigkeit.

Proposition 6.2.3 ($\varepsilon\delta$-Kriterium)**.** *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in D$. Dann ist f genau dann stetig in a, wenn gilt*

$$\forall \delta > 0 \ : \ \exists \varepsilon > 0 \ : \ (|a-x| < \varepsilon \Longrightarrow |f(a) - f(x)| < \delta).$$

Beispiel 6.2.4. Wir betrachten ein paar Beispiele:

(a) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ x \mapsto \lambda$ eine konstante Funktion (es ist also $\lambda \in \mathbb{K}$). Dann ist f stetig auf D, denn: Sei $a \in D$ beliebig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda = \lambda = f(a)$$

.

(b) Als nächstes betrachten wir $D \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ x \mapsto x$. Sei wieder $a \in D$ beliebig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen a konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = a = f(a)$$

.

(c) Wir betrachten mal wieder eine stückweise definierte Funktion.

$$f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 39,95 & \text{falls } 0 < x \leq 6 \\ 49,95 & \text{falls } 6 < x \leq 12 \\ 59,95 & \text{falls } 12 < x \leq 24 \\ 84,95 & \text{falls } x > 25 \end{cases}$$

(das sind aktuelle monatliche Handykosten bei der T... für die Menge an verbrauchtem Datenvolumen in GB). Diese Funktion ist nicht stetig, denn: Für $(a_n) = (6 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt zwar $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 49,95 = 49,95 \neq f(6).$$

Das liegt daran, dass der Graph der Funktion dort springt (wenn Sie nur einen Hach mehr als 6GB verbrauchen zahlen Sie immer 10 € mehr, als wenn Sie genau 6GB verbrauchen).

Im letzten Beispiel haben wir eingesehen, dass die Funktion nicht stetig in 6 ist, in dem wir die 6 einmal durch kleinere und einmal durch größere Werte angenähert haben (vgl. auch das Beispiel 6.1.13). Diese Idee beschreiben wir noch einmal formal.

Definition 6.2.5. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Hüfungspunkt von D. Falls ein $p_- \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = p_-$, dann heißt p_- der *linksseitige Grenzwert von f an der Stelle a.*
Falls ein $p_+ \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = p_+$, dann heißt p_+ der *rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle a.*
Wenn diese Werte existieren schreiben wir für diese

$$p_- = \lim_{x\nearrow a} f(x) \qquad \text{und} \qquad p_+ = \lim_{x\searrow a} f(x).$$

Lemma 6.2.6. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Es existiert genau dann ein Grenzwert von f an der Stelle a, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle a existieren und beide Werte gleich sind. Der Grenzwert von f an der Stelle a ist dann*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x).$$

Satz 6.2.7. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$ ein Hüfungspunkt von D. Dann ist f genau dann stetig in a, wenn $\lim_{x\nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x\searrow a} f(x)$ existieren und $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x)$ gilt.*

Beweis. Das folgt sofort, wenn wir Bemerkung 6.2.2 und Lemma 6.2.6 zusammensetzen. □

Bemerkung 6.2.8. Drehen wir diese Aussage um erhalten wir zwei mögliche Szenarien, wann eine Funktion nicht stetig in a ist. Entweder existiert (mindestens) einer der Grenzwerte $\lim_{x\nearrow a} f(x)$ und $\lim_{x\searrow a} f(x)$ nicht, oder die Werte existieren beide, sind aber nicht gleich.

Achtung: Die letzte Aussage gilt nur für reelle Funktionen!

Beispiel 6.2.9. Eine Funktion in der sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existieren, aber diese Werte nicht gleich sind, haben wir schon bei den Handykosten in Beispiel 6.2.4(c) gesehen.
Wenn ein Grenzwert nicht existiert, dann gibt es dafür im wesentlichen zwei Möglichkeiten. Entweder etwas ist nicht beschränkt, oder es oszilliert sehr stark. Betrachten wir

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

dann sehen wir sofort, dass $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 0$ gilt. Für den linksseitigen Grenzwert nehmen wir wie so oft die Folge $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Diese konvergiert „von links" gegen Null. Allerdings ist die Folge $(f(-\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}} = (-n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent. Damit existiert der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle 0 nicht. Die Funktion ist also nicht stetig in 0.
Betrachten wir nun den Fall einer Funktion die nicht stetig ist aufgrund zu starker Oszillation (Schwankungen):

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Wenn x durch alle reellen Zahlen aus $(-\infty, -1]$ läuft, so läuft $\frac{1}{x}$ durch alle Zahlen aus dem Intervall $[-1, 0)$. Der gesamte unedliche Graph der Sinus Funktion wird also, wenn wir $\sin(1/x)$ betrachten, in das Intervall $[-1, 0)$ gequetscht. Dadurch kann der linksseitige Grenzwert von g an der Stelle 0 nicht existieren. Formal sehen wir das so ein: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n) = 1 \qquad \text{und} \qquad \sin(-\frac{1}{2}\pi + 2\pi n) = -1. \tag{6.2}$$

Die Folgen $(-\frac{1}{1/2\pi+2\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-\frac{1}{-1/2\pi+2\pi n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind Nullfolgen, deren Folgenglieder alle negativ sind. Mit (6.2) gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} g(-\frac{1}{1/2\pi + 2\pi n}) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} g(-\frac{1}{-1/2\pi + 2\pi n}).$$

Damit kann der linksseitige Grenzwert von g an der Stelle 0 nicht existieren.

6.3 Einige Beispiele stetiger Funktionen

Ein paar stetige Funktionen kennen wir bereits, wie z.B. die konstanten Funktionen und die Identität. Zum Glück kann man sich aus stetigen Funktionen schnell weitere stetige Funktionen basteln.

Satz 6.3.1. *Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : D \longrightarrow \mathbb{K}$ Funktionen, die beide stetig an der Stelle $a \in D$ sind. Dann gilt*

(a) $f + g$ ist stetig in a.

(b) $f \cdot g$ ist stetig in a.

(c) $\lambda \cdot f$ ist stetig in a, für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$.

(d) Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in a.

Beweis. Natürlich kommen hier wieder die Rechenregeln für Grenzwerte 5.2.2 ins Spiel. Wir beweisen nur Teil (b). Sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgendeine Folge in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(a).$$

Es folgt sofort

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (f \cdot g)(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot g(a_n) &\overset{5.2.2}{=} \Big(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\Big) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} g(a_n)\Big) \\ &= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)\end{aligned}$$

und $f \cdot g$ ist stetig in a. $\square$

Korollar 6.3.2. *Jedes Polynom ist stetig auf seinem Definitionsbereich.*

Beweis. Jedes Polynom lässt sich nur mit $+$ und $\cdot$ aus konstanten Funktionen und der Identitätsabbildung zusammensetzen. Da diese beide stetig sind nach Beispiel 6.2.4, sind auch alle Polynome stetig. $\square$

Satz 6.3.3. *Seien $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ reelle Zahlen und sei für jedes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ eine stetige Funktion $g_i : [a_i, a_{i+1}) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist die stückweise definierte Funktion*

$$f : [a_0, a_n) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} g_0(x) & \text{falls } a_0 \leq x < a_1 \\ g_1(x) & \text{falls } a_1 \leq x < a_2 \\ \vdots & \\ g_{n-1}(x) & \text{falls } a_{n-1} \leq x < a_n \end{cases}$$

genau dann stetig auf $[a_0, a_n)$, wenn für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ gilt

$$\lim_{x \to a_{i+1}} g_i(x) = g_{i+1}(a_{i+1}).$$

Beweis. Wir haben schon eingesehen, dass Stetigkeit lokal für einzelne Punkte definiert ist. Um uns die Schreibarbeit zu erleichtern betrachten wir nur den Fall $n = 2$ (den allgemeinen Fall, kann man daraus dann leicht per Induktion beweisen). Wir haben also eine Funktion f mit Definitionsbereich $[a_0, a_2)$. Für ein gewisses a_1 zwischen a_0 und a_2 gilt $f(x) = g_0(x)$, wenn $x < a_1$, und $f(x) = g_1(x)$, wenn $x \geq a_1$. Da g_0 und g_1 stetig sind, ist f an jedem Punkt aus $[a_0, a_2) \setminus \{a_1\}$ stetig, da sich f in der Nähe dieser Punkte genauso verhält, wie eine der stetigen Funktionen g_0 bzw. g_1.
Wir müssen also nur die Stetigkeit von f in a_1 überprüfen. Da a_1 natürlich ein Häufungspunkt von $[a_0, a_1)$ ist, ist f nach Satz 6.2.7 genau dann stetig in a_1, wenn $\lim_{x \searrow a_1} f(x) = \lim_{x \nearrow a_1} f(x)$ gilt. Es ist aber

$$\lim_{x \searrow a_1} f(x) = \lim_{x \searrow a_1} g_1(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow a_1} f(x) = \lim_{x \nearrow a_1} g_0(x).$$

Da g_0 und g_1 stetig sind, ist aber $\lim_{x \searrow a_1} g_1(x) = g_1(a_1)$ und $\lim_{x \nearrow a_1} g_0(x) = \lim_{x \to a_1} g_0(x)$. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Beispiel 6.3.4. Ist die Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x < 3 \\ 5x - 4 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$? Da die Funktionen $x \mapsto 2x - 1$ und $x \mapsto 5x - 4$ als Polynome überall stetig sind, müssen wir nur die Stelle $x = 3$ studieren. Es ist

$$\lim_{x \nearrow 3}(2x-1) = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq 11 = 5 \cdot 3 - 4.$$

Dasselbe Arbument zeigt, dass die Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x < 3 \\ 5x - 10 & \text{falls } x \geq 3 \end{cases}$$

stetig in 3 – und somit auf ganz $\mathbb{R}$ – ist.

Satz 6.3.5. *Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{K}$ Funktionen, mit $f(D) \subseteq E$. Ist f stetig auf D und ist g stetig auf E, dann ist $g \circ f$ stetig auf D.*

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die Annahme $f(D) \subseteq E$ tatsächlich garantiert, dass die Funktion $g \circ f$ existiert. Sei nun $a \in D$ beliebig und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge in D, die gegen a konvergiert. Da f stetig auf D ist, ist dann $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$.
Da g stetig auf E – und somit insbesondere in $f(a)$ – ist, folgt $\lim_{n \to \infty} g(f(a_n)) = g(f(a))$. Damit gilt tatsächlich für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, die Gleichung $\lim_{n \to \infty}(g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(a)$. Das heißt nichts anderes, als dass $g \circ f$ stetig in a ist für alle $a \in D$. □

Satz 6.3.6. *Die reellen Funktionen* exp, sin *und* cos *sind stetig.*

Beweis. Dass sin und cos stetig sind sieht man leicht geometrisch ein: Wird der Winkel nur leicht verändert, dann verändern sich auch die Größen sin und cos nur leicht. Das kann man natürlich auch beweisen, aber das werden wir hier nicht tun. Konzentrieren wir uns lieber auf die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}.$$

Damit erhalten wir für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$1 - |x| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(k+1)!} \leq \exp(x) \leq 1 + |x| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(k+1)!}.$$

Wir nehmen nun an, dass $|x| \leq 1$ ist. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{(k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \exp(1) - 1 = e - 1$. Setzen wir dies in obige Ungleichungen ein, erhalten wir

$$1 - |x| \cdot (e-1) \leq \exp(x) \leq 1 + |x| \cdot (e-1). \tag{6.3}$$

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgendeine reelle Folge, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann sind ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ alle a_n's in $(-1,1)$. Damit gilt mit (6.3) für alle a_n, mit $n \geq N$,

$$1 - |a_n| \cdot (e-1) \leq \exp(a_n) \leq 1 + |a_n| \cdot (e-1).$$

Da $\lim_{n\to\infty}(1 \pm |a_n| \cdot (e-1)) = 1 \pm (e-1) \cdot \lim_{n\to\infty} |a_n| = 1 \pm (e-1) \cdot 0 = 1$ ist, folgt aus dem Sandwichsatz 5.2.5

$$\lim_{n\to\infty} \exp(a_n) = 1 = \exp(0).$$

Damit ist exp stetig in 0.
Sei nun $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist $(a - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Weiter wissen wir, dass $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Damit folgt

$$1 = \lim_{n\to\infty} \exp(a - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(a)}{\exp(a_n)} = \frac{\exp(a)}{\lim_{n\to\infty} \exp(a_n)}.$$

Das impliziert sofort $\exp(a) = \lim_{n\to\infty} \exp(a_n)$. Damit ist exp stetig in a für alle $a \in \mathbb{R}$. Das war zu zeigen. □

Bemerkung 6.3.7. Auch die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist überall stetig, aber das zeigen wir hier nicht.

Bemerkung 6.3.8. Mit unserem bisherigen Wissen können wir schon sofort sagen, dass die Funktion

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \exp\left(\frac{\cos(4x - \pi)}{x^2 - 2}\right) - \sin(3x^3 + 2x - 1)$$

stetig ist. (Sie besteht nur aus Summe, Produkt und Hintereinanderausführung von Stetigen Funktionen und ist auf dem ganzen Intervall definiert.)

Definition 6.3.9. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig und sei $a \in \mathbb{K} \backslash D$ ein Häufungspunkt von D. Wenn $p = \lim_{x \to a} f(x)$ existiert, dann nennen wir die Funktion

$$\tilde{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{K} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in D \\ p & \text{falls } x = a \end{cases}$$

die *stetige Erweiterung von f auf $D \cup \{a\}$*.

Bemerkung 6.3.10. Die stetige Erweiterung einer Funktion ist natürlich stetig. Für alle Elemente aus D folgt das aus der Stetigkeit von f, und für das Element a folgt es per Definition.

Beispiel 6.3.11. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ ist als Quotient von stetigen Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wie in Beispiel 6.1.15 gesehen, ist $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Setzen wir also $f(1) = 2$ so erhalten wir eine Funktion, die stetig (und definiert) auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Beispiel 6.3.12. Wir hatten in der Vorlesung den Graphen der Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ gesehen. Dieser sah überall stetig aus, aber natürlich ist die Funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ nicht definiert für $x = 0$. Jetzt können wir das gesehene mathematisch Formulieren. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setzen wir $f(0) = 1$ so erhalten wir die stetige Erweiterung von f auf ganz $\mathbb{R}$.
Es gilt also $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Wir werden bald schöne Formeln für die Sinus Funktion kennen lernen. Mit unserem jetzigen Wissensstand kann man es aber natürlich auch begründen. Mit einer Skizze sieht man schnell ein, dass für alle $x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ die Ungleichungen $\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gelten. Stellen wir diese um erhalten wir, dass für alle diese x die Ungleichungen $1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$ gelten. Ist nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann liefert der Sandwich-Satz:

$$1 \geq \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} \geq \lim_{n \to \infty} \cos(a_n) = \cos(0) = 1$$

(In der letzten Gleichung haben wir benutzt, dass cos stetig ist.) Es folgt, dass $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$ ist – also $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Genauso zeigt man auch $\lim_{x \nearrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, was den Beweis schließt.

6.4 Reelle stetige Funktionen

Hier fassen wir einige Aussagen zusammen, die anschaulich vollkommen klar sein sollten. Wenn Sie aus 2 Metern Höhe einen Ball auf den Boden werfen (so, dass er tatsächlich auf dem Boden landet, dann war der Ball zu irgendeinem Zeitpunkt genau einen Meter über dem Boden. Das ist unabhängig davon richtig, ob Sie den Ball weit werfen, oder einfach fallen lassen. Wenn Sie das einsehen, dann sind Sie bestens gerüstet für alles was in diesem Abschnitt folgt.

Theorem 6.4.1 (Nullstellensatz von Bolzano)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Falls $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$), dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$, mit $f(x_0) = 0$.*

Beweis. Anschaulich ist das vollkommen klar. Wenn wir in einem zweidimensionalen Koordinatensystem einen Punkt oberhalb der ersten Achse mit einem Punkt unterhalb der ersten Achse verbinden ohne eine Lücke zu lassen, dann müssen wir zwangsläufig (mindestens einmal) die erste Achse kreuzen.
Der formale Beweis ist etwas aufwendiger: Wir nehmen an, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. Nun definieren wir rekursiv zwei Folgen

(1) Setze $a_1 = a$ und $b_1 = b$.

(2) Sind für ein $n \in \mathbb{N}$ die Werte a_n und b_n konstruiert, dann definieren wir $c_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + a_n)$.

(3) Wir setzen

- Falls $f(c_{n+1}) \leq 0$: $a_{n+1} = c_{n+1}$ und $b_{n+1} = b_n$.
- Falls $f(c_{n+1}) > 0$: $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_{n+1}$.

Der Wert c_{n+1} ist stets die Mitte des Intervalls $[a_n, b_n]$. Dadurch ist stets $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a,b]$. Insbesondere ist $f(c_{n+1})$ immer definiert, und wir erhalten tatsächlich zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$. Da c_{n+1} stets zwischen a_n und b_n liegt, ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Da beide Folgen in $[a,b]$ gebildet werden, sind sie auch beschränkt. Damit existieren die Werte

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Die Länge der Intervalle $[a_n, b_n]$ halbiert sich in jedem Schritt. D.h.: Es gilt $b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für wachsendes n konvergiert der Abstand von a_n und b_n also gegen Null. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Wir wissen, dass f stetig ist. Damit gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Allerdings ist per Konstruktion $f(a_n) \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(b_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ und $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Damit muss tatsächlich $f(x_0) = 0$ gelten. □

Definition 6.4.2. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion. Ein $x_0 \in D$, mit $f(x_0) = 0$ heißt *Nullstelle* von f.

Korollar 6.4.3. *Jedes reelle Polynom von ungeradem Grad hat eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $d \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $p(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad d. (Dann ist $a_d \neq 0$.) Wir nehmen an, dass $a_d > 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p(n) &= \lim_{n\to\infty} (a_d n^d + a_{d-1}n^{d-1} + \ldots + a_0)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^d(\underbrace{a_d}_{>0} + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^d}}_{\to 0}) = +\infty.\end{aligned}$$

Genauso sehen wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p(-n) &= \lim_{n\to\infty} (a_d(-n)^d + a_{d-1}(-n)^{d-1} + \ldots + a_0)\\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-n)^d}_{=-n^d}(\underbrace{a_d}_{>0} + \underbrace{\frac{a_{d-1}}{-n} + \ldots + \frac{a_0}{(-n)^d}}_{\to 0}) = -\infty.\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass d ungerade ist und daher $(-n)^d = (-1)^d n^d = -n^d$ gilt. Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $p(-n) < 0$ und $p(n) > 0$. Da jedes Polynom stetig ist, muss mit dem Nullstellensatz 6.4.1 ein $x_0 \in [-n, n]$ existieren, mit $p(x_0) = 0$.

Falls $a_d < 0$, funktioniert der Beweis genauso. □

Korollar 6.4.4 (Zwischenwertsatz)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ existiert ein $x_0 \in (a,b)$, mit $f(x_0) = c$.*

Beweis. Sei also c eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Ohne Einschränkung nehmen wir wieder an, dass $f(a) < c < f(b)$ gilt. Die Funktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto f(x) - c$ ist stetig und erfüllt $g(a) = f(a) - c < 0$ und $g(b) = f(b) - c > 0$. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano 6.4.1 gibt es daher ein $x_0 \in (a,b)$, mit $0 = g(x_0) = f(x_0) - c$. Damit ist $f(x_0) = c$, wie behauptet. □

Definition 6.4.5. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls die Menge $\{f(x)|x \in D\}$ ein Maximum besitzt, so nennen wir dies das *Maximum von f auf D* und setzen

$$\max_{x \in D} f(x) = \max\{f(x)|x \in D\}.$$

Genau so definieren das *Minimum von f auf D* als

$$\min_{x \in D} f(x) = \min\{f(x)|x \in D\}.$$

Theorem 6.4.6 (Satz von Minimum und Maximum)**.** *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existieren das Minimum und das Maximum von f auf $[a,b]$.*

Beweis. Den Beweis lassen wir weg. Die Idee ist folgende: Jedes Element aus $[a,b]$ wird auf eine reelle Zahl abgebildet. Da diese Abbildung stetig ist, kann die Funktion an keiner Stelle gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Also ist $f([a,b])$ beschränkt. Es existiert also auf jeden Fall das Supremum und das Infimum von $\{f(x)|x \in [a,b]\}$. Jetzt kann man wieder die Stetigkeit benutzen um zu zeigen, dass Supremum und Infimum bereits in der Menge liegen müssen. □

Beispiel 6.4.7. Wir können auf die Voraussetzungen an f wirklich nicht verzichten:

- Wir können $[a,b]$ nicht durch (a,b) ersetzen. Die Funktion $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig auf ganz $(0,1)$, aber natürlich besitzt diese Funktion kein Maximum auf $(0,1)$.

- Wir können auch nicht auf die Stetigkeit verzichten – selbst dann nicht, wenn unsere Funktion beschränkt ist. Für die Funktion

$$f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } -2 \le x \le -1 \\ x & \text{falls } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{falls } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ist zwar $\sup\{f(x) | x \in [-2,2]\} = 1$, aber es gibt kein $x \in [-2,2]$, mit $f(x) = 1$. Damit existiert das Maximum von f auf $[-2,2]$ nicht.

Korollar 6.4.8. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt für das Bild von $[a,b]$ unter f:*

$$f([a,b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x) \right].$$

Beweis. Wir haben gerade gesehen, dass die Werte $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $\max_{x\in[a,b]} f(x)$ existieren. Jedes Element zwischen diesen Werten liegt ebenfalls in $f([a,b])$, nach dem Zwischenwertsatz 6.4.4. Damit gilt die gewünschte Gleichheit. $\square$

6.5 uneigentliche Grenzwerte

Wenn eine Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist es natürlich interessant zu untersuchen, wie sich diese Funktion sehr weit weg von der Null verhält. Wir möchten also überprüfen, ob wir Aussagen über das verhalten von $f(x)$, wenn x gegen unendlich strebt, treffen können.

Definition 6.5.1. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass D nicht nach oben beschränkt ist. Wenn es ein $p \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = p,$$

dann heißt p der *Grenzwert von f für $x \to \infty$*. Wir schreiben dann $p = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

Wenn D nicht nach unten beschränkt ist, dann definieren wir genau so $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (wir müssen nur überall ∞ durch $-\infty$ ersetzen).

Beispiel 6.5.2.
- Die reelle Sinus-Funktion $x \mapsto \sin(x)$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to \infty$.
- Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{3x^2 - 2x + 7}{x^2 - 4}.$$

Der Definitionsbereich ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ (siehe Satz 5.3.5). Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2 - 2a_n + 7}{a_n^2 - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 2\frac{1}{a_n} + \frac{7}{a_n^2}}{1 - \frac{4}{a_n^2}} = 3.$$

In der Definition von oben brauchen wir Folgen, die bestimmt divergieren. Auch das können wir für Funktionen verallgemeinern.

Bemerkung 6.5.3. Was war nochmal ein Häufungspunkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$? Es war ein Element a für das eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\setminus$ existiert, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und paarweise verschiedenen Folgengliedern. Ist D nicht nach oben beschränkt, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und paarweise verschiedenen Folgengliedern. Wir können in diesem Fall also auch das Symbol ∞ als Häufungspunkt von D betrachten. Gleiches gilt für $-\infty$, wenn D nicht nach unten beschränkt ist. Da wir eigentlich mit dem Symbol ∞ sehr behutsam umgehen wollten, benutzen wir diese Sichtweise ausschließlich in der folgenden Definition.

Definition 6.5.4. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ein Häufungspunkt von D. Falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty \qquad (\text{bzw. } -\infty)$$

dann ist ∞ (bzw. $-\infty$) der *uneigentliche Grenzwert von f an der Stelle a.*

Beispiel 6.5.5. Wir sammeln ein paar Beispiele:

(a) Es ist $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ (vgl. Satz 5.3.5).

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$. Denn: Für $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Damit ist für jedes $x > 0$ auch $\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$. Da $\frac{x}{(n+1)!}$ den uneigentlichen Grenzwert ∞ an der Stelle ∞ besitzt, gilt dies auch für die Funktion $\frac{\exp(x)}{x^n}$.

Diese Aussage kann so gelesen werden, dass $\exp(x)$ schneller gegen unendlich strebt als alle Funktionen der Form x^n. Das ist das gemeine an exponentiellem Wachstum, mit dem wir uns ja leider in den letzten zwei Jahren viel beschäftigen mussten.

(c) Sei $p(x) = a_d x^d + \ldots + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad d. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } a_d > 0 \\ -\infty & \text{falls } a_d < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \infty & \text{falls } a_d > 0 \text{ und } d \text{ gerade} \\ -\infty & \text{falls } a_d > 0 \text{ und } d \text{ ungerade} \\ \infty & \text{falls } a_d < 0 \text{ und } d \text{ ungerade} \\ -\infty & \text{falls } a_d < 0 \text{ und } d \text{ gerade} \end{cases}.$$

Wie man das zeigt haben wir schon in Korollar 6.4.3 gesehen.

Zum Schluß kümmern wir uns noch um uneigentliche linksseitige (und rechtsseitige) Grenzwerte.

Definition 6.5.6. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D (hier sind ∞ und $-\infty$ als Häufungspunkte ausgeschloßen). Dann hat f den uneigentlichen linksseitigen Grenzwert ∞ (bzw. ∞) an der Stelle a, wenn gilt: Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty \qquad (\text{bzw. } -\infty)$$

Wir schreiben dafür $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$). Ersetzt man in dieser Definition $a_n < a$ durch $a_n > a$ erhält man die Definition vom uneigentlichen rechtsseitigen Grenzwert.

Beispiel 6.5.7. Wie wir mittlerweile sehr gut wissen, ist $\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$ und $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$.

Kapitel 7

Spezielle Funktionen

$e^{i\pi} + 1 = 0$

Die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$ ist streng monoton steigend. Damit gilt insbesondere, dass für $x_1 \neq x_2$ in $[0, \infty)$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ ist. Das sollte Ihnen bekannt vorkommen! Das bedeutet nichts anderes, als dass f injektiv ist. Wenn f aber injektiv ist, dann ist $f : [0, \infty) \longrightarrow f([0, \infty))$ bijektiv. Eine bijektive Funktion hat aber auch eine Umkehrfunktion! In diesem Fall ist die Umkehrfunktion schnell erraten. Es ist $f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$; $x \mapsto \sqrt{x}$.
Diese Art von Umkehrfunktionen schauen wir uns jetzt genauer an.

7.1 stetige Umkehrfunktionen

Theorem 7.1.1. *Sei D ein Intervall und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend (bzw. fallend). Dann ist die Funktion $f : D \longrightarrow f(D)$ bijektiv. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ von f ist dann ebenfalls streng monoton steignd (bzw. fallend).*
Ist f zusätzlich noch stetig auf D, dann ist auch f^{-1} stetig.

Bemerkung 7.1.2. Wenn D ein Intervall ist und f stetig, dann ist auch $f(D)$ ein Intervall.

Beweis von Theorem 7.1.1. Wir nehmen an, dass f streng monoton wächst. Der andere Fall funktioniert genau so.

Dass f streng monoton steigt bedeutet, dass für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt

$$x_1 > x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{7.1}$$

Die Implikation $\Rightarrow$ ist einfach nur die Definition. Wenn aber $f(x_1) > f(x_2)$, dann kann nicht $x_2 \geq x_1$ sein (wieder mit der Definition der strengen Monotonie). Damit gilt auch die andere Implikation.
Insbesondere folgt, dass f injektiv ist. Schränken wir nun den Wertebereich von f auf $f(D)$ ein, so erhalten wir eine bijektive Funktion. Damit existiert tatsächlich die Funktion $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$.
Sind nun $y_1, y_2 \in f(D)$, mit $y_1 > y_2$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in D$, mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Genauer gilt $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Nach (7.1) gilt nun

$$f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$$

und f^{-1} ist damit ebenfalls streng monoton steigend.
Den Beweis für die Stetigkeit von f^{-1}, wenn f stetig ist, führen wir in dieser Vorlesung nicht. □

Beispiel 7.1.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^n$ ist streng monoton steigend. Das folgt leicht per Induktion über n. Für $n = 1$ ist natürlich $x > y \Longrightarrow x^n > y^n$. Das ist der Induktionsanfang.
Wir nehmen nun an, dass die Aussage für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt (das ist die Induktionsvoraussetzung). Sind nun $x > y \geq 0$ gegeben, dann folgt nach IV $x^n > y^n$. Dann ist aber $x^{n+1} = x^n \cdot x > y^n \cdot y = y^{n+1}$. Damit ist auch der Induktionsschritt erledigt.
Für jedes $x \in [0, \infty)$ ist auch $x^n \in [0, \infty)$. Weiter existiert zu jedem $y \in [0, \infty)$ das Element $\sqrt[n]{y} \in [0, \infty)$. Dieses Element erfüllt $f(\sqrt[n]{y}) = (\sqrt[n]{y})^n = y$. Damit ist $f([0, \infty)) = [0\infty)$.
Als Polynom ist f natürlich stetig. Damit gibt es nach Theorem 7.1.1 eine **stetige** Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, die **streng monoton steigt**. Wie wir gesehen haben, ist dies die *n-te Wurzelfunktion*

$$f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) \quad ; \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Beispiel 7.1.4. Wir sammeln Informationen über die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- exp ist stetig (vgl. Satz 6.3.6).

- exp ist streng monoton steigend, denn: Für alle $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1$. Damit folg nun für reelle Zahlen $x_1 > x_2$:

$$\exp(x_1) = \exp(x_2 + (x_1 - x_2)) = \exp(x_2) \cdot \underbrace{\exp(x_1 - x_2)}_{>1} > \exp(x_2).$$

- Es ist $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, denn: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$. Damit ist $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$. Weiter wissen wir, dass $\exp(\mathbb{R})$ als stetiges Bild eines Intervalls, ein Intervall ist. Aus $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ folgt, dass $\exp(\mathbb{R})$ nicht nach oben beschränkt ist. Weiter folgt, dass es in $\exp(\mathbb{R})$ eine Folge gibt, die gegen 0 konvergiert ($(e^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$). Damit muss wie behauptet, $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gelten.

- Es folgt, dass es eine **stetige monoton steigende** Umkehrfunktion $\exp^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt.

Definition 7.1.5. Die Funktion $\exp^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ nennen wir den *natürlichen Logarithmus* und setzen $\exp^{-1} = \ln$.

Proposition 7.1.6. *Die* Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus *lautet*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

für alle $x, y \in (0, \infty)$.

Beweis. Dies folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Seien $x, y \in (0, \infty)$ beliebig. Die Zahl $\ln(x \cdot y)$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass $\exp(\ln(x \cdot y)) = x \cdot y$ gilt. Nun ist aber

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y.$$

Es muss also $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$ gelten. □

Bemerkung 7.1.7. Da $\exp(0) = 1$, ist $\ln(1) = 0$.
Da $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, ist $\ln(e^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
Allgemein haben wir bisher noch keine Abbildungsvorschrift kennengelernt, wie wir $\ln(x)$ tatsächlich berechnen können. Die Zahl $\ln(x)$ ist schlicht die reelle Zahl y, für die $\exp(y) = x$ gilt. Wir müssen also für festes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\exp(y) - x = 0$ lösen. Ein Verfahren, wie wir dies machen können liefert die Intervallhalbierung aus dem Beweis des Nullstellensatzes 6.4.1.

Beispiel 7.1.8. Wie könnten wir den Wert $2^{\sqrt{2}}$ definieren? Dazu überlegen wir uns zunächst, wie wir 2^2 beschreiben können. Das machen wir etwas allgemeiner.
Sei $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\exp(n \cdot \ln(a)) = \exp(\underbrace{\ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\exp(\ln(a)) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln(a))}_{n\text{-mal}} = \exp(\ln(a))^n = a^n.$$

Es macht also Sinn $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu definieren. Insbesondere sollte $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \cdot \ln(2)) = 2,665144\ldots$ gelten.

Definition 7.1.9. Sei $a > 0$ eine reelle Funktion. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$. Die Funktion

$$\pi_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto a^x$$

heißt *allgemeine Potenz zur Basis a*.

Satz 7.1.10. *Sei $a > 0$ eine reelle Zahl.*

(a) Die Funktion π_a ist stetig auf $\mathbb{R}$.

(b) Für $a < 1$ ist π_a streng monoton fallend und für $a > 1$ ist π_a streng monoton steigend.

(c) Für $a \neq 1$ ist $\pi_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ bijektiv.

Beweis. Da die Exponentialfunktion stetig ist, ist auch π_a stetig. Das zeigt (a).
Sei nun $a \in (0, 1)$. Da ln streng monoton steigt und $\ln(1) = 0$ ist, muss $\ln(a) < 0$ gelten. Sind nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, mit $x_1 > x_2$, dann gilt $x_1 \cdot \ln(a) < x_2 \cdot \ln(x_2)$. Da exp streng monoton steigt, folgt

$$\pi_a(x_1) = a^{x_1} = \exp(x_1 \cdot \ln(a)) < \exp(x_2 \cdot \ln(a)) = a^{x_2} = \pi_a(x_2).$$

Damit ist π_a streng monoton fallend.

Für $a \in (1, \infty)$ ist $\ln(a) > 0$. Das gleiche Argument wie eben zeigt nun, dass π_a in diesem Fall streng monoton steigt. Damit ist (b) gezeigt.
Es bleibt zu zeigen, dass $\pi_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ bijektiv ist, für $a \neq 1$. Wir setzen für den Moment

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; x \mapsto x \cdot \ln(a).$$

Für $a \neq 1$ ist $\ln(a) \neq 0$. Damit gilt nun $f_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und somit $\pi_a(\mathbb{R}) = \exp(f_a(\mathbb{R})) = \exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Funktion $\pi_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ ist also surjektiv. Die strenge Monotonie von π_a liefert die Injektivität. Damit ist auch Teil (c) bewiesen.
Wir haben gerade gesehen, dass π_a in diesem Fall streng monoton ist. Damit muss π_a injektiv sein. $\square$

Proposition 7.1.11. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ positiv. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:*

(a) $a^x > 0$

(b) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$

(d) $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

(e) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

(f) $a^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ *für alle $p \in \mathbb{Z}$ und alle $q \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Das folgt alles aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Zu (a): Es ist $a^x = \pi_a(x) \in (0, \infty)$ nach Satz 7.1.10.

Zu (b): Es gilt $a^{x+y} = \exp((x+y) \cdot \ln(a)) = \exp(x \ln(a) + y \ln(a)) = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = a^x \cdot a^y$.

Zu (c): Es gilt $(a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp(y \cdot \ln(\exp(x \cdot \ln(a)))) = \exp(y \cdot (x \cdot \ln(a))) = \exp((xy) \cdot \ln(a)) = a^{xy}$.

Zu (d): Das folgt nun leicht aus Teil (c): $a^{-x} = a^{(-1) \cdot x} = (a^{-1})^x = (1/a)^x$.

Zu (e): Es ist $a^x \cdot b^x = \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(x \ln(b)) = \exp(x \ln(a) + x \ln(b)) = \exp(x(\ln(a) + \ln(b))) = \exp(x \ln(ab)) = (ab)^x$.

Zu (f): Es ist $a^{p/q} > 0$ nach Teil (a). Weiter ist $(a^{p/q})^q = a^{p/q \cdot q} = a^p$ nach Teil (e). Damit ist tatsächlich $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

$\square$

Bemerkung 7.1.12. Wir haben gerade in Satz 7.1.10 gesehen, dass die allgemeine Potenz zur Basis $a > 0$, also $\pi_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, bijektiv ist für $a \neq 1$. Damit existiert auch die Umkehrfunktion

$$\pi_a^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese ist streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$. Weiter ist π_a^{-1} stetig, da π_a stetig ist.

Definition 7.1.13. Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ heißt die Funktion $\pi_a^{-1} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *Logarithmus zur Basis a*. Wir setzen $\pi_a^{-1} = \log_a$.

Satz 7.1.14. *Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist* $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Beweis. Da $\log_a$ die Umkehrfunktion von der allgemeinen Potenz π_a ist, ist $\log_a(x)$ eindeutig dadurch bestimmt, dass $\pi_a(\log_a(x)) = x$ gilt. Nun ist aber

$$\pi_a \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right) = \exp \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \right) = \exp(\ln(x)) = x.$$

Damit muss die geforderte Gleichung $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ gelten. $\square$

7.2 Trigonometrische Funktionen

Wir kommen nun endlich dazu die Funktionen cos und sin nicht nur geometrisch zu betrachten. Wir fangen aber scheinbar ganz woanders an.

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \overline{e^{ix}} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix} \tag{7.2}$$

Proposition 7.2.1. *Die Funktionen*

$$C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{Re}(e^{i\cdot x})$$

und

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \mathrm{Im}(e^{i\cdot x})$$

sind stetig.

Beweis. Der Realteil einer komplexen Zahl z kann geschrieben werden durch $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ (vgl. Satz 3.1.12). Damit ist die Abbildung C gegeben durch die Hintereinanderausführung der stetigen Funktionen $x \mapsto i \cdot x$ (Polynom), $x \mapsto -i \cdot x$ (Polynom) und – Dank (7.2) – $i \cdot x \mapsto \frac{1}{2}(e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x})$ (Exponentialfunktion).
Da S gegeben ist durch $x \mapsto \frac{1}{2i}(e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x})$, folgt genau so, dass auch S stetig ist. □

Bemerkung 7.2.2. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$1 = e^0 = e^{i\cdot x - i\cdot x} = e^{i\cdot x} \cdot e^{-i\cdot x} \overset{(7.2)}{=} e^{i\cdot x} \cdot \overline{e^{i\cdot x}} = |e^{i\cdot x}|^2 = C(x)^2 + S(x)^2. \tag{7.3}$$

Weiter gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(x+y) + S(x+y) \cdot i = e^{i\cdot(x+y)} = e^{i\cdot x} \cdot e^{i\cdot y} &= (C(x) + S(x) \cdot i) \cdot (C(y) + S(y) \cdot i) \\ &= (C(x)C(y) - S(x)S(y)) + (C(x)S(y) + S(x)C(y)) \cdot i. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \tag{7.4}$$
$$S(x+y) = C(x)S(y) + S(x)C(y). \tag{7.5}$$

Zuletzt wissen wir noch

$$1 = e^{i\cdot 0} = C(0) + S(0) \cdot i,$$

also

$$C(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad S(0) = 0. \tag{7.6}$$

Diese Eigenschaften sollten Ihnen bekannt vorkommen (zumal wir uns im Abschnitt *Trigonometrische Funktionen* befinden)!

Man kann zeigen, dass tatsächlich $C(x) = \cos(x)$ und $S(x) = \sin(x)$ gilt. Das werden wir in dieser Vorlesung allerdings nicht tun. Wir halten dieses wichtige Resultat aber fest:

Theorem 7.2.3. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{i\cdot x}) \qquad \textit{und} \qquad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{i\cdot x}).$$

Hier haben wir eine wundersame Verbindung zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den Funktionen sin und cos aufgedeckt. Diese Verbindung nutzen wir um neue Erkenntnisse über beide Seiten zu bekommen.

Wiederholung. Aus der geometrischen Definition von sin und cos aus 3.3.9 können wir – neben den Eigenschaften (7.3)-(7.6) – sofort folgende Tatsachen ablesen:

(a) $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(b) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\cos(x) \geq 0$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, und $\cos(x) \leq 0$ für alle $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

(e) $\sin(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \pi]$, und $\sin(x) \leq 0$ für alle $x \in [\pi, 2\pi]$.

(f) Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[\pi, 2\pi]$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $[0, \pi]$.

(g) Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und streng monoton fallend auf dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Wir können auch noch andere Werte von sin und cos ablesen. Einige fassen wir in der folgenden Tabelle zusammen:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0	-1	0
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

Dies können wir nun nutzen um um Aussagen über die Exponentialfunktion zu treffen.

Proposition 7.2.4. *Es gilt*

(a) $e^{\pi/2 \cdot i} = i$.

(b) $e^{i\cdot x + 2\pi i} = e^{i\cdot x}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Das folgt sofort aus unserem Wissen über sin und cos und aus Theorem 7.2.3. Denn

$$e^{\pi/2} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot i = i.$$

Insbesondere folgt $e^{2\pi i} = i^4 = 1$ und somit

$$e^{i\cdot x + 2\pi i} = e^{i\cdot x} \cdot e^{2\pi i} = e^{i\cdot x}.$$

Das wollten wir zeigen. □

Insbesondere gilt die *schönste Formel der Welt*: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Bemerkung 7.2.5. Nun kommen wir dazu aus der Exponentialfunktion neue Erkenntnisse über sin und cos zu treffen. Wir wiederholen nochmal, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{i\cdot x}) = \frac{1}{2}(e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x})$$

und

$$\sin(x) = \mathrm{Re}(e^{i\cdot x}) = \frac{1}{2i}(e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x})$$

(vgl. den Beweis von Proposition 7.2.1). Die Ausdrücke auf der rechten Seite sind aber definiert für *alle* komplexen Zahlen! Dies führt uns zur nächsten Definition.

Definition 7.2.6. Die *komplexe Sinus-Funktion* ist definiert als

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{2i}(e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}).$$

Die *komplexe Cosinus-Funktion* ist definiert als

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{2}(e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}).$$

Bemerkung 7.2.7. Genau wie im Beweis von Proposition 7.2.1 sehen wir, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$ sind.
Die Additionstheoreme (7.4) gelten auch für komplexe Zahlen x, y. Daraus folgt sofort

$$\cos(z+\pi) = -\cos(z) \qquad \text{und} \qquad \sin(z+\pi) = -\sin(z) \tag{7.7}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Korollar 7.2.8. *Für jedes $x \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \textit{und} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweis. Wir zeigen nur die Formel für den Cosinus. Wir stellen fest, dass (genau wie bei $\exp(x)$) das Quotientenkriterium 5.4.18 die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ garantiert.
Nun gilt

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot x)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i\cdot x)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot x)^k + (-i\cdot x)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Zunächst nehmen wir an, dass k gerade ist. Dann gilt $k = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$(i\cdot x)^k + (-i\cdot x)^k = i^{2n}x^{2n} + (-1)^{2n}i^{2n}x^{2n} = 2(i^2)^n x^{2n} = 2\cdot(-1)^n x^{2n}.$$

Ist nun k ungerade, dann ist $(-1)^k = -1$ und es folgt

$$(i\cdot x)^k + (-i\cdot x)^k = (i\cdot x)^k + (-1)^k\cdot(i\cdot x)^k = 0.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (7.8) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\cdot x)^k + (-i\cdot x)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Die Gleichung für die Sinus-Funktion folgt genauso. □

Beispiel 7.2.9. Endlich können wir nun Werte für Sinus und Cosinus berechnen, ohne einen Kreis zeichnen zu müssen. Wollen wir nun eine Näherung von $\cos(1/3)$ berechnen, dann bestimmen wir die Partialsummen der entsprechenden Reihe aus Korollar 7.2.8:

- $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k \frac{(1/3)^{2k}}{(2k)!} = 1$
- $\sum_{k=0}^{1}(-1)^k \frac{(1/3)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{18} = 0,9444\ldots$
- $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k \frac{(1/3)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{1944} = 0,94495\ldots$

Fragen Sie Ihren Taschenrechner, ob das bereits eine gute Abschätzung ist.

Lemma 7.2.10. *Es gilt:*

- $\{z \in \mathbb{C} | \cos(z) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi | n \in \mathbb{Z}\}$ *und*
- $\{z \in \mathbb{C} | \sin(z) = 0\} = \{n \cdot \pi | n \in \mathbb{Z}\}$.

Beweis. Dass die reellen Nullstellen von cos genau die Elemente aus $\{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi | n \in \mathbb{Z}\}$ sind und die reellen Nullstellen von sin genau die Elemente aus $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ sind, folgt sofort aus unserem geometrischen Verständnis der beiden Funktionen. Das Lemma sagt also nur aus, dass es in $\mathbb{C}$ keine weiteren Nullstellen gibt. Den (nicht besonders schwierigen Beweis) lassen wir weg. □

Definition 7.2.11. Die *komplexe Tangens-Funktion* ist gegeben durch

$$\tan : \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi | n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Die *komplexe Cotangens-Funktion* ist gegeben durch

$$\cot : \mathbb{C} \setminus \{n \cdot \pi | n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Da für $x \in \mathbb{R}$ sowohl $\sin(x)$ als auch $\cos(x)$ reell sind, erhalten wir die reelle (Co)Tangens-Funktion dadurch, dass wir in dieser Definition jedes $\mathbb{C}$ durch ein $\mathbb{R}$ ersetzen.

Bemerkung 7.2.12. Da sin und cos stetig sind, sind auch tan und cot stetig überall da, wo sie definiert sind.

Zum Schluss wollen wir uns noch überlegen, wie potentielle Umkehrfunktionen von sin, cos, tan und cot aussehen könnten.

Beispiel 7.2.13. Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton steigend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Aus $1 = \sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(-\frac{\pi}{2})$ folgt, $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.
Damit gibt es eine Umkehrfunktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Diese nennen wir *Arcussinus* und setzen $\sin^{-1} = \arcsin$.
Genau wie sin auf dem betrachteten Intervall, ist arcsin stetig und streng monoton steigend.

Beispiel 7.2.14. Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton fallend auf $[0, \pi]$.
Aus $1 = \cos(0) = -\cos(\pi)$ folgt, $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.
Damit gibt es eine Umkehrfunktion $\cos^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$. Diese nennen wir *Arcuscosinus* und setzen $\cos^{-1} = \arccos$.
Genau wie cos auf dem betrachteten Intervall ist arccos stetig und streng monoton fallend.

Bemerkung 7.2.15. Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\cos(x) \neq 0 \neq \sin(x)$. Es ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x)^{-1}$. Ist dann cot die Umkehrfunktion von tan?

NEIN! Es ist $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \sqrt{3}$. Aber, da $\frac{\pi}{2} < \sqrt{3} < \pi$, muss $\cot(\sqrt{(}3)) < 0$ sein. Insbesondere ist also $\cot(\sqrt{(}3)) \neq \frac{\pi}{3}$.
Es macht also einen großen unterschied, ob man $f(x)^{-1}$ oder $f^{-1}(x)$ betrachtet!

Beispiel 7.2.16. Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Da sin auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigt und cos auf diesem Intervall streng monoton fällt, ist tan auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend. Aus $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$ folgt dann, dass tan streng monoton steigt auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Weiter ist

$$\lim_{x \searrow -\pi/2} \tan(x) = \frac{\lim_{x \searrow -\pi/2} \sin(x)}{\lim_{x \searrow -\pi/2} \cos(x)} = \frac{-1}{\lim_{x \searrow -\pi/2} \cos(x)} = -\infty$$

und (das zeigt man genauso)

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = \infty.$$

Damit ist $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$.
Es folgt, dass es eine Umkehrfunktion $\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gibt. Diese ist stetig und streng monoton steigend. Wir nennen sie den Arcustangens und setzen $\tan^{-1} = \arctan$.

Kapitel 8

Differentiation

$\exp'(x) = \exp(x)$

Endlich kommen wir zu etwas, was Sie schon kennen: Ableitungen!
Für das gesamte Kapitel bezeichnet I ein Intervall, das mehr als ein Element enthält. Beachten Sie, dass auch $\mathbb{R}$ selbst ein Intervall ist.

8.1 Ableitungen

Ganz grob formuliert sagen wir, dass eine Funktion f *differenzierbar an einer Stelle* x_0 ist, wenn der Funktionsgraph in der Nähe von x_0 aussieht wie eine Gerade! Die Steigung dieser Geraden soll dann die *Ableitung von* f *an der Stelle* x_0 sein. In Abbildung 8.1 sehen Sie zwei Beispiele.

Lemma 8.1.1. *Seien* (x_1, y_1) *und* (x_2, y_2) *zwei verschiedene Punkte im* $\mathbb{R}^2$. *Dann gibt es genau eine Gerade durch diese Punkte. Diese hat die Steigung* $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Beweis. Das können Sie als elementares Schulwissen oder als Definition der Steigung betrachten. □

Die Idee ist nun, dass wir eine Gerade g_x durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ legen. Wenn nun x gegen x_0 läuft, dann sollte die Gerade g_x den Funktionsgraphen von f in unmittelbarer Nähe von x_0 gut annähern. Damit im Hinterkopf, ist die folgende formale Definition der Differentierbarkeit nicht überraschend.

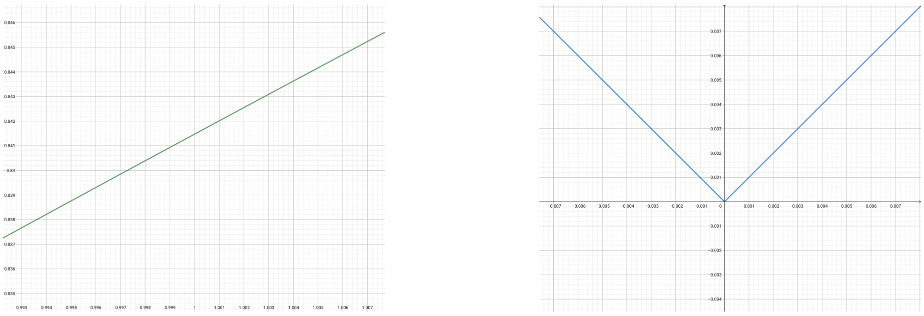


Abbildung 8.1: Links ist der Graph von sin im Intervall $[0.993, 1.007]$ und rechts ist der Graph der Betragsfunktion im Intervall $[-0.007, 0.007]$ dargestellt. Die Funktion sin sollte also an der Stelle 1 differenzierbar sein. Die Betragsfunktion hat an der Stelle 0 aber einen Knick, der immer gleich aussieht, egal wie nah wir heranzoomen. Die Betragsfunktion sollte also an der Stelle 0 nicht differenzierbar sein.

Definition 8.1.2. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

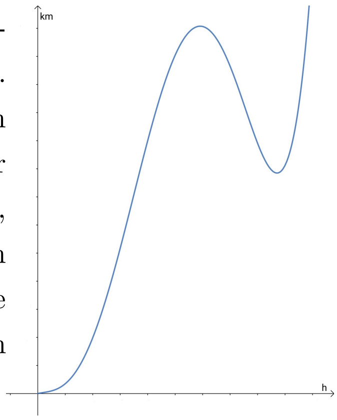
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die *Ableitung von* f *an der Stelle* x_0. Ist f differenzierbar an allen Elementen aus I, dann nennen wir f *differenzierbar*.

Bevor wir nun wirklich gleich mit dieser Definition arbeiten werden, geben wir noch einaml ein anschauliches Beispiel, was die Ableitung in eine konkreten Fall bedeutet.

Beispiel 8.1.3. Sie fahren mit einem Auto auf einer langen Straße. Jedem Zeitpunkt ordnen wir den Kilometer zu, auf dem sich das Auto zu diesem Zeitpunkt befindet. Dann haben wir eine Funktion von der Zeit (gemessen in Stunden h) in die Position (gemessen in km). Da Sie sich nicht beamen können, ist diese Funktion sicher stetig. Der Graph könnte zum Beispiel so aussehen:

Dort wo der Graph steigt fahren Sie nach vorne. Dort wo der Graph fällt fahren Sie zurück. Ganz am Anfang (beim losfahren) brauchen Sie eine größere Zeitspanne um einige Meter zu fahren, als ganz am Ende. Das bedeutet, dass Sie am Anfang langsam fahren und am Ende schnell. An den Stellen, an denen Sie die Richtung wechseln, fährt Ihr Auto für einen kurzen Moment garnicht.



Die Ableitung an einem Zeitpunkt x_0 ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))\mathrm{km}}{(x - x_0)\mathrm{h}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Für festes x beschreibt der Ausdruck $\frac{(f(x)-f(x_0))\mathrm{km}}{(x-x_0)\mathrm{h}}$ genau wie viele Kilometer Sie im Zeitraum von x bis x_0 gefahren sind. Wenn nun x gegen x_0 strebt, dann erhalten wir genau die Geschwindigkeit (gemessen in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$), die Ihr Auto zum Zeitpunkt x_0 fährt. Das Vorzeichen gibt an, in welche Richtung Sie fahren. Wenn also $f(2) = -50$ ist, dann sind Sie zum Zeitpunkt 2 (also exakt zwei Stunden nachdem Sie losgefahren sind) genau 50km/h zurück gefahren.

Beispiel 8.1.4. Jede konstante Funktion f ist differenzierbar. Es gilt dann $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Das liegt daran, dass bei einer konstanten Funktion $f(x) = f(x_0)$ gilt, für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$ und somit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$.
Anschaulich ist das vollkommen klar, da jede konstante Funktion eine Gerade mit Steigng 0 ist. Mit dem Beispiel des Autofahrens: Wenn Ihr Auto immer an der gleichen Stelle steht, fahren Sie die ganze Zeit Null km/h.

Beispiel 8.1.5. Sei f die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$. Dann ist

- f nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$. Denn: $\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = -1$ und $\lim_{x \searrow 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$. Da der linksseitige- und der rechtsseitige Grenzwert von $\frac{|x|-|0|}{x-0}$, für x gegen 0, unterschiedlich sind, kann $f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-x_0}$ nicht existieren.

- differenzierbar an allen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Genau wie eben zeigt man

$$f'(x_0) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x_0 < 0 \\ 1 & \text{falls } x_0 > 0 \end{cases}$$

Beispiel 8.1.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^n$. Sei weiter $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass f differenzierbar in x_0 ist und die Ableitung $f'(x_0)$ berechnen. Uns interessiert also der folgende Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

Nun machen wir etwas, was oft nützlich ist. Wir setzen $h = x - x_0$. Dann ist natürlich $x = x_0 + h$. Weiter konvergiert h gegen 0, wenn x gegen x_0 konvergiert. Setzen wir dies in die obige Definition von $f'(x_0)$ ein, erhalten wir

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0}{h}.$$

Das berechenn wir natürlich mit der verallgemeinerten binomischen Formel 1.3.18.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k}}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-1} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-1} \right) \\ &= \binom{n}{n-1} x_0^{n-1} + \underbrace{\lim_{h \to 0} h \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k-2}}_{=0} \end{aligned}$$

Damit ist f differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Bisher sind die schönsten Funktionen die wir kennen alle stetig. Der folgende Satz sagt aus, dass die differenzierbaren Funktionen alle stetig sind.

Satz 8.1.7. *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f auch stetig in x_0.*

Beweis. Sei also f differenzierbar in x_0. Dann existiert der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Um zu zeigen, dass f stetig in x_0 ist, müssen wir zeigen, dass auch $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Das sehen wir folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \right) \\ &= f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} + f(x_0) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0). \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Bemerkung 8.1.8. Insbesondere wissen wir nun, dass eine Funktion die <u>nicht</u> stetig ist, auch <u>nicht</u> differenzierbar ist!

Wir wissen bereits, dass wir Funktionen in die rellen Zahlen addieren und multiplizieren können. Bei stetigen Funktionen haben wir herausgefunden, dass die Summe, das Produkt, der Quotient (da wo er definiert ist) und skalare Vielfache von stetigen Funktionen wieder stetig sind. Der folgende Satz sagt unter anderem aus, dass wir bei dieser Aussage *stetig* durch *differenzierbar* ersetzen dürfen.

Satz 8.1.9. *Seien $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$ (falls $f(x_0) \neq 0$) und $\lambda \cdot f$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, differenzierbar in x_0. Genauer gilt:*

(a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(b) $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(c) $(\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$

(d) $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$

Wie immer gilt also: Die Addition verhält sich so einfach, wie es nur geht; bei der Multiplikation muss man etwas genauer hinschauen. Die Formel für $(f \cdot g)'$ nennen wir auch *Produktformel*.

Beweis. Wir beweisen nur Teil (b). Wie man sich die Formel für (c) jederzeit leicht herleiten kann, werden wir etwas später sehen. Daher verzichten wir auf den Beweis.
Wir berechnen also $f \cdot g'(x_0)$. Es ist

$$\begin{aligned}
f \cdot g'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{=f(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{=g'(x_0)} + g(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen. Beachten Sie, dass wir nur Dank Satz 8.1.7 wissen, dass $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. □

Wie bei der Stetigkeit folgt aus diesem Satz und den einfachen Beispielen, dass die konstanten Funktionen und die Funktion $x \mapsto x^n$ differenzierbar sind, dass alle Polynome differenzierbar sind!

Korollar 8.1.10. *Jedes reelle Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ ist differenzierbar. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{d} k \cdot a_k x^{k-1}.$$

Definition 8.1.11. Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann nennen wir die Funktion

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f'(x)$$

die *Ableitung* von f.

Beispiel 8.1.12. (a) Die Ableitung von $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 7$ ist $p'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 4x^{2-1} + 1x^{1-1} = 6x^2 - 8x + 1$.

(b) Wir berechnen die Ableitung von $f(x) = \frac{3x^2+2x}{5x^2+4}$ (beachten Sie, dass diese Funktion tatsächlich überall definiert ist, da der Nenner für keine reelle Zahl x Null ergeben kann). Wir schreiben $f(x) = (3x^2+2x) \cdot \frac{1}{5x^2+4}$.

Dann folgt mit Satz 8.1.9 (b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (3x^2+2x)' \cdot \frac{1}{5x^2+4} + (3x^2+2x) \cdot \left(\frac{1}{5x^2+4}\right)' \\
&\overset{8.1.10}{=} (6x+2) \cdot \frac{1}{5x^2+4} + (3x^2+2x) \cdot \left(\frac{1}{5x^2+4}\right)' \\
&\overset{8.1.9(c)}{=} (6x+2) \cdot \frac{1}{5x^2+4} + (3x^2+2x) \cdot \left(-\frac{(5x^2+4)'}{(5x^2+4)^2}\right) \\
&\overset{8.1.10}{=} (6x+2) \cdot \frac{1}{5x^2+4} - (3x^2+2x) \cdot \frac{10x}{(5x^2+4)^2} \\
&= \frac{(6x+2)(5x^2+4) - (3x^2+2x)(10x)}{(5x^2+4)^2} = \frac{-10x^2+24x+8}{(5x^2+4)^2}
\end{aligned}$$

Lemma 8.1.13. *Es gilt* $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$*. Dies gilt auch für die komplexe Exponentialfunktion.*

Beweis. Natürlich müssen wir die Definition der Exponentialfunktion benutzen. Fü jedes $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \tag{8.1}$$

Es folgt

$$\frac{e^x-1}{x} \overset{(8.1)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{k!}. \tag{8.2}$$

Für jedes $x \in \mathbb{C}$, mit $|x| < 1$ ist $|x \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{k!}| < |x \cdot e^1| = |x| \cdot e$. Es folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} \overset{(8.2)}{=} 1 + \underbrace{\lim_{h\to 0} h \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}}_{=0}.$$

□

Proposition 8.1.14. *Die rellen Funktionen* exp, cos, sin *und* tan *sind differenzierbar auf ihrem ganzen Definitionsbereich. Es gilt* *(a)* $\exp'(x) = \exp(x)$

(b) $\cos'(x) = -\sin(x)$

(c) $\sin'(x) = \cos(x)$

(d) $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$.

Beweis. Wir berechnen als erstes die Ableitung der Exponentialfunktion. Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\exp'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0}.$$

Wieder substituieren wir $h = x - x_0$ (vgl. Beispiel 8.1.6) und erhalten

$$\begin{aligned}\exp'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_0 + h) - \exp(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x_0) \cdot \exp(h) - \exp(x_0)}{h} \\ &= \exp(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \overset{8.1.13}{=} \exp(x_0).\end{aligned}$$

Da dies für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, ist tatsächlich $\exp'(x) = \exp(x)$.
Ganz ähnlich können wir auch zeigen, dass cos und sin differenzierbar sind. Dazu können wir die Gleichungen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ benutzen. Den Beweis haben wir in der Vorlesung weggelassen. Für Ihr privates Interesse skizzieren wir den Beweis für $\cos'(x) = -\sin(x)$ ganz grob. Es ist

$$\cos'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(e^{ix_0 + ih} + e^{-ix_0 - ih}) - \frac{1}{2}(e^{ix_0} + e^{-ix_0})}{h}.$$

Benutzt man nun die übliche Rechenregel $e^{ix_0 + ih} = e^{ix} \cdot e^{ih}$ kommt man darauf, dass $\cos'(x_0)$ das gleiche ist, wie

$$\frac{1}{2}\left(e^{ix_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ih} - 1}{h} + e^{-ix_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^{-ih} - 1}{h}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{ix_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ih} - 1}{ih} - e^{-ix_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^{-ih} - 1}{-ih}\right)$$

Da ih gegen Null strebt, wenn h gegen Null strebt, sind mit Lemma 8.1.13 beide Grenzwerte gleich 1. Es folgt, dass $\cos'(x_0) = \frac{i}{2}(e^{ix_0} - e^{-ix_0})$ ist. Aus $\frac{i}{2} = -\frac{1}{2i}$ folgt nun endlich $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$. Wir beweisen noch schnell Teil (d). Es gilt

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \sin'(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} + \sin(x) \cdot \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)'.$$

Mit Teil (b) und (c), sowie den Ableitungsregeln aus Satz 8.1.9, folgt

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \sin(x) \cdot \frac{-(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2.$$

□

Wir können auch die Hintereinanderusführung von differenzierbaren Funktionen betrachten. Diese sond glücklicherweise auch wieder differenzierbar.

Satz 8.1.15 (Kettenregel)**.** *Seien I und J Intervalle und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, mit $f(I) \subseteq J$. Dann ist auch $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)).$$

Beweis. Seien also f und g wie beschrieben. Die Voraussetzung $f(I) \subseteq J$ garantiert uns, dass die Funktion $g \circ f$ tatsächlich existiert. Sei nun $x_0 \in I$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass der folgende Grenzwert existiert

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Im zweiten Gleichheitszeichen haben wir den Ausdruck einfach mit einer 1 multipliziert, was natürlich den Wert nicht verändert. Da f differenzierbar ist, existiert $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Weiter ist f, nach Satz 8.1.7, auch stetig. Damit gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Genauso existiert für jedes $y_0 \in J$ der Grenzwert $g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}$. Wenn wir $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ setzen, sieht das doch fast so aus, wie das was wir haben wollen. Wir wissen sogar, dass tatsächlich $y \to y_0$ strebt, für $x \to x_0$. Damit folgt nun aus (8.3)

$$(g \circ f)'(x_0) = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Das wolten wir zeigen. □

Bemerkung 8.1.16. Bei der Ableitung von der Hintereinanderausführung von Funktionen gilt also

Innere- mal äußere Ableitung!

Beispiel 8.1.17. Für alle $x \in (0, \infty)$ gilt $x = \exp(\ln(x))$. Diese Gleichheit gilt also auch als Funktion auf den positiven reellen Zahlen. WENN der natürliche Logarithmus ln differenzierbar ist, dann können wir die Kettenregel für die Ableitung der rechten Seite benutzen. Dann folgt:

$$1 = (x)' = (\exp(\ln(x)))' = \ln'(x) \cdot \exp'(\ln(x)) = \ln'(x) \cdot \exp(\ln(x)) = \ln(x) \cdot x.$$

Damit würde folgen $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Diese Gleichheit gilt auch, was wir gleich sehen werden.

Beispiel 8.1.18. Genauso können wir auch die Ableitung für andere Umkehrfunktionen herleiten. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \tan(\arctan(x))$. Diese Gleichheit gilt also auch als Funktion auf den positiven reellen Zahlen. WENN der Arcustangens arctan differenzierbar ist, dann können wir die Kettenregel für die Ableitung der rechten Seite benutzen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= (\tan(\arctan(x)))' = \arctan'(x) \cdot \tan'(\arctan(x)) \\ &= \arctan'(x) \cdot (1 + \tan(\arctan(x)^2) = \arctan'(x) \cdot (1 + x^2). \end{aligned}$$

Damit würde folgen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Diese Gleichheit gilt auch, was wir gleich sehen werden.

Satz 8.1.19. *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$. Wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, dann ist f^{-1} differenzierbar in $f(x_0)$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Beweis. Seien also alle Voraussetzungen an f erfüllt. Dass f dann eine stetige Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, haben wir in Theorem 7.1.1 schon festgestellt. Sei nun $y_0 = f(x_0)$. Weiter setzen wir für jedes $y \in f(I)$, den Wert $x = f^{-1}(y)$ fest (beachte: $f^{-1}(y_0) = x_0$). Dann gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{f(x) \to f(x_0)} \left(\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} = f'(x_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Wir wissen also ab sofort, dass wir in Beispielen 8.1.17 und 8.1.18 alles richtig gemacht haben!

Korollar 8.1.20. *Die Funktionen* ln *und* arctan *sind differenzierbar und es gilt:*

(a) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Beispiel 8.1.21. Für jede reelle Zahl $a > 0$ ist die Funktion $\pi_a(x) = a^x = \exp(x \cdot \ln(x))$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Da $\exp(x)$ und das Polynom $x \mapsto x \cdot \ln(a)$ differenzierbar sind, ist mit der Kettenregel auch $\pi_a(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\pi_a'(x) = (\exp(x \cdot \ln(a)))' \overset{8.1.15}{=} \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a) \cdot \pi_a(x).$$

Beispiel 8.1.22. Dieses Beispiel ist sehr hilfreich! Wir wissen bereits, dass für jede natürlcihe Zahl n, die Formel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt. Das kennen Sie bereits aus der Schule und können es sich hoffentlich gut merken. Das schöne ist, dass diese Formel auch dann noch gilt, wenn n irgendeine reelle Zahl ist! Sei also $\alpha \in \mathbb{R}$ belibeig. Dann erhalten wir eine Funktion $f(x) : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(x))$. Da sowohl exp als auch ln differenzierbar sind, ist auch f differenzierbar. Mit der Kettenregel gilt

$$f'(x) = (\exp(\alpha \cdot \ln(x))' = \alpha \cdot \ln'(x) \cdot \exp(\alpha \cdot \ln(x)) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Verkürzt gilt also tatsächlich

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{8.4}$$

Stellen Sie sicher, dass Sie die Potenzgesetze aus 7.1.11 kennen!

Beispiel 8.1.23. Was ist nun die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^n}$? Dazu müssen wir nur feststellen, dass $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ gilt. Es folgt mit (8.4):

$$f'(x) = (-n) \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Insbesondere gilt $(\frac{1}{x})' = -1\frac{1}{x^2}$.
Wir können auch ganz einfach Wurzelfunktionen ableiten. Z. B. gilt

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = \frac{1}{n} \cdot x^{1/n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{n-1/n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Proposition 8.1.24. *Seien f, g differenzierbare Funktionen auf dem Intervall I und sei $x_0 \in I$, mit $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch $\frac{f}{g}(x)$ differenzierbar in x_0 und es gilt*

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Beweis. MERKEN SIE SICH DIESE FORMAL NICHT! Beachten Sie, dass es bei dieser Formel auf die Reihenfolge der Funktionen f und g ankommt. Die Formel kann man sich leicht mithilfe der Kettenregel und der Produkformel herleiten.
Es ist $\frac{1}{g(x)}$ die Hintereinanderausführung der Funktionen $g(x)$ und $\frac{1}{x}$. Die *innere Ableitung* bei $\frac{1}{g(x)}$ ist also $g'(x)$. Die äußere Ableitung ist $-\frac{1}{g(x)^2}$. Damit ist $(\frac{1}{g})'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$. Damit liefert die Produktformel nun

$$(\frac{f}{g})'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot (-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Hier ist also der Beweis hilfreicher als die Aussage. □

Definition 8.1.25. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist die *Tangente von f an der Stelle* x_0 gegeben durch die Funktion $T(x) = f'(x_0) \cdot x + (f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Bemerkung 8.1.26. Wir benutzen die Notation aus der letzten Definition. Die Tangente T ist gegeben durch eine Geradengleichung. Insbesondere ist der Graph von T eine Gerade. Die Steigung von T ist gleich $f'(x_0)$ – also gleich der Steigung von f an der Stelle x_0. Weiter ist $T(x_0) = f(x_0)$. Wir wissen also

$$T(x_0) = f(x_0) \qquad \text{und} \qquad T'(x_0) = f'(x_0).$$

Die Gerade T imitiert also, so gut es eine Gerade kann, das Verhalten von f an der Stelle x_0. Dadurch wird f in unmittelbarer Nähe von x_0 durch die Funtkion T *approximiert*. Wir wissen bereits, dass T und f stetig in x_0 sind. Es gilt also immer

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - T(x)) = f(x_0) - T(x_0) = 0.$$

Es gilt aber noch viel mehr. Der Grenzwert aus der letzten Zeile konvergiert recht schnell gegen Null, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 8.1.27. *Sei T die Tangente von f an der Stelle x_0. Dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} = 0.$$

Beweis. Den Beweis haben wir in der Vorlesung weggelassen. Versuchen Sie es aber ruhig selbst zu zeigen. Es geht sehr schnell. □

Aufgabe. Fassen Sie alle Ableitungen, die in diesem Abschnitt vorkommen, in einer Liste zusammen!

8.2 Extremstellen

Wir werden studieren, wo der Graph einer Funktion Hoch- bzw. Tiefpunkte hat. Dazu überlegen wir uns zunächst, was das Maximum und das Minimum einer Funktion ist. Wie immer bezeichnet I ein Intervall in $\mathbb{R}$.

Definition 8.2.1. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nimmt f ein *globales Maximum* (bzw. *globales Minimum*) in $c \in I$ an, wenn für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) \leq f(c) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(c)).$$

Bemerkung 8.2.2. Diese Definition ist recht einleuchtend, denn f nimmt ein globales Maximum in c an, wenn

$$f(c) = \max\{f(x) | x \in I\}$$

gilt. Wie immer gilt, dass dieses Maximum nicht existieren muss. Für $f(x) = x$ und $I = \mathbb{R}$ etwa, existiert weder $\min\{f(x)|x \in \mathbb{R}\}$ noch $\max\{f(x)|x \in \mathbb{R}\}$.

Oft interessiert uns nur ein (kleiner) Teil eines Funktionsgraphen.

Definition 8.2.3. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann besitzt f ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*) in $c \in I$, wenn gilt

$$\exists \varepsilon \;:\; \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap I \;:\; f(x) \leq f(c) \;\; (\text{bzw. } f(x) \geq f(c)).$$

Besitzt c in $c \in I$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, dann nennen wir c *Extremstelle von f*.

Bemerkung 8.2.4. Wir nutzen die Notation aus Definition 8.2.3. Wenn c weder Start- noch Endpunkt von I ist, dann können wir immer ein $\varepsilon > 0$ finden, so dass $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq I$ ist. In diesen Fällen können wir also stets auf den Zusatz „$\cap I$" verzichten.
Die Definition sagt aus, dass f ein lokales Maximum in c annimmt, wenn $f(x) \leq f(c)$ ist, für alle x „nah an c". Hier bedeutet „nah an c", dass der Abstand zwischen c und x kleiner ist als eine gewisse (sehr kleine) Konstante ε.

Satz 8.2.5. *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Extremstelle $c \in I$. Wenn f differenzierbar in c ist und c weder Start- noch Endpunkt von I ist, dann gilt $f'(c) = 0$.*

Beweis. Sei also f differenzierbar, $f'(c) = 0$ und es sei c weder Start- noch Endpunkt von I. Wir nehmen an, dass f in c ein lokales Maximum annimmt. (Den Fall, dass f in c ein lokales Minimum annimmt, beweist man dann genauso.)
Da f differenzierbar in c ist, existiert der Grenzwert

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Nun ist c weder Start- noch Endpunkt von I. D.h. es gibt Elemente in I, die kleiner als c sind und es gibt Elemente in I, die größer als c sind. Damit existieren auch der linksseitige Grenzwert und der rechtsseitige Grenzwert von $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Diese beiden Werte müssen übereinstimmen, da $f'(c)$ existiert. Es gilt also

$$\lim_{x \nearrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = f'(c) = \lim_{x \searrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{8.5}$$

Da f in c ein lokales Maximum annimmt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, mit

$$f(x) \leq f(c) \text{ für alle } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon). \tag{8.6}$$

Wenn wir ε kleingenug wählen, dann können wir annehmen, dass dieses Intervall komplett in I liegt. Für die Grenzwerte aus (8.5) genügt es, nur x zu betrachten, die nah an c liegen. Insbesondere dürfen wir annehmen, dass alle x aus (8.5) in $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ liegen. Für alle diese x ist $f(x) - f(c) \leq 0$ nach (8.6). Ist nun auch noch $x < c$, dann ist $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ und somit gilt

$f'(c) = \lim_{x \nearrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$. Ist andererseits $x > c$, dann ist $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ und somit gilt $f'(c) = \lim_{x \searrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. Es ist also $f'(c)$ sowohl ≥ 0 als auch ≤ 0. Damit bleibt nur $f'(c) = 0$ übrig! Das wollten wir zeigen. $\square$

Beispiel 8.2.6. Was sind die Extremstellen der Funktion

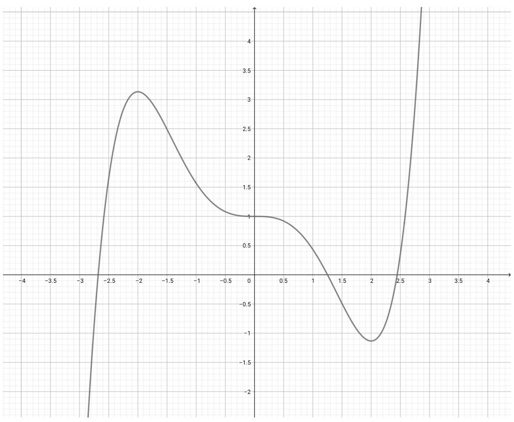
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1?$$

Diese Funktion ist überall differenzierbar und der Definitionsbereich ($\mathbb{R}$) besitzt keinen Start- und keinen Endpunkt. Damit können die Extremstellen nur an den Stellen liegen, an denen $f'(x) = 0$ ist. Wir sollten also die Ableitung von f bestimmen. Da es sich hier um ein Polynom handelt, ist das ziemlich einfach:

$$f'(x) = \frac{5}{10}x^4 - \frac{2 \cdot 3}{3}x^2 = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 4) = \frac{1}{2}x^2(x+2)(x-2).$$

Die Nullstellen können wir in dieser Form leicht ablesen: 0, -2, 2.

Wie wir entscheiden, ob diese Werte Extremstellen sind oder nicht, das lernen wir später. Für den Moment begnügen wir uns damit den Graphen zu betrachten. Dieser sieht so aus.



Wir sehen, dass f in -2 ein lokales Maximum annimmt und in 2 ein lokales Minimum annimmt. Die Stelle 0 ist keine Extremstelle!

Warnung 8.2.7. Aus der Gleichung $f'(c) = 0$ können wir also **nicht** schließen, dass c eine Extremstelle ist!

Beispiel 8.2.8. Was sind die Extremstellen von

$$f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} -8(x+3)^2 & \text{falls } -4 \leq x < 2 \\ x^3 & \text{falls } -2 \leq x < 2 \\ 8|x-3| & \text{falls } 2 \leq x \leq 4 \end{cases} ?$$

Wir sammeln wieder zunächst die möglichen Extremstellen. Diese sind

- Start- und Endpunkt des Definitionsbereiches: -4 und 4
- die „Klebestellen“: -2 und 2
- die Stellen an denen f nicht differenzierbar ist: 3 (und die Klebestellen, die wir schon aufgelistet haben)
- die Stellen an denen die Ableitung gleich Null ist: -3 und 0

Zum letzten Punkt: Für $x \in [-4, 2)$ ist $f'(x)$ die Ableitung von $-8(x+3)^2$. Damit ist $f'(x) = -16(x+3)$ für alle $x \in [-4, 2)$. Dies verschwindet nur für $x = -3$.

Für $x \in [-2, 2)$ ist $f'(x)$ die Ableitung von x^3 – also gleich $3x^2$. Damit ist $f'(x) = 0$ nur für $x = 0$, wenn $x \in [-2, 2)$ liegen soll. Ist $x \in [2, 3)$, dann ist $f'(x)$ die Ableitung von $8|x-3|$ – also gleich $-8 \neq 0$. Genauso ist für $x \in (3, 4]$ die Ableitung $f'(x) = 8 \neq 0$.

Wieder betrachten wir den Graphen von f:

Wir stellen fest, dass die Extremstellen gegeben sind durch -4, -2, 3 (lokale Minima) und -3, 2, 4 (lokale Maxima).

Satz von Rolle 8.2.9. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann gibt es ein $c \in (a, b)$, mit $f'(c) = 0$.*

Beweis. Der Beweis ist zum Glück ganz einfach. Wir benutzen, dass f insbesondere stetig ist (vgl. Satz 8.1.7). Dann existieren nach dem Satz vom Maximum und Minimum 6.4.6 das globale Maximum und das globale Minimum von f.
Wenn f konstant ist, dann ist $f'(c) = 0$ für alle $c \in [a, b]$. Insbesondere ist dann die Aussage des Satzes korrekt.
Wenn f nicht konstant ist, dann gibt es ein $y \in (a, b)$, mit $f(a) \neq f(y) \neq f(b)$. Ist nun $f(y) > f(a)$, dann nimmt f nicht das globale Maximum in a und b an. D.h. das globale Maximum von f wird an einer Stelle $c \in (a, b)$ angenommen. Diese Stelle erfüllt nun $f'(c) = 0$ nach Satz 8.2.5. Wenn $f(y) < f(a)$, dann nimmt f ein globales Minimum in $c \in (a, b)$ an und wieder gilt $f'(c) = 0$. □

Dieser unscheinbare Satz, dessen Aussage vollkommen offensichtlich erscheint, hat einige wichtige Anwendungen. Die erste lernen wir sofort kennen.

Mittelwertsatz 8.2.10. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis. Wir möchten den Satz von Rolle 8.2.9 benutzen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Da sowohl f als auch das Polynom $x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ differenzierbar sind, ist die Funktion g differenzierbar. Weiter gilt

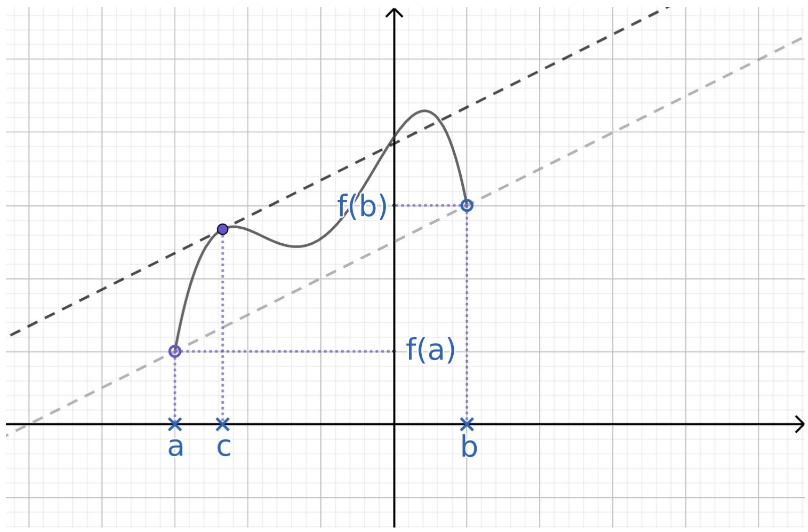
- $g(a) = f(a) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a)}_{=0} = f(a)$ und
- $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Rolle tatsächlich gegeben und es existiert ein $c \in (a, b)$, mit

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Das bedeutet natürlich nichts anderes, als dass $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ gilt, für ein $c \in (a, b)$. $\square$

Bemerkung 8.2.11. Der Wert $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ aus dem Mittelwertsatz ist genau die Steigung der Geraden zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Im Bild unten ist dies die hellgrau gestrichelte Gerade. Der Mittelwertsatz sagt nun aus, dass der Graph der Funktion f an mindestens einer Stelle genau diese Steigung besitzt.



Wenn wir die Ableitung, wie in Beispiel 8.1.3, als Geschwindigkeit interpretieren, dann besagt der Mittelwertsatz etwas was anschaulich vollkommen klar ist: Wenn Sie in einer Stunde genau 100km gefahren sind. Dann sind Sie an mindestens einem Moment ganz genau 100km/h gefahren. Das ist auch der britischen Polizei bekannt, die so (teilweise) Geschwindigkeitskontrollen durchführt.

Beispiel 8.2.12. Wir können mit dem Mittelwertsatz ganz einfach zeigen, dass für alle $x, y \in$ die Ungleichung $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ gilt. Wenn $x = y$ ist, ist diese Aussage trivial. Wenn $x \neq y$ gilt, dann sagt der Mittelwertsatz, dass ein c zwischen x und y existiert, mit $\frac{|\sin(x)-\sin(y)|}{|x-y|} = |\sin'(c)| = |\cos(c)| \leq 1$. Damit muss in jedem Fall $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ gelten.

Es gibt auch noch eine allgemeinere Version des Mittelwertsatzes, die wir hier nur ohne Beweis angeben.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz 8.2.13. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, mit*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(c) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(c).$$

Beachten Sie, dass wir im Fall $g(x) = x$ genau den Mittelwertsatz 8.2.10 erhalten.

Wir kommen nun zu Anwendungen des Mittelwertsatzes. Die Ableitung einer Funktion soll ja der Steigung des Funktionsgraphen entsprechen. Ist für einen Funktionsgraphen die Steigung überall positiv, so ist der Graph überall echt steigend. Die Funktion ist in diesem Fall also streng monoton wachsend. Das folgende Theorem ist mit dieser Anschauung nicht sonderlich überraschend.

Theorem 8.2.14. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt*

(a) $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \iff f$ *ist monoton wachsend.*

(b) $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (a, b) \iff f$ *ist monoton fallend.*

(c) $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b) \iff f$ *ist streng monoton wachsend.*

(d) $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a, b) \iff f$ *ist streng monoton fallend.*

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage.

$\Rightarrow$ Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. *Angenommen*, f sei nicht monoton wachsend. Dann gibt es $x_1 < x_2$ in (a, b), mit $f(x_1) > f(x_2)$. Insbesondere ist $x_1 - x_2 < 0$ und $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 8.2.10 gilt dann aber

$$0 > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$$

für ein $c \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f'(x) \geq 0$ ist für alle $x \in (a, b)$. Unsere Annahme muss also falsch gewesen sein. Es folgt, dass f monoton wachsend ist.

$\Leftarrow$ Sei nun f monoton wachsend auf (a, b) und sei $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Da f monoton wächst, gilt

$$f(x) - f(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{für alle } x < x_0 \\ \geq 0 & \text{für alle } x > x_0 \end{cases}$$

Der Wert $f(x) - f(x_0)$ hat also stets das selbe Vorzeichen, wie der Wert $x - x_0$. Das bedeutet, dass $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ gilt für alle $x \in (a, b) \neq \{x_0\}$. Damit ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Das war zu zeigen.

□

Beispiel 8.2.15. Wir betrachten nochmal das Beispiel $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$ aus 8.2.6. Wir wissen bereits

$$f'(x) = \frac{5}{10}x^4 - \frac{2 \cdot 3}{3}x^2 = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 4) = \frac{1}{2}x^2(x + 2)(x - 2).$$

Es gilt

(i) $\frac{1}{2}x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $x + 2 \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq -2$.

(iii) $x - 2 \geq 0$ genau dann, wenn $x \geq 2$.

Für alle $x \leq -2$ gilt somit $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\geq 0}\underbrace{(x + 2)}_{\leq 0}\underbrace{(x - 2)}_{\leq 0} \geq 0$. Damit ist f monoton wachsend auf $(-\infty, -2)$. Für alle $x \in (-2, 2)$ gilt nun $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\geq 0}\underbrace{(x + 2)}_{\geq 0}\underbrace{(x - 2)}_{\leq 0} \leq 0$. Damit ist f monoton fallend auf dem Intervall $(-2, 2)$. Wir sehen sogar, dass f streng monoton fällt auf den Intervallen $(-2, 0)$ und $(0, 2)$. Damit fällt f streng monoton auf dem Intervall

$(-2,2)$. Insbesondere kann kein Element (auch nicht Null) aus diesem Intervall eine Extremstelle sein. Zu guter letzt stellen wir noch fest, dass $f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\geq 0}\underbrace{(x+2)}_{\geq 0}\underbrace{(x-2)}_{\geq 0} \geq 0$ für alle $x \in [2,\infty)$ gilt. f ist also monoton wachsend auf dem Intervall $[2,\infty)$.

Bemerkung 8.2.16. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $c \in I$ weder Start- noch Endpunkt von I. Wenn für ein $\varepsilon > 0$ gilt, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in (c-\varepsilon, c)$ ist, dann ist f monoton wachsend auf $(c-\varepsilon, c)$. Ist zusätzlich noch $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (c, c+\varepsilon)$, dann ist f monoton fallend auf $(c, c+\varepsilon)$. Wenn der Graph von f aber links von c steigt und rechts von c fällt, dann muss an der Stelle c ein lokales Maximum von f liegen. Es ergibt sich sofort das folgende Korollar.

Korollar 8.2.17. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann nimmt f ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in c an, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass*

(i) $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (c-\varepsilon, c)$ und

(ii) $f'(x) \leq 0$ (bzw. $f'(x) \geq 0$) für alle $x \in (c, c+\varepsilon)$.

Beispiel 8.2.18. Auf den ersten Blick wird man meinen, dass alle lokalen Minima die Eigenschaften (i) und (ii) aus Korollar erfüllen. Dies ist aber nicht der Fall. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot (\sin(\frac{1}{x}) + 2) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Diese ist sicher differenzierbar an allen Stellen $x_0 \neq 0$. Dass f auch differenzierbar in $x_0 = 0$ ist, sehen wir mit Hilfe der Definition:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cdot \underbrace{(\sin(\frac{1}{x}) + 2)}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

Da $\sin(\frac{1}{x})$ immer zwischen -1 und 1 liegt, ist $\sin(\frac{1}{x}) + 2$ positiv für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es folgt, dass $f(x) > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gilt per Definition $f(0) = 0$. Damit nimmt f an der Stelle 0 das absolute Minumum an. Allerdings ist $f'(x) = 2x\cdot(\sin(\frac{1}{x})+2) - \cos(\frac{1}{x})$ fr alle $x \neq 0$. Dies wechselt auf jedem Intervall der Form $(0,\varepsilon)$ unendlich oft das Vorzeichen. Damit ist f auf keinem Intervall der Form $(0,\varepsilon)$ monoton wachsend.

Definition 8.2.19. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir sagen, dass f *zweimal-differenzierbar* ist, wenn auch die Ableitung $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wir setzen in diesem Fall $(f')' = f'' = f^{(2)}$ und nennen diese Funktion die *zweite Ableitung* von f.
Ist auch f'' differenzierbar, so heißt f *dreimal-differenzierbar* und $(f'')' = f''' = f^{(3)}$ heißt *dritte Ableitung* von f.
Allgemein sagen wir, dass f eine *n-mal-differenzierbare* Funktion ist, wenn die Ableitungen

$$f',\ f^{(2)},\ f^{(3)},\ \ldots,\ f^{(n-1)},\ (f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

existieren.

Beispiel 8.2.20. Wir rechnen zwei ganz einfache Beispiele.

(a) Da $\exp'(x) = \exp(x)$ gilt, ist auch $\exp''(x) = (\exp'(x))' = (\exp(x))' = \exp(x)$. Allgemein ist $\exp(x)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $f(x) = x^2 - x + 1$. Dann ist $f'(x) = 2x - 1$, $f''(x) = 2$ und $f'''(x) = 0$. Damit folgt auch, dass $f^{(n)}(x)$ die konstante Nullfunktion ist, für ale $n \geq 3$. Das gilt natürlich für alle Polynome. Wir halten also fest:

Proposition 8.2.21. *Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad d. Dann ist f beliebig-oft differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq d + 1$.*

Satz 8.2.22. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal-differenzierbare Funktion. Ist $c \in (a, b)$, mit $f'(c) = 0$ dann gilt:*

(i) Wenn $f''(c) > 0$ ist, dann nimmt f an der Stelle c ein lokales Minimum an.

(ii) Wenn $f''(c) < 0$ ist, dann nimmt f an der Stelle c ein lokales Maximum an.

Beweis. Wir beweisen nur Teil (i). Sei dazu $c \in (a,b)$, mit $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$. Es gilt also

$$0 < f''(c) = (f')'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Insbesondere gilt $0 < \lim_{x \nearrow c} \frac{f'(x)}{x-c}$. Da $x - c < 0$ ist für alle $x < c$, muss ebenfalls $f'(x) < 0$ gelten für alle c in „unmittelbarer Nähe links von c“. D.h.: es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (c - \varepsilon, c)$ gilt.
Genau so folgt aus $0 < \lim_{x \searrow c} \frac{f'(c)}{x-c}$, dass $f'(x) > 0$ ist für alle $x \in (c, c + \varepsilon)$ (wieder wissen wir nur, dass so ein $\varepsilon > 0$ existiert). Damit ist aber die Voraussetzung von Korollar 8.2.17 erfüllt und f nimmt an der Stelel c ein lokales Minimum an. $\square$

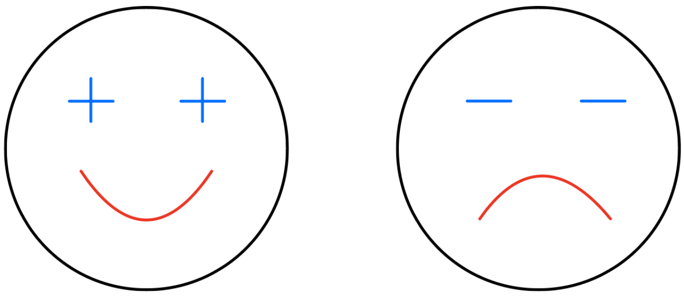


Abbildung 8.2: Mit diesen Clownsgesichtern können Sie sich die Aussage von Satz 8.2.22 merken: Ist die zweite Ableitung positiv (+), sieht der Graph der Funktion so aus wie ein lachender Mund – besitzt also ein Minimum. Ist die zweite Ableitung allerdings negativ (−), so sieht die Funktion so aus wie ein trauriger Mund – besitzt also ein Maximum.

Beispiel 8.2.23. Auch auf die Gefahr hin, dass Sie dieses Beispiel nicht mehr sehen können betrachten wir noch einmal die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 = \frac{1}{2}x^2(x-2)(x+2)$ und $f''(x) = 2x^3 - 4x$. Die Nullstellen von $f'(x)$ sind $0, -2, 2$ und es gilt $f''(0) = 0$, $f''(-2) = -8 < 0$ und $f''(2) = 8 > 0$. Wir wissen nun, dass f an der Stelle -2 ein lokales Maximum annimmt und an der Stelle 2 ein lokales Minimum annimmt. Über die Stelle $x = 0$ können wir mit dieser Argumentation keine Aussage treffen. (Wir wissen aber bereits, dass f dort keine Extremstelle besitzt.)

Bemerkung 8.2.24. Wenn $f'(c) = 0$ und $f''(c) = 0$ gilt, können wir mit Satz 8.2.22 nicht entscheiden ob f an der Stelle c eine Extremstelle besitzt. Die einfachsten Beispiele sind $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^4$. In beiden Fällen gilt $f'(0) = f''(0) = 0$ und $g'(0) = g''(0) = 0$. Allerdings besitzt g eine Extremstelle in $x = 0$ und f besitzt keine Extremstelle in $x = 0$. (Warum?)

8.3 Der Satz von Taylor

Wir gehen davon aus, dass ein (Taschen)rechner ohne Probleme $+$ und $\cdot$ rechnen kann. Das muss ihm natürlich auch beigebracht werden, aber wir nehmen an, dass das schon jemand für uns erledigt hat. Damit kann der Taschenrechner auch Polynome auswerten, da diese Funktionen nur aus Multiplikationen und Additionen zusammengesetzt sind. Beachten Sie dabei, dass „Minus-Rechnen“ nichts anderes ist als eine negative Zahl zu addieren. Wie können wir diesen Rechner nun dazu bringen uns einen möglichst genauen Wert für $\cos(0.2)$ oder $e^{1/3}$ anzuzeigen? Das wollen wir in diesem Abschnitt erklären.

Lemma 8.3.1. *Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für die Funktion $g(x) = (x - x_0)^n$ gilt für $k \in \mathbb{N}$*

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(x - x_0)^{n-k} & \textit{falls } k \leq n \\ 0 & \textit{falls } k > n \end{cases}$$

Beweis. Formal lässt sich das mit einer Induktion beweisen. Wir begnügen uns hier allerdings mit einer ausführlichen Erklärung an Stelle eines Beweises.
Da die Ableitung von $x - x_0$ gleich 1 ist, liefert die Kettenregel:

- $g'(x) = n \cdot (x - x_0)^{n-1}$
- $g''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (x - x_0)^{n-2}$
- $g^{(3)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (x - x_0)^{n-3}$

- $\vdots$
- $g^{(n-1)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (x - x_0)^1$
- $g^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (konstant!)
- $g^{(n+1)}(x) = 0$

Ab jetzt sind alle weiteren Ableitungen von g alle konstant Null. Wir müssen uns also nur noch überlegen, dass die Koeffizienten $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ tatsächlich gleich $\frac{n!}{(n-k)!}$ sind. Das folgt aber unmittelbar aus der Definition der Fakultät, da $n! = (n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdot \ldots \cdot n$ ist. $\square$

Lemma 8.3.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt*

(a) $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$ *für alle $x \in \mathbb{R}$*

(b) $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ *für alle $x \in (0, \infty)$.*

Beweis. Dass die n-te Ableitung von $\exp(x)$ wieder $\exp(x)$ ist, hatten wir schon in Beispiel 8.2.20 erwähnt. Der Beweis dieser Aussage ist die einfachste Induktion der Welt. (Wenn Sie also wiederhoelen wollen, wie ein Induktionsbeweis funktioniert, dann ist das eine nette Übung.)

Wir beweisen nun die Formel für die n-te Ableitung von ln. Das machen wir natürlcih per Induktion.

IA: Für $n = 1$ gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^2 \cdot \frac{(1-1)!}{x^1}$. Das war zu zeigen.

IV: Für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

IS: Sei nun n wie in der IV. Wir zeigen, dass dann die Formel auch für $n+1$ gilt. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \ln^{(n+1)}(x) = (\ln^{(n)}(x))' &\overset{\text{IV}}{=} ((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n})' \\ &= ((-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n})' = (-n) \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n-1} \\ &= (-1) \cdot (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = (-1)^{(n+1)+1} \cdot \frac{((n+1)-1)!}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. $\square$

Definition/Satz 8.3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Weiter sei $x_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es genau ein reelles Polynom $Tf_{x_0,n}$ vom Grad $\leq n$, mit*

(i) $Tf_{x_0,n}(x_0) = f(x_0)$ *und*

(ii) $Tf^{(k)}_{x_0,n}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ *für alle* $k \in \{1, \dots, n\}$.

Das Polynom $Tf_{x_0,n}(x)$ heißt Taylor-Polynom der Ordnung n von f *und es gilt*

$$\begin{aligned} Tf_{x_0,n}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Notation 8.3.4. Hier haben wir $f^{(0)} = f$ gesetzt. Dass macht Sinn, da wir f enthalten, wenn wir f genau 0-mal ableiten. Diese Notation übernehmen wir ab jetzt für alle Funktionen.

Beweis von Satz 8.3.3. Wir beweisen nur, dass die Polynome $Tf_{x_0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$ tatsächlich die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen. Die Bedingung (i) ist dabei trivialerweise erfüllt, denn

$$\begin{aligned} Tf_{x_0,n}(x_0) &= f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x_0 - x_0)^k \\ &= f(x_0) + (x_0 - x_0) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x_0 - x_0)^{k-1} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$. Die k-te Ableitung von $Tf_{x_0,n}(x)$ ist mit Lemma 8.3.1 schnell berechnet:

$$Tf^{(k)}_{x_0,n}(x) = \sum_{\ell=k}^{n} \frac{\ell!}{(\ell - k)!} \frac{f^{(\ell)}(x_0)}{\ell!} \cdot (x - x_0)^{\ell-k} = sum_{\ell=k}^{n} \frac{f^{(\ell)}(x_0)}{(\ell - k)!} \cdot (x - x_0)^{\ell-k}.$$

Da $(x_0 - x_0)^{\ell-k} = 0$ ist für alle $\ell \geq k$, erhalten wir sofort

$$Tf^{(k)}_{x_0,n}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k - k)!} \cdot (x_0 - x_0)^{k-k} = f^{(k)}(x_0).$$

Das wollten wir zeigen. □

Bemerkung 8.3.5. Das Taylor-Polynom der Ordnung 1 von f kennen Sie bereits! Es beschreibt eine Gerade T (da der Grad ≤ 1 ist), die $T(x_0) = f(x_0)$ und $T'(x_0) = f'(x_0)$ erfüllt. Das ist die Tangente von f an der Stelle x_0 (vgl. Bemerkung 8.1.26). Die Tangente war die Gerade, die die Funktion f an der Stelle x_0 bestmöglich imitiert. Die Idee ist nun, dass die Taylor-Polynome der Ordnung n von f, die Funktion f an der Stelle x_0 immer besser nachahmen. Unsere Hoffnung ist, dass f dadurch auch in der Nähe von x_0 durch die Taylorpolynome approximiert wird.

Beispiel 8.3.6. Sei $f(x) = x^2 + 3$. Weiter setzen wir $x_0 = 2$. Dann ist

- $Tf_{2,0}(x) = f(2) = 7$
- $Tf_{2,1}(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = 7 + 4(x-2) = 4x - 1$
- $Tf_{2,2}(x) = Tf_{1,2}(x) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 = 4x - 1 + (x-2)^2 = x^2 + 3$
- $Tf_{2,3}(x) = Tf_{2,2}(x) + \underbrace{\frac{f'''(2)}{6}}_{=0}(x-2)^3 = x^2 + 3$

Das ist nicht verwunderlich, denn das Polynom vom Grad ≤ 2, dass die Funktion $f(x) = x^2 + 3$ bestmöglich approximiert, ist natürlich das Polynom $x^2 + 3$ selbst. Das gilt ganz genau so auch allgemein.
Sei $p(x)$ ein reelles Polynom vom Grad d. Dann gilt für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$Tp_{x_0,n}(x) = p(x) \quad \text{für alle } n \geq d.$$

Beispiel 8.3.7. Die Taylor-Polynome der Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ könnten Ihnen bekannt vorkommen. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$T\exp_{0,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k.$$

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes. Wir möchten, dass die Taylorpolynome einer Funktion f, diese Funktion in der Nähe von x_0 gut approximieren. Der *Fehlerterm*

$$|f(x) - Tf_{x_0,n}(x)|$$

soll also für alle x „nah an x_0“ sehr klein sein. Beachten Sie beim durchlesen des folgenden Theorems, dass es uns ziemlich gut verrät, wie der Term $f(x) - Tf_{x_0,n}(x)$ aussieht.

Theorem 8.3.8 (Satz von Taylor)**.** *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in I$. Für jedes $x \in I \setminus \{0\}$ existiert ein $c_{x,n}$ zwischen x und x_0, mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= Tf_{x_0,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Bemerkung 8.3.9. Der Ausdruck $\frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$ im Satz von Taylor heißt *Lagrange-Restglied*, oder *Restglied nach Lagrange*. Je kleiner dieses Restglied ist, desto besser wird $f(x)$ durch $Tf_{x_0,n}(x)$ approximiert.

Beweis vom Satz von Taylor 8.3.8. Sei also $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar. Weiter seien $x_0 \neq x$ aus I *festgewählte* Elemente. Insbesondere betrachten wir hier das Element x nicht als Variable von f. Da $x \neq x_0$ ist, ist sicher $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \neq 0$. Es gibt also ganz sicher eine reelle Zahl $R \in \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = Tf_{x_0,n}(x) + R \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.7}$$

(Dieses R ist schlicht $(f(x) - Tf_{x_0,n}(x))/\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$).

Wir müssen zeigen, dass es ein $c_{x,n}$ zwischen x und x_0 gibt,
so dass $R = f^{(n+1)}(c_{x,n})$ gilt.

Bevor Sie weiterlesen: Stellen Sie sicher, dass Sie mit dem letzten Satz einverstanden sind! Vergleichen Sie dazu einfach die Gleichung, die wir zeigen wollen, mit der Gleichung (8.7).
Wir betrachten nun die Funktion

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad t \mapsto f(x) - Tf_{t,n}(x) - R \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - R \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - R \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (8.8) \end{aligned}$$

Da jeder einzelne Summand aus (8.8) differenzierbar in t ist, ist auch g differenzierbar auf I. WICHTIG: Hier ist x eine feste reelle Zahl. Unsere Variable heißt t.

Wir stellen fest:

$$g(x) = f(x) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \underbrace{(x-x)^k}_{=0} - R \cdot \underbrace{\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!}}_{=0} = 0$$

und

$$g(x_0) = f(x) - Tf_{x_0,n}(x) - R \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{(8.7)}{=} 0.$$

Damit erfüllt g die Voraussetzungen vom Satz von Rolle 8.2.9 und es gibt ein $c_{x,n}$ zwischen x und x_0, mit

$$g'(c_{x,n}) = 0. \tag{8.9}$$

Damit ist der Beweis so gut wie fertig. Wir müssen nur noch die Ableitung von g berechnen. Beachten Sie, dass die Variable der Funktion g in diesem Fall t heißt – und nicht x! Weiter werden wir ausnutzen, dass $(f^{(k)})'(t) = f^{(k+1)}$ und $((x-t)^n)' = \underbrace{(-1)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{n(x-t)^{n-1}}_{\text{äußere Ableitung}}$ ist. Die folgende Rechnung sieht scheußlich aus, aber lassen Sie sich davon nicht abschrecken. Das liegt nur daran, dass ich (fast) jeden kleinen Rechenschritt mit aufgeführt habe. Im besten Fall berechnen Sie $g'(t)$ einfach selbst und kontrolieren dann ihr Ergebnis mit dem folgenden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \left(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - R \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right)' \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)' - R \cdot (-1) \cdot (n+1) \cdot \frac{(x-t)^n}{(n+1)!} \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k(x-t)^{k-1} \right) + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} \right) + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
&= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (x-t)^{k-1} + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
&\overset{\text{Indexshift}}{=} -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
&= -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \underbrace{\frac{f^{(0+1)}(t)}{0!} \cdot (x-t)^0}_{=f'(t)} + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + R \cdot \frac{(x-t)^n}{n!} = (R - f^{(n+1)}(t)) \cdot \frac{(x-t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

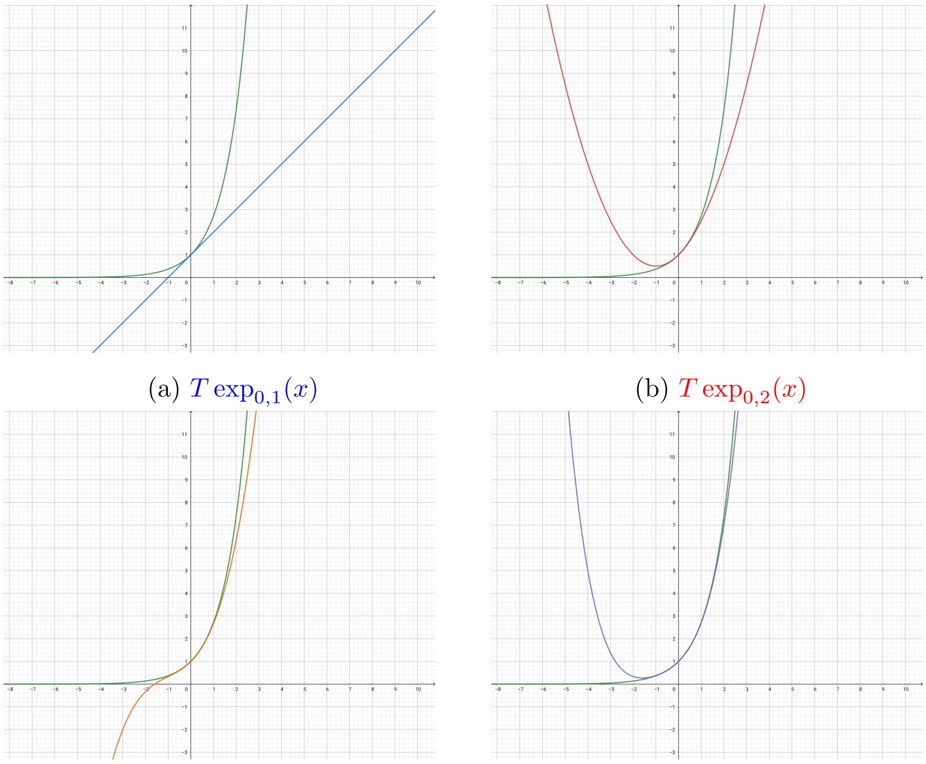
Mit (8.9) wissen wir also, dass ein $c_{x,n}$ zwischen x und x_0 existiert, mit

$$
0 = g'(c_{x,n}) = (R - f^{(n+1)}(c_{x,n})) \cdot \underbrace{\frac{(x-c_{x,n})^n}{n!}}_{\neq 0}.
$$

Für dieses $c_{x,n}$ gilt also $R = f^{(n+1)}(c_{x,n})$. Das ist genau das, was wir zeigen wollten (vgl. (8.7))! Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung 8.3.10. Um Taylor-Polynome einer Funktion f zu bilden, brauchen wir eine reelle Zahl x_0 aus dem Definitionsbereich unserer Funktion f. Die Koeffizienten der Taylor-Polynome sind dann von der Form $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Wir sollten also im Idealfall x_0 so wählen, dass wir $f^{(k)}(x_0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ kennen.

8.3.11. Wir betrachten die Exponentialfunktion exp. Für welches x_0 kennen wir ale Werte $\exp^{(k)}(x_0)$? Natürlich für $x_0 = 0$. Denn es ist $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wie wir schon in Beispiel 8.3.7 festgestellt haben, ist $T\exp_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$.
$T\exp_{0,1}(x)$ ist schlicht die Tangente von exp an der Stelle $x = 0$.



(a) $T\exp_{0,1}(x)$ (b) $T\exp_{0,2}(x)$

(c) $T\exp_{0,3}(x)$ (d) $T\exp_{0,4}(x)$

Abbildung 8.3: Der Graph der Exponentialfunktion exp ist stets in grün dargestellt. Wir sehen, dass die Taylor-Polynome diesen Graphen in der Nähe der Null immer besser annähern. In Abbildung (d) ist mit bloßem Auge kein Unterschied der beiden Grphen im Intervall $[-1, 1]$ zu erkennen.

Wie können wir nun die Taylor-Polynome nutzen um gute Approximationen von e^x zu berechnen? Wir veranschaulichen das am Beispiel $e^{1/3}$. Es ist

$$T\exp_{0,4}(\frac{1}{3}) = 1 + \frac{1/3}{1!} + \frac{(1/3)^2}{2!} + \frac{(1/3)^3}{3!} + \frac{(1/3)^4}{4!} = 1.395576\ldots$$

Mit dem Satz von Taylor 8.3.8 wissen wir weiter, dass für ein $c \in (0, \frac{1}{3})$ gilt

$$|e^{1/3} - T\exp_{0,4}(\frac{1}{3})| = |\frac{\exp^{(5)}(c)}{5!} \cdot (\frac{1}{3})^5| = \frac{e^c}{5! \cdot 3^5}.$$

Da $c \in (0, \frac{1}{3})$ liegt, wird dieser Wert besonders groß, wenn wir $c = \frac{1}{3}$ setzen (beachten Sie dass die Exponentialfunktion monoton wächst). Benutzen wir weiter die besonders grobe Abschätzung $e^{1/3} < e^1 < 3$ folgern wir

$$|e^{1/2} - T\exp_{0,4}(\frac{1}{3})| < \frac{e^{1/3}}{5! \cdot 3^5} < \frac{1}{5! \cdot 3^4} = \frac{1}{9720} = 0.000102\ldots$$

Die Werte $e^{\frac{1}{3}}$ und $T\exp_{0,4}(\frac{1}{3})$ unterscheiden sich also nur um einen Fehler, der kleiner ist als 0.00011. Insbesondere stimmen die beiden Werte auf den ersten drei Nchkommastellen überein. Wir wissen also, dass $e^{1/3} = 1.395\ldots$ ist. Das haben wir nur mit Hilfe eines Polynoms – also nur mit den Grundrechenarten – herausgefunden.

Beispiel 8.3.12. Das nächste Beispiel machen wir etwas kürzer. Es ist

$$\begin{aligned} T\cos_{0,3}(x) &= \cos(0) + \frac{\cos'(0)}{1!}x^1 + \frac{\cos''(0)}{2!}x^2 + \frac{\cos'''(0)}{3!}x^3 \\ &= \cos(0) - \frac{\sin(0)}{1!}x - \frac{\cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin(0)}{3!}x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 = T\cos_{0,2}(x) \end{aligned}$$

Da $\sin(0) = 0$ ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $T\cos_{0,2n+1}(x) = T\cos_{0,2n}(x)$ ist. Wie unterscheiden sich nun $\cos(x)$ und $T\cos_{0,8}(x)$ auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$? Wir nutzen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die n-te Ableitung von $\cos(x)$ eine der Funktionen $\pm\cos(x)$ oder $\pm\sin(x)$ ist. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist somit $|\cos^{(n)}(c)| \leq 1$. Sei nun $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ beliebig. Dann gibt es ein c zwischen 0 und x für das gilt

$$|\cos(x) - \underbrace{T\cos_{0,8}(x)}_{=T\cos_{0,9}(x)}| = \left|\frac{\cos^{(10)}(c)}{10!} \cdot x^{10}\right| \leq \left|\frac{x^{10}}{10!}\right| \leq \frac{(1/2\pi)^{10}}{10!} < 0.00003.$$

Um also $\cos(x)$ für ein beliebiges $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ auf die ersten drei Nachkommastellen genau zu berechnen müssen wir lediglich das Polynom $T\cos_{0,8}$ vom Grad 8 an x auswerten. Wenn wir uns jetzt noch an die Gleichung $\cos(x) = -\cos(x \pm \pi)$ erinnern, bemerken wir, dass das ausreichend ist um für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert $\cos(x)$ bis auf drei Nachkommastellen zu bestimmen. (Z.B.: $\cos(4) = -\cos(4 - \pi)$ und $4 - \pi \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Damit ist $\cos(4)$ ungefähr gleich $-T\cos_{0,8}(4 - \pi) = -0.65364\ldots$.)

Bemerkung 8.3.13. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig-oft differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in I$. Der Satz von Taylor 8.3.8 garantiert für jedes

$n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $c_{x,n}$ zwischen x und x_0, so dass $f(x) - Tf_{x_0,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ ist. Wenn diese Differenz mit wachsendem n gegen Null konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_{x,n})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$$

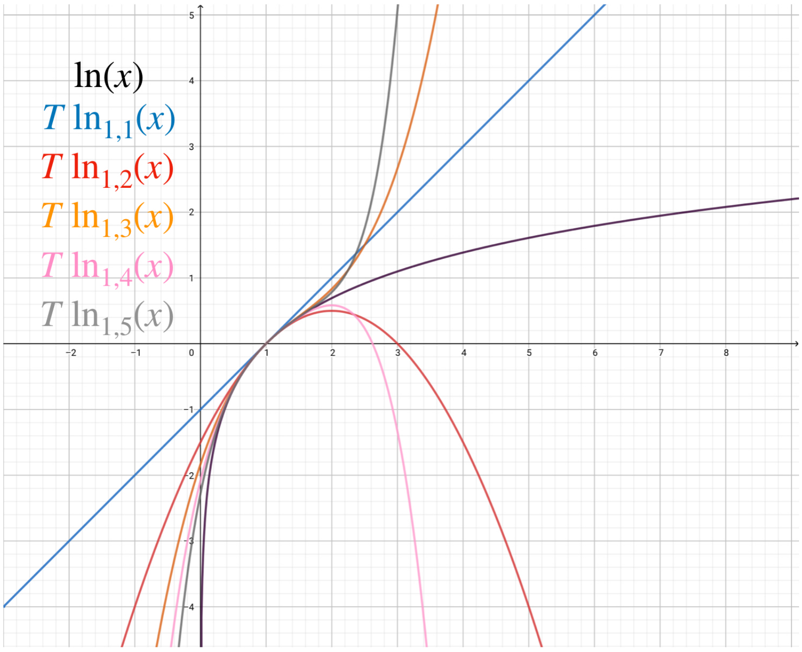
gilt, dann können wir $f(x)$ beliebig genau durch Taylor-Polynome annähern. Das funktioniert zum Beispiel für die Funktionen exp, cos und sin.

8.3.14. Wir schauen uns den natürlichen Logarithmus ln noch einmal an. Beachten Sie, dass wir keine Formel zur Berechnung des Logarithmus kennen. Die Zahl $y = \ln(x)$ ist einfach nur die reelle Zahl, die $e^y = x$ erfüllt.

Mit Lemma 8.3.2 ist es einfach die Taylor-Polynome von ln hinzuschreiben. Zunächst überlegen wir uns für welches x_0, wir die Werte $\ln(x_0)$, $\ln'(x_0)$, $\ldots$ kennen. Den einzigen Wert des natürlichen Logarithmus, den wir ganz explizit kennen, ist $\ln(1) = 0$. Wir setzen also $x_0 = 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$T\ln_{1,n}(x) = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Schauen wir uns die Graphen der ersten Taylor-Polynome von ln an der Stelle $x_0 = 1$ mal an:



Im Intervall $(0, 2)$ scheinen diese Taylor-Polynome den Graphen von ln gut anzunähern. Für $x > 2$ scheinen die Approximationen mit wachsendem n immer schlechter zu werden.
Für $x = 3$ gibt es nach dem Satz von Taylor 8.3.8 ein $c_{3,n} \in (1, 3)$, mit

$$|\ln(3) - T\ln_{1,n}(3)| = \left| \frac{\ln^{(n+1)}(c_{3,n})}{(n+1)!} 2^{n+1} \right| \overset{8.3.2}{=} \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{2}{c_{3,n}} \right)^{n+1}. \quad (8.10)$$

Wir müssen im schlimmsten Fall davon ausgehen, dass $c_{3,n}$ nah an der 1 liegt. In diesem Fall konvergiert $|\ln(3) - T\ln_{1,n}(3)|$ gegen unendlich. Wir können also $\ln(3)$ nicht ohne weiteres beliebig gut mit Hilfe von Taylor-Polynomen approximieren.

Satz 8.3.15. *Für jedes $x \in (1, 2]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(x) - T\ln_{1,n}(x)) = 0.$$

Für alle $x \in (1, 2]$ kann $\ln(x)$ daher beliebig gut durch Taylor-Polynome approximiert werden.

Beweis. Sei $x \in (1, 2]$. Genau wie in (8.10) sehen wir mit dem Satz von

Taylor 8.3.8, dass es ein $c_{1,n} \in (1,x)$ gibt, mit

$$|\ln(x) - T\ln_{1,n}(x)| = \underbrace{\frac{1}{(n+1)c_{1,n}^{n+1}}}_{\leq \frac{1}{n+1}} \cdot \underbrace{(x-1)}_{\in(0,1]}^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 8.3.16. Ist nun $x \in (0,\infty)$ beliebig, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, mit $2^k x \in (1,2]$. Weiter ist

$$\ln(x) = \ln((2^k \cdot x) \cdot 2^{-k}) \overset{7.1.6}{=} \ln(2^k x) + \ln(2^{-k}) \overset{7.1.6}{=} \ln(2^k x) - k\ln(2).$$

Der Wert $\ln(2)$ kann als natürliche Konstante wie π und e angesehen werden, der mit einer sehr großen Genauigkeit abgespeichert wird. Damit kann nun $\ln(x)$ durch $T\ln_{1,n}(\underbrace{2^k x}_{\in(1,2]}) - k\ln(2)$ abgeschätz werden.
In der Praxis rechnet Ihr Taschenrechner den Logarithmus etwas anders aus um Rundungsfehler bei großen k zu verhindern.

Beispiel 8.3.17. Beachten Sie, dass das Taylor-Polynom von f der Ordnung n an der Stelle x_0 das Polynom vom Grad $\leq n$ ist, das f ander Stelle x_0 am besten imitiert. Wenn unsere Funktion f sich nun ganz anders als ein Polynom verhält, dann liefern Taylor-Polynome (fast) keine Informationen über f.
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig-oft differenzierbar. Dass dies für alle $x \neq 0$ gilt ist offensichtlich, für $x = 0$ kann man es mit der Definition von Differenzierbarkeit beweisen. Dann stellt man fest, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$. Insbesondere ist $Tf_{0,n}$ konstant gleich Null für alle n.

Wir lernen noch eine Anwendung des Satzes von Taylor 8.3.8 kennen – nämlich einer Verallgemeinerung von Satz 8.2.22.

Korollar 8.3.18. *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig-oft differenzierbare Funktion. Sei $c \in I$, mit $f'(c) = 0$. Betrachte (wenn der Wert existiert)*

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} | f^{(k)}(c) \neq 0\}.$$

Dann gilt

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(c) > 0$, dann besitzt f an der Stelle c ein lokales Minimum.

(b) Ist n gerade und $f^{(n)}(c) < 0$, dann besitzt f an der Stelle c ein lokales Maximum.

(c) Ist n ungerade, dann ist c keine Extremstelle von f.

Beweis. Wir beweisen nur Teil (a). Sei also $c \in I$ und $0 = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c)$ und $f^{(n)}(c) > 0$, mit n gerade. Dann ist

$$Tf_{c,n-1}(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(c)}{k!}}_{=0} (x-c)^k = f(c).$$

Mit dem Satz von Taylor wissen wir, dass ein $c_{x,n}$ zwischen c und x existiert mit

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(c_{x,n})}{k!}(x-c)^n. \tag{8.11}$$

Die Funktion $f^{(n)}(x)$ ist differenzierbar und damit stetig (vgl. Satz 8.1.7. Da $f^{(n)}(c) > 0$ ist und f als stetige Funktion keine Sprungstellen hat, muss $f^{(n)}(x) > 0$ auf einem kleinen Intervall um c gelten. Sagen wir $f^{(n)}(x) > 0$ für alle $x \in (c-\varepsilon, x+\varepsilon)$, für ein $\varepsilon > 0$. Da $c_{x,n}$ zwischen x und c liegt, folgt $f^{(n)}(c_{x,n}) > 0$ für alle $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Weiter ist n gerade und somit gilt $(x-c)^n \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt aus (8.11), dass $f(x) \leq f(c)$ ist, für alle $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Das bedeutet nichts anderes, als dass f an der Stelle c ein lokales Minimum annimmt. □

Beispiel 8.3.19. Wir kommen ein letztes mal zurück zu Beispiel 8.2.6. Die Funktion, die wir betrachten ist also $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$. Es ist

$f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$, $f''(x) = 2x^3 - 4x$ und $f'''(x) = 6x^2 - 4$. Insbesondere wissen wir also

$$0 = f'(0) = f''(0) \quad \text{und} \quad f^{(3)}(0) \neq 0.$$

Da 3 ungerade ist, wissen wir aus Korollar 8.3.18, dass f an der Stelle 0 keine Extremstelle besitzt.

8.4 Regel von L'Hospital

Die Funktion $\sqrt{x}$ wächst schneller als die Funktion $\ln(x)$. Daher vermuten wir, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \infty$ gilt. Das Wachstum einer Funktion messen wir mit der Ableitung der Funktion. Das ist der Grundgedanke hinter dem folgenden Theorem.

Theorem 8.4.1 (Regel von L'Hospital)**.** *Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ so, dass die Werte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn definiert sind. Sei weiter $g(x') \neq 0$ für alle $x \in I$. Falls gilt*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, *oder*

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, *oder*

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$,

dann gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn) existiert.

Bemerkung 8.4.2. Dieses Theorem gilt genauso auch für linksseitige- und rechtsseitige Grenzwerte.

Auf den Beweis verzichten wir in dieser Vorlesung.

Beispiel 8.4.3. Wir betrachten $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$. Die Funktionen in Zahler und Nenner sind differenzierbar und es gilt $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty$. Wir berechnen nun den Grenzwert der Ableitungen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x})'}{\ln'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{x} = \infty.$$

Damit folgt aus der Regel von L'Hospital 8.4.1, dass auch $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln(x)} = \infty$ ist.

Beispiel 8.4.4. Wir berechnen nochmal (vgl. Lemma 8.1.13) den Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. Es ist $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} x = 0$. Wir rechnen

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

Mit der Regel von L'Hospital 8.4.1 folgt, dass auch $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ ist.

Beispiel 8.4.5. Wir betrachten Die Funktion $x \mapsto \sin(x)^x$ auf dem Intervall $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Ziel ist es den Grenzwert $\lim_{x\searrow 0}\sin(x)^x$ zu berechnen. Das sieht auf den ersten Blick nicht nach einem Anwendungsbereich der Regel von L'Hospital aus. Aber wir betrachten die Funktion etwas genauer. Es gilt

$$\sin(x)^x = \exp(x\cdot\ln(\sin(x))).$$

Da exp stetig ist, gilt somit

$$\lim_{x\searrow 0}\sin(x)^x = \lim_{x\searrow 0}\exp(x\cdot\ln(\sin(x))) = \exp(\lim_{x\searrow 0} x\cdot\ln(\sin(x))) \tag{8.12}$$

Wir müssen also $\lim_{x\searrow 0} x\cdot\ln(\sin(x))$ berechnen. Das sieht schon eher nach dem Quotienten zweier Funktionen aus, denn

$$x\cdot\ln(\sin(x)) = \frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(\sin(x))}{-\frac{1}{x}}. \tag{8.13}$$

Da $\sin(x) = 0$ ist, gilt $\lim_{x\searrow 0}\ln(\sin(x)) = \lim_{y\searrow 0}\ln(y) = -\infty$. Wir wissen auch, dass $\lim_{x\searrow 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ gilt. Damit sind die Voraussetzungen der Regel von L'Hospital erfüllt. Wir berechnen also

$$\lim_{x\searrow 0} -\frac{(\ln(\sin(x)))'}{(-\frac{1}{x})'} = -\lim_{x\searrow 0}\frac{\cos(x)\cdot\frac{1}{\sin(x)}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)}. \tag{8.14}$$

Diesen Grenzwert kennen wir immer noch nicht. Wir benutzen L'Hospital also einfach nochmal. Dies funktioniert, da $\lim_{x\searrow 0} x^2\cos(x) = \lim_{x\searrow 0}\sin(x) = 0$ ist. Wir rechnen also

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{(x^2\cos(x))'}{\sin'(x)} = \lim_{x\searrow 0}\frac{2x\cos(x) - x^2\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\searrow 0} 2x - \frac{x^2\sin(x)}{\cos(x)} = 0. \tag{8.15}$$

Mit der Regel von L'Hospital gilt nun auch $\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2\cos(x)}{\sin(x)} = 0$. Wieder mit der Regel von L'Hospital und (8.14) folgt, dass auch $\lim_{x\searrow 0} -\frac{\ln(\sin(x))}{-\frac{1}{x}} = 0$ ist. Mit (8.12) folgt $\lim_{x\searrow 0} x\cdot\ln(\sin(x)) = 0$. Setzen wir das in (8.12) ein, erhalten wir endlich

$$\lim_{x\searrow 0}\sin(x)^x = \exp(\lim_{x\searrow 0} x\cdot\ln(\sin(x))) = \exp(0) = 1.$$

Beispiel 8.4.6. Wir wollen den folgenden Grenzwert (wenn es ihn denn gibt) berechnen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(x)}{2x+\cos(x)}.$$

Es ist $\lim_{x\to\infty}(2x+\sin(x)) = \lim_{x\to\infty}(2x+\cos(x)) = \infty$. Wir versuchen L'Hospital anzuwenden. Dazu betrachten wir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+\sin(x))'}{(2x+\cos(x))'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)}.$$

Dieser Grenzwert existiert aber nicht! In diesem Fall sagt die Regel von L'Hospital nichts aus. Wir dürfen daraus <u>nicht</u> schließen, dass auch $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(x)}{2x+\cos(x)}$ nicht existiert.

Tatsächlich gilt

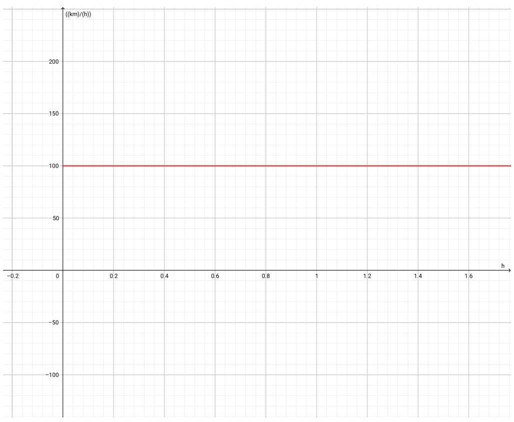
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin(x)}{2x+\cos(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{\sin(x)}{x})}{x(2+\frac{\cos(x)}{x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{2+\frac{\cos(x)}{x}} = 1.$$

Kapitel 9

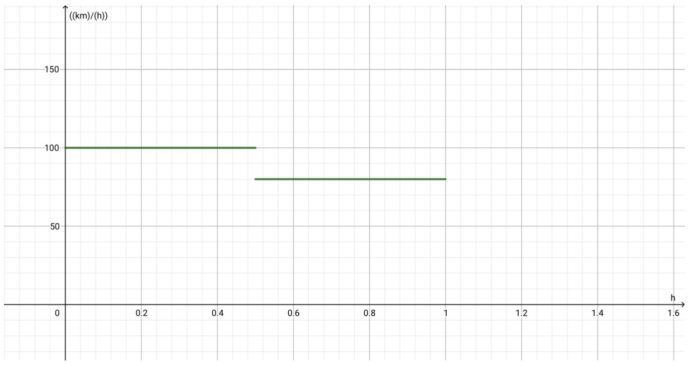
Integration

$\int_a^b g'(x) \cdot f(g(x)) \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \mathrm{d}x$

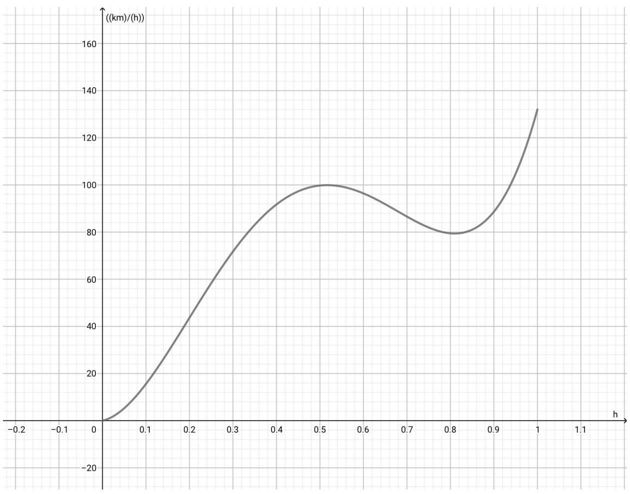
Wenn Sie eine Stunde lang konstant 100km/h gefahren sind, dann haben Sie genau 100km zurückgelegt. Das ist offensichtlich die Definition von „100km/h“. Die triviale Rechnung, die dahinter steckt ist (100km/h)· (1h)=100km. Es entspricht also dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der konstanten Funktion $x \mapsto 100$ und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 1]$.



Wenn Sie eine halbe Stunde lang konstant 100km/h gefahren sind und eine halbe Stunde konstant 80km/h, dann haben Sie genau $(100\text{km/h}) \cdot (0.5\text{h}) + (80\text{km/h}) \cdot (0.5\text{h}) = 90\text{km}$ gefahren. Betrachten wir die Funktion, die jedem Zeitpunkt Ihre aktuelle Geschwindigkeit zuordnet, so sehen wir, dass diese 90 wieder dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen dieser Funktion und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 1]$ entspricht.



Bemerkung 9.0.1. Das gilt auch ganz allgemein. Ist f die Funktion, die jedem Zeitpunkt Ihre aktuelle Geschwindigkeit zuordnet, so ist die Anzahl der Kilometer, die Sie nach einer Stunde zurückgelegt haben gleich dem Flächeninhalt des Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[0, 1]$. Ein etwas realistischer Graph als die beiden in den letzten Abbildungen wäre zum Beispiel dieser hier:



Das Ziel für diese Kapitel ist es für eine gegebene reelle Funktion f den Flächeninhalt zu berechnen, den diese Funktion mit der x-Achse einschließt. Flächen die unterhalb der x-Achse liegen solen dabei als negativer Flächeninhalt gewertet werden.

9.1 Treppenfunktionen

Den Flächeninhalt, den eine konstante Funktion $f(x) = c$ mit der x-Achse auf einem Interval $[a, b]$ einschließt, auszurechnen, ist ganz einfach. Gesucht ist einfach nur der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen c und $b - a$ – das ist natr̈lich gleich $c \cdot (b - a)$. In diesem Abschnitt studieren wir die nächst einfacheren Funktionen.

Definition 9.1.1. Sei $[a, b]$ ein Intervall, mit reellen Zahlen $a < b$. Eine *Unterteilung* von $[a, b]$ ist gegeben durch endlich viele reelle Zahlen $x_0, \ldots, x_n$, mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

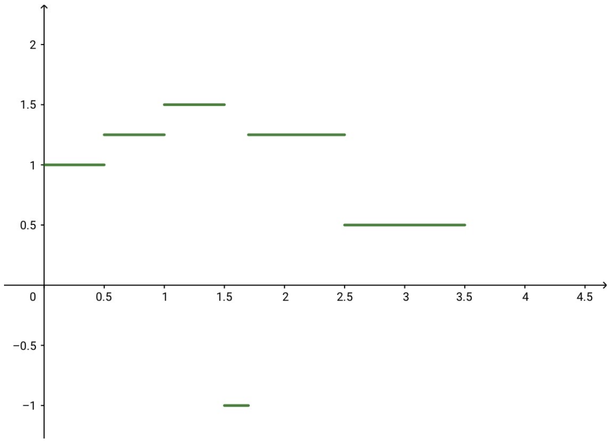
Definition 9.1.2. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls eine Unterteilung $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ von $[a, b]$ existiert, so dass φ konstant ist auf den Intervallen (x_{i-1}, x_i), für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir setzen

$$T[a, b] : \{\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} | \varphi \text{ ist eine Treppenfunktion}\}.$$

Bemerkung 9.1.3. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist also eine Treppenfunktion, wenn es reelle Zahlen $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ und $c_1, \ldots, c_n$ gibt, mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $\varphi(x) = c_i$, falls $x \in (x_{i-1}, x_i)$ ist.

Treppenfunktionen können also als *stückweise konstant* beschrieben werden. Beachten Sie, dass wir nichts über die Werte $\varphi(x_i)$ aussagen. Diese werden für uns keine Rolle spielen.

Bemerkung 9.1.4. Eine Treppenfunktion hat ihren Namen von der Form igres Graphen. Dieser kann aussehen, wie eine Treppe. Die Stufen müssen aber keinesfalls gleichgroß sein. Auch können die einzelnen Stufen riesige Sprünge machen. Ein Beispiel einer Treppenfunktion sehen Sie hier:



Den Flächeninhalt, den dieser Graph mit der x-Achse auf dem Intervall $[0, 3.5]$ einschließt ist schnell berechnet. Wir berechnen einfach die Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke und addieren diese. Wir rechnen is diesem Beispiel also

$$1 \cdot 0.5 + 1.25 \cdot 0.5 + 1.5 \cdot 0.5 - 1 \cdot 0.2 + 1.25 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 1$$

Dieses einfache Beispiel führt uns nun zur wichtigsten Definition des Kapitels.

Definition 9.1.5. Sei $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. D.h. Es gibt eine Unterteilung $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ von $[a, b]$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, mit $\varphi(x) = c_i$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Das *Integral von φ über $[a, b]$* ist

$$\int_a^b \varphi(x) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Beachten Sie, dass das nach unseren Vorüberlegungen exakt der Flächeninhalt der Fläche ist, die zwischen der x-Achse und dem Graphen von φ im Intervall $[a, b]$ liegt.

Lemma 9.1.6. *Seien $\varphi, \Psi \in T[a, b]$. Dann sind auch die Funktionen $\varphi + \Psi$ und $\varphi \cdot \Psi$ Treppenfunktionen in $T[a, b]$.*

Beweis. Der Beweis folgt im wesentlichen daraus, dass Summe und Produkt von konstanten Funktionen wieder konstant sind. Sind nun zwei Treppenfunktionen gegeben, so gehen wir zu einer gemeinsamen feineren Unterteilung von $[a, b]$ über und müssen nur noch konstante Teile der Funktionen addieren und multiplizieren. Die Details überlassen wir den fleißigen Leser*innen. $\square$

Proposition 9.1.7. *Seien φ und Ψ Treppenfunktionen aus $T[a,b]$. Dann gilt:*

(a) $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^c \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_c^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ *für alle* $c \in (a,b)$.

(b) $\int_a^b \lambda \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\int_a^b \varphi(x) + \Psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \Psi(x)\mathrm{d}x$.

Beweis. Alle Aussagen sind mehr oder weniger offensichtlich[1] □

9.2 Das Riemann-Integral

Wir haben gerade gelernt, wie wir den Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen einer Treppenfunktion berechnen. Das war auch nicht besonders schwierig. Die Idee ist nun, dass wir eine gegebene Funktion f durch Treppenfunktionen approximieren. Dazu betrachten wir einerseits Treppenfunktionen deren Graph immer unterhalb von f verläuft und andererseits Treppenfunktionen, deren Graph immer oberhalb von f verläuft.

Notation 9.2.1. Seien $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir schreiben $f \leq g$, falls für alle $x \in [a,b]$ die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ gilt. Wir schreiben entsprechend $f \geq g$, falls $g \leq f$ gilt.
Wir nennen die Funkion f *beschränkt*, falls es eine konstante (Funktion) c gibt, mit $-c \leq f \leq c$.

Eine Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ ist also beschränkt, wenn wir Ihren Graphen in ein Rechteck einzeichnen können.

Lemma 9.2.2. *Sind $f,g,h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ drei Funktionen mit $f \leq g$ und $g \leq h$, dann gilt auch $f \leq h$.*

[1]Man sollte in der Mathematik eigentlich nie das Wort *offensichtlich* benutzen. Hier bedeutet es, dass die Aussagen mit der Interpretation des Flächeninhaltes anschaulich erklärt werden können, die Beweise ganz einfach aus der Definition des Integrals folgen und dass der Autor keine Lust hat eins von beiden Vorzuführen.

Beweis. Das folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft des Symbols „$\leq$“ auf den reellen Zahlen. Denn für jedes $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \leq g(x)$ und $g(x) \leq h(x)$. Dann gilt aber natürlich auch $f(x) \leq h(x)$ (vgl. Proposition 2.2.6(b)). $\square$

Bemerkung 9.2.3. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist die Menge

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x | \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \leq f \right\}$$

eine nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Denn: Da f beschränkt ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, mit $f(x) \leq c$ für alle $x \in [a,b]$. Ist nun φ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$, dann ist auch $\varphi(x) \leq c$ für alle $x \in [a,b]$. Die Definition des Integrals für Treppenfunktionen 9.1.5 impliziert sofort $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x \leq c \cdot (b-a)$. Damit ist $c \cdot (b-a)$ eine obere Schranke der angegebenen Menge.
Damit existiert das Supremum dieser Menge in $\mathbb{R}$!
Genauso sehen wir, dass die Menge

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x | \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \geq f \right\}$$

ein Infimum in $\mathbb{R}$ besitzt.

Definition 9.2.4. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Das *Unterintegral von f über* $[a,b]$ ist die reelle Zahl

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x | \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \leq f \right\}.$$

Das *Oberintegral von f über* $[a,b]$ ist die reelle Zahl

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x | \varphi \in T[a,b] \wedge \varphi \geq f \right\}.$$

Wir haben gerade eingesehen, dass diese Werte tatsächlich existieren.

Definition 9.2.5. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wenn das Oberintegral von f gleich dem Unterintegral von f ist, dann heißt f *Riemann-integrierbar*. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

und nennen diesen Wert das *Riemann-Integral von f über* $[a,b]$.

Bemerkung 9.2.6. Wir nennen eine Riemann-integrierbare Funktion auch kurz nur *integrierbar* und den Wert $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ nennen wir *Integral* von f über $[a,b]$.

Beispiel 9.2.7. Man braucht schon etwas Fantasie um eine beschränkte Funktion zu konstruieren, die nicht integrierbar ist. Wir betrachten

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Da jedes nicht-triviale Intervall sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthält, gilt für jede Treppenfunktion $\varphi \in T[0,1]$, mit $\varphi \leq f$, die Ungleichung $\varphi \leq 0$. Jede Treppenfunktion $\varphi \in T[0,1]$, mit $\varphi \geq f$, erfüllt stattdessen $\varphi \geq 1$. Es folgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{und} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Damit ist f nicht integrierbar.

Satz 9.2.8. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Den Beweis lassen wir weg. □

Da Treppenfunktionen stückweise definiert sind und das Integral einer Funktion mit Hilfe von Treppenfunktionen berechnet wird, folgt sofort:

Korollar 9.2.9. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise definierte Funktion, in der jedes Teilstück stetig ist (solche Funktionen nennen wir* stückweise stetig*). Dann ist f integrierbar über $[a,b]$.*

Es gibt noch mehr integrierbare Funktionen:

Satz 9.2.10. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monotone beschränkte Funktion. Dann ist f integrierbar über $[a,b]$.*

Notation 9.2.11. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann setzen wir

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Die Rechenregeln für Treppenfunktionen aus Proposition 9.1.7 lassen sich ganz einfach auf beliebige integrierbare Funktionen verallgemeinern. Es ergibt sich:

Satz 9.2.12. *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:*

(a) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ *für alle* $c \in (a,b)$.

(b) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Weiter gilt:

Proposition 9.2.13. *Sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \leq g$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Beweis. Das ist anschaulich klar, da sich der Flächeninhalt verringert, wenn wir den Graphen nach unten schieben. Daher lassen wir den Beweis wieder einmal weg. □

Wir kommen nun zum ersten wichtigen Resultat zur Integrierbarkeit.

Theorem 9.2.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$, mit*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b-a).$$

Bemerkung 9.2.15. Bevor wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung beweisen, sollten wir kurz klären, was er eigentlich aussagt. Er besagt, dass es ür eine stetige Funktion f auf $[a,b]$ einen Wert $c \in (a,b)$ gibt, so dass der Flächeninhalt, den der Graph von f (auf $[a,b]$) mit der x-Achse einschließt, genau so groß ist, wie das Rechteck mit den Seitenlängen $f(c)$ und $b-a$. Beachte, dass $b-a$ genau die Länge des Intervalls ist, auf dem wir die Funktion f betrachten.

Für den Autofahrergraphen aus Bemerkung 9.0.1 bedeutet das: Wenn Sie eine Stunde gefahren sind, dann hatten Sie zu irgendeinem Zeitpunkt t die durchschnittliche Geschwindigkeit $f(t)$ Ihrer Reise. D.h.: Wären Sie die ganze Zeit genau $f(t)$km/h gefahren, hätten Sie am Ende der Stunde dieselbe Strecke zurückgelegt.

Beweis vom Mittelwertsatz der Integralrechnung. Sei also $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f nach dem Satz vom Minimum und Maximum 6.4.6 ein globales Maximum M und ein globales Minimum m an. Es gilt also

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Integrieren wir die drei Funktionen (wir fassen m und M als konstante Funktionen auf) liefert

$$m(b-a) \overset{9.1.5}{=} \int_a^b m \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b M \mathrm{d}x \overset{9.1.5}{=} M(b-a).$$

Teilen wir diese Ungleichungskette durch den positiven Wert $b-a$ erhalten wir

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq M.$$

Da f stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz 6.4.4, dass alle Werte zwischen m und M von f angenommen werden. Insbesondere existiert ein $c \in (a, b)$, mit

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung wieder mit $b-a$ erhalten wir die gewünschte Aussage. $\square$

9.3 Integrieren und Ableiten

Wir möchten uns langsam daran machen, Integrale tatsächlich zu berechnen. Dazu werden wir eine wunderbare Verbindung zur Theorie der Differenzierbarkeit einer Funktion aufdecken.

Definition 9.3.1. Sei I ein Intervall. Eine Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* der Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Beispiel 9.3.2.

- Eine Stammfunktion von $f(x) = e^x$ ist $F(x) = e^x$, denn $F'(x) = (e^x)' = e^x = f(x)$. Beachten Sie, dass auch $e^x + 1$ eine Stammfunktion von e^x ist.

- Wir betrachten nun $f(x) = x$. Da die Ableitung von $\frac{1}{2}x^2$ gleich x ist, ist $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = x$.

  Sei $b > 0$ irgendeine positiv reelle Zahl. Wenn wir den Flächeninhalt berechnen wollen, den $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, b]$ mit der x-Achse einschließt, dann müssen wir nur den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, f(0))$, $(b, 0)$ und $(b, f(b))$ berechnen. Da $f(b) = b$ gilt, ist das einfach nur die Hälfte des Quadrates mit Seitenlänge b. Dieses hat natürlich den Flächeninhalt $\frac{1}{2}b^2$. Es folgt

  $$\int_0^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2 = F(b).$$

  Dass das kein Zufall ist, werden wir im folgenden zeigen.

- Eine Stammfunktion von $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ist z.B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

Satz 9.3.3. *Ist $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist die Menge aller Stammfunktionen von f gegeben durch $\{F + c | c \in \mathbb{R}\}$.*

Beweis. Sei also F ein Stammfunktion von f. Dann gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$(F + c)'(x) = F'(x) + c'(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Damit ist auch $F + c$ eine Stammfunktion von f.
Sei nun G irgendeine Stammfunktion von f. Dann ist $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Die Ableitung der Funktion $F - G$ besitzt also überall die Steigung Null. Das bedeutet, dass $F - G$ eine konstante Funktion ist – sagen wir $F(x) - G(x) = -c$ für alle $x \in I$. Das bedeutet nichts anderes, als dass $G(x) = F(x) + c$ ist. Das mussten wir zeigen. □

Dieser Satz sagt uns: Kennen wir eine Stammfunktion, dann kennen wir alle Stammfunktionen.
Eine unmittelbare Folgerung aus der Tatsache $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ist

Lemma 9.3.4. *Ist $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und ist $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von g, dann ist $F+G$ eine Stammfunktion von $f+g$. Ist weiter $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist $\lambda \cdot F$ eine Stammfunktion von $\lambda \cdot f$.*

Wir sammeln Beispiele für Stammfunktionen.

$f(x)$	$F(x)$
x^α, für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha}x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$ auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{\alpha x}$, für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos(x)^2}$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\tan(x)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$

Tabelle 9.1: Die Funktion $F(x)$ ist stets *eine* Stammfunktion von $f(x)$. Wie wir daraus alle Stammfunktionen erzeugen, wissen wir seit gerade eben (Satz 9.3.3). Alle diese Formeln folgen unmittelbar aus den bekannten Formeln für die Ableitungen der Funktionen $F(x)$.

Beispiel 9.3.5. Für ein reelles Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ ist eine Stammfunktion gegeben durch $F(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.

Beweis. Das folgt sofort aus der Tatsache, dass $\frac{1}{k+1}x^{k+1}$ eine Stammfunktion von x^k ist in Verbindung mit Lemma 9.3.4. □

Beispiel 9.3.6. Um eine Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ zu finden, benutzen wir wieder $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Dann folgt mit den Formeln aus der Tabelle, dass

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

eine Stammfunktion von $\sqrt{x}$ ist.

Der nächste Satz gibt uns an, wie wir für stetige Funktionen eine Stammfunktion konstruieren können. Das ist zunächst nur von theoretischem Interesse, wird aber eine wichtige Anwendung haben.

Satz 9.3.7. *Sei I ein Intervall und $a \in I$ beliebig. Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist die Funktion*

$$F_a : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad t \mapsto \int_a^t f(x) \mathrm{d}x$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. Wir nehmen f und a aus der Formulierung des Satzes. Sei weiter $x_0 \in I$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass $F_a'(x_0) = f(x_0)$ ist. Wir rechenn also einfach drauflos:

$$\begin{aligned} F_a'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x}{h} \stackrel{9.2.12}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x}{h}. \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 9.2.14 gibt es ein c_h zwischen x_0 und $x_0 + h$, mit

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x = c_h(x_0 + h - x_0) = f(c_h) \cdot h.$$

Setzen wir beide Gleichungen zusammen erhalten wir

$$F_a'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_h) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(\lim_{h \to 0} c_h). \tag{9.1}$$

Da c_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegt, muss gelten $\lim_{h \to 0} c_h = x_0$. Setzen wir dies in Gleichung (9.1) ein, so erhalten wir wie gewünscht $F_a'(x_0) = f(x_0)$. Da dies für alle $x_0 \in I$ gilt, ist F_a tatsächlich eine Stammfunktion von f. □

Vorhang auf für den

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 9.3.8. *Sei $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Seien weiter $a < b \in I$. Dann ist f integrierbar über $[a, b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Wir schreiben auch $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Beweis. Wir nehmen an, dass f stetig ist. *Eine* Stammfunktion von f ist nach Satz 9.3.7 gegeben durch $F_a(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x$. Es folgt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \underbrace{\int_a^a f(x)\mathrm{d}x}_{=0} = F_a(b) - F_a(a). \tag{9.2}$$

Ist nun F irgendeine Stammfunktion von f, dann gibt es nach Satz 9.3.3 ein $c \in \mathbb{R}$, mit $F_a(x) = F(x) + c$. Setzen wir dies in (9.2) ein, erhalten wir

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Das war zu zeigen. $\square$

Jetzt haben wir einige Hilfsmittel zur Hand um Integrale tatsächlich berechnen zu können.

Beispiel 9.3.9. Gesucht ist der Wert $\int_3^7 x^2 - 1\mathrm{d}x$.
1. Schritt: Eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 - 1$ bilden.
Da wir für Polynome eine einfache Formel zur Erzeugung einer Stammfunktion haben (siehe Beispiel 9.3.5), können wir eine Stammfunktion von f einfach hinschreiben: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.
2. Schritt: Hauptsatz benutzen.
Es ist

$$\int_3^7 x^2 - 1\mathrm{d}x \overset{9.3.8}{=} F(7) - F(3) = (\frac{1}{3}7^3 - 7) - (\frac{1}{3}3^3 - 3) = \frac{304}{3} = 101 + \frac{1}{3}.$$

Beispiel 9.3.10. Gesucht ist der Wert $\int_3^7 xe^x\mathrm{d}x$.
1. Schritt: Eine Stammfunktion von $f(x) = xe^x$ bilden.
Hierfür haben wir noch keine Formel zur Hand. Da wir aber wissen, dass sich e^x beim Ableiten nicht verändert, probieren wir einfach mal aus, ob das vielleicht für xe^x auch gilt.[2] Es gilt mit der Produktregel

$$(xe^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x.$$

Damit ist xe^x keine Stammfunktion von xe^x. Sehen wir uns aber die Formel von eben genauer an, stellen wir schnell fest, was die Stammfunktion ist. Denn mit der selben Rechnung erhalten wir

$$(x - 1)e^x = (x - 1)' \cdot e^x + (x - 1) \cdot (e^x)' = e^x + (x - 1)e^x = xe^x.$$

[2]Wenn man nicht weiter weiß, muss man im schlimmsten Fall tatsächlcih einfach rechnen.

Damit ist $F(x) = (x-1)e^x$ eine Stammfunktion von xe^x.
<u>2. Schritt:</u> Hauptsatz benutzen.
Es ist

$$\int_3^7 xe^x \mathrm{d}x \overset{9.3.8}{=} F(7) - F(3) = (7e^7) - (3e^3) = 7616,1754\ldots$$

Im letzten Beispiel haben wir die Produktregel zum ableiten benutzt. Dann haben wir mit geschicktem raten die Stammfunktion gefunden. Natürlich wäre es eleganter auch für das bilden einer Stammfunktion eine Version der Produktregel zu haben. Das nächste Theorem können Sie als so eine Produktregel auffassen.

Theorem 9.3.11 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass f' stetig ist. Sei weiter G eine Stammfunktion von g. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = [f(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x) \mathrm{d}x.$$

Beweis. Seien f und g wie in der Voraussetzung. Da f' stetig ist, ist auch $f' \cdot G$ stetig, denn G ist als Stammfunktion sogar differenzierbar (und damit stetig). Sei nun $H(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x) \cdot G(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot G(x) - H(x))' &= f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot G'(x) - H'(x) \\ &= f'(x) \cdot G(x) + f(x) \cdot g(x) - f'(x) \cdot G(x) \\ &= f(x) \cdot g(x).\end{aligned}$$

Es ist also $f \cdot G - H$ eine Stammfunktion von $f \cdot g$. Mit dem Hauptsatz 9.3.8 gilt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x &= [f(x)G(x) - H(x)]_a^b = [f(x)G(x)]_a^b - [H(x)]_a^b \\ &= [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. □

Beispiel 9.3.12. Wir berechnen noch einmal $\int_a^b xe^x \mathrm{d}x$. Die Funktion, die wir integrieren wollen, ist sicher das Produkt von zwei Funktionen. Eine dieser Funktionen wird immer „aufgeleitet“, die andere wird erst nicht verändert und dann abgeleitet. Wir müssen also von einer der Funktionen eine Stammfunktion bilden können und die andere sollte beim ableiten einfacher werden. Da sich e^x beim ableiten nicht verändert, setzen wir

$$f(x) = x,\ g(x) = e^x,\ \Longrightarrow\ f'(x) = 1,\ G(x) = e^x.$$

Mit der partiellen Integration 9.3.11 folgt nun

$$\int_a^b xe^x \mathrm{d}x = [xe^x]_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x \mathrm{d}x = [xe^x]_a^b - [e^x]_a^b = [(x-1)e^x]_a^b.$$

Beispiel 9.3.13. Seien $0 < a < b$ reelle Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \underbrace{\ln(x)}_{=f(x)} \cdot \underbrace{1}_{=g(x)} \mathrm{d}x \overset{9.3.11}{=} [\underbrace{\ln(x)}_{=f(x)} \cdot \underbrace{x}_{=G(x)}]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{=G(x)} \mathrm{d}x \\ &= [\ln(x) \cdot x]_a^b - \int_a^b 1\mathrm{d}x = [\ln(x) \cdot x]_a^b - [x]_a^b \\ &= [x(\ln(x) - 1)]_a^b.\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\ln(x)$ ist also $x(\ln(x) - 1)$. Überprüfen Sie diese Aussage gerne selbst.

Wir betrachten noch ein letztes Beispiel.

Beispiel 9.3.14. Seien a und b beliebige reelle Zahlen. Wir wollen $\int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x$ berechnen. Da hier beide Faktoren gleich sind, ist $f(x) = g(x) = \sin(x)$. Damit folgt $f'(x) = \cos(x)$ und $G(x) = -\cos(x)$. Jetzt berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x &\overset{9.3.11}{=} [\sin(x) \cdot (-\cos(x))]_a^b - \int_a^b \cos(x) \cdot (-\cos(x))\mathrm{d}x \\ &= [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b + \int_a^b \cos(x)^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Jetzt könnten wir nochmal partielle Integration benutzen um das hintere Integral auszurechnen. Wir können aber auch die Gleichung $1 = \cos(x)^2 + \sin(x)^2$ benutzen (beides führt zum selben Ergebnis). Dann folgt:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x &= [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b + \int_a^b 1 - \sin(x)^2 \mathrm{d}x \\ &= [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b + \int_a^b 1\mathrm{d}x - \int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x \\ &= [-\sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b + [x]_a^b - \int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x \\ &= [x - \sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b - \int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x$ und teilen dann durch 2. Damit erhalten wir

$$\int_a^b \sin(x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x - \sin(x) \cdot \cos(x)]_a^b.$$

Wieder erhalten wir als Nebenprodukt, dass $\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$ eine Stammfunktion von $\sin(x)^2$ ist.

Neben der Produktregel hatten wir zum ableiten auch noch die Kettenregel 8.1.15 kennengelernt. Diese lautet $(f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$. Auch hierfür wollen wir eine Version zum „aufleiten“ haben.

Theorem 9.3.15 (Substitutionsregel I)**.** *Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $ayb \in \mathbb{R}$. Sei weiter $g : [a,b] \longrightarrow I$ differenzierbar, so dass g' stetig ist. Dann gilt*

$$\int_a^b g'(x) \cdot f(g(x)) \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \mathrm{d}x.$$

Beweis. Da $g([a,b]) \subseteq I$ ist, ist $f \circ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert. Sei nun F eine Stammfunktion von f (die existiert, da f stetig ist). Dann gilt

$$(F(g(x))' = g'(x) \cdot F'(g(x)) = g'(x) \cdot f(g(x)).$$

Es ist also $F(g(x))$ eine Stammfunktion von $g'(x) \cdot f(g(x))$. Mit dem Hauptsatz 9.3.8 gilt nun

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x) \cdot f(g(x)) \mathrm{d}x &= [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 9.3.16. Für $a, b \in \mathbb{R}$ soll $\int_a^b x\cos(x^2) \mathrm{d}x$ berechnet werden.

Setze $g(x) = x^2$ und $f(x) = \cos(x)$. Dann ist $f(g(x)) = \cos(x^2)$ und $g'(x) = 2x$. Mit der Substitutionsregel I gilt also

$$\int_a^b x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{2x}_{=g'(x)}\underbrace{\cos(x^2)}_{=f(g(x))}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{g(a)}^{g(b)}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{a^2}^{b^2}\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\sin(x)]_{a^2}^{b^2}.$$

Beispiel 9.3.17. Für $a, b \in \mathbb{R}$ soll $\int_a^b \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ berechnet werden.
Setze $g(x) = x^2 + 1$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $f(g(x)) = \frac{1}{x^2+1}$ und $g'(x) = 2x$. Mit der Substitutionsregel I gilt also

$$\int_a^b \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{2x}_{=g'(x)}\underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{=f(g(x))}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{a^2+1}^{b^2+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[\ln(x)]_{a^2+1}^{b^2+1}.$$

Beispiel 9.3.18. Gesucht ist der Wert $\int_0^9 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
Hier haben wir auch eine Hintereinanderausführung von Funktionen – nämlich $\sqrt{x}$ und e^x – aber die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist nirgends zu sehen. Wir drehen die Sichtweise daher um und fügen eine weitere Funktion hinzu. Wir setzen $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ und $g(x) = x^2$. Wir wählen das g so, dass die Funktion $f(g(x))$ möglicht einfach wird. In diesem Fall haben wir $f(g(x)) = e^x$. Es ist $g'(x) = 2x$. Mit der Substitutionsregel I erhalten wir

$$\int_0^3 \underbrace{2x}_{=g'(x)}\underbrace{e^x}_{=f(g(x))}\mathrm{d}x = \int_{0^2}^{3^2}\underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{=f(x)}\mathrm{d}x = \in .$$

Lesen wir diese Gleichung von rechts nach links, erhalten wir

$$\int_0^9 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^3 xe^x\mathrm{d}x \overset{9.3.12}{=} 2[(x-1)e^x]_0^3.$$

Im letzten Beispiel haben wir die Substitutionsregel I „von rechts nach links“ angewendet. Diese Sichtweise nennen wir Substitutionsregel II. Da es dieselbe Aussage bleibt, können wir auf einen Beweis verzichten.

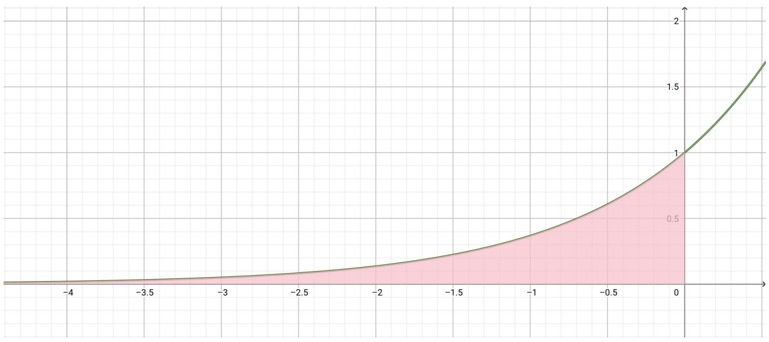
Theorem 9.3.19 (Substitutionsregel II)**.** *Seien I und J Intervalle. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $a < b \in I$. Sei weiter $g : J \longrightarrow I$ differenzierbar, injektiv und g' sei stetig. Ist nun $[a, b] \subseteq g(J) \subseteq I$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 9.3.20. Diese Version der Substitutionsregel haben wir in Beispiel 9.3.18 benutzt. Beachten Sie, dass wir alle Funktionen nur auf dem Intervall $[0, 9]$ betrachtet haben. Auf diesem Intervall ist die Funktion $g(x) = x^2$ tatsächlich injektiv, da sie streng monoton steigt. Damit waren dort alle Voraussetzungen an die Substitutionsregel II erfüllt.
Die Injektivität brauchen wir, damit die Elemente $g^{-1}(a)$ und $g^{-1}(b)$ eindeutig bestimmt sind.

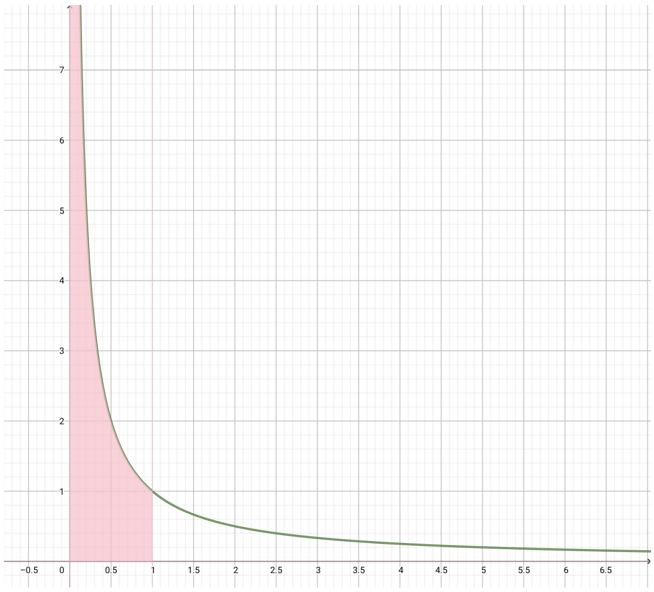
9.4 uneigentliche Integrale

Bisher haben wir bei Integralen nur beschränkte Funktionen auf beschränkten Intervallen betrachtet. Der betrachtete Flächeninhalt lag also stets in einem Rechteck. In diesem Abschnitt wollen wir diese Einschränkungen fallen lassen. In vielen Fällen wird der Flächeninhalt „unendlich groß“ sein. Insbesondere, wenn wir eine konstante Funktion verschieden von Null auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten. Der Flächeninhalt, den der Graph der Nullfunktion auf $\mathbb{R}$ mit der x-Achse einschließt, ist hingegen sicher gleich Null – und damit insbesondere definiert.
Wir wollen in diesem Abschnitt insbesondere klären, ob der Graph der Exponentialfunktion mit der x-Achse auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ einen endlichen Flächeninhalt einschließt:



In diesem Beispiel ist die Funktion beschränkt, aber das Intervall ist unbeschränkt. Wir möchten auch klären ob die Funktion $\frac{1}{x}$ auf dem Intervall

$(0,1)$ einen endlichen Flächeninhalt mit der x-Achse einschließt:



Beispiel 9.4.1. Wir nähern uns vorsichtig einer Antwort auf die erste Frage. Wir fangen einfach mal an mit dem Symbol ∞ zu rechnen, als wäre es eine reelle Zahl. Das sollten Sie besser nicht nachmachen!

PARENTAL ADVISORY EXPLICIT CONTENT

Gesucht ist der Flächeninhalt der zwischen negativen x-Achse und dem Graphen der Exponentialfunktion eingeschlossen wird. Wir suchen also den Wert von $\int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{d}x$. Das rechnen wir aus

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{d}x = [e^x]_{-\infty}^{0} = e^0 - e^{-\infty} = 1 - \frac{1}{e^\infty} = 1 - \frac{1}{\infty} = 1 - 0 = 1.$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich 1.

So ganz falsch ist diese Rechnung nicht. Wie immer, wenn man mit ∞ arbeitet, muss man aber Grenzwerte ins Spiel bringen.

Notation 9.4.2. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $a < \infty$ und $-\infty < a$.

Definition 9.4.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit $a < b$. Wir betrachten eine Funktion $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f integrierbar ist über $[a,\beta]$, für alle $\beta \in [a,b)$, und so dass f an der Stelle b nicht definiert ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

Wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Existiert der Grenzwert nicht, dann sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ divergiert.

Das gleiche können wir auch definieren, wenn f an der Stelle a nicht definiert ist:

Definition 9.4.4. Seien $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$. Wir betrachten eine Funktion $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f integrierbar ist über $[\alpha, b]$, für alle $\alpha \in (a, b]$, und so dass f an der Stelle a nicht definiert ist. Wir setzen

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Wenn der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Existiert der Grenzwert nicht, dann sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ divergiert.

Beispiel 9.4.5. Jetzt wissen wir also, was $\int_{-\infty}^0 e^x\mathrm{d}x$ formal bedeutet. Wir überprüfen ob dieses uneigentliche Integral existiert und berechnen gegebenenfalls den Wert.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 e^x\mathrm{d}x &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \int_\alpha^0 e^x\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \searrow -\infty} [e^x]_\alpha^0 \\ &= \lim_{\alpha \searrow -\infty} \underbrace{e^0}_{=1} - e^\alpha = 1 - \underbrace{\lim_{\alpha \searrow -\infty} e^\alpha}_{=0} = 1.\end{aligned}$$

Wir erhalten zum Glück genau das, was wir uns schon intuitiv in Beispiel 9.4.1 überlegt hatten.

Beispiel 9.4.6. Sei $s \in (0, \infty)$ eine positive reelle Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$f_s : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{x^s}.$$

Diese Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Wir möchten herausfinden für welche $s \in (0, \infty)$ das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_s(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Wir überlegen uns als erstes, was eine Stammfunktion von f_s ist. Für $s = 1$ brauchen wir eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$. Diese ist gegeben durch $F_1(x) = \ln(x)$. Für $s \neq 1$ ist es noch einfacher. Dann ist eine Stammfunktion von $f_s(x) = \frac{1}{x^s} = x^{-s}$ gleich $F_s(x) = \frac{1}{1-s}x^{1-s}$. Es folgt

$$\int_0^1 f_s(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \searrow 0} \int_\alpha^1 f_s(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \lim_{\alpha\searrow 0}[\ln(x)]_\alpha^1 & \text{falls } s = 1 \\ \lim_{\alpha\searrow 0}[\frac{1}{1-s}x^{1-s}]_\alpha^1 & \text{falls } s \neq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \lim_{\alpha\searrow 0}\ln(1) - \ln(\alpha) & \text{falls } s = 1 \\ \lim_{\alpha\searrow 0}\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s}\alpha^{1-s} & \text{falls } s \neq 1 \end{cases}$$

Da $\lim_{\alpha\searrow 0}\ln(\alpha) = -\infty$ ist, sehen wir sofort, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$ divergiert.
Wenn $s \neq 1$ ist, müssen wir eine Fallunterscheidung durchführen. Wir wissen, dass für jedes $k > 0$ die Gleichung $\lim_{\alpha\searrow 0}\alpha^k = 0$ ist. Damit ist aber für jedes $k > 0$ auch $\lim_{\alpha\searrow 0}\alpha^{-k} = \infty$. Damit divergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$ für alle $s \in (0,\infty)$, mit $1 - s < 0$. Für $s \in (0,\infty)$, mit $1 - s > 0$ hingegen, erhalten wir

$$\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\searrow 0}\frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s}\alpha^{1-s} = \frac{1}{1-s}.$$

Wir fassen nochmal zusammen:

Das uneigentliche Integral $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x$ konvergiert genau dann, wenn $s \in (0,1)$ ist.

Was könnte nun mit dem Ausdruck $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ gemeint sein? Wir benutzen einfach die Additivität devon Flächeninhalten und setzen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Auch das machen wir nochmal formal:

Definition 9.4.7. Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, mit $a < b$. Wir betrachten eine Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f integrierbar ist über $[\alpha, \beta]$, für alle $\alpha < \beta \in (a, b)$, und so dass f an den Stellen a und b nicht definiert ist. Für ein beliebiges $c \in (a, b)$ setzen wir

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\searrow a}\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\beta\nearrow b}\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x. \tag{9.3}$$

Wenn beide Grenzwerte auf der rechten Seite existiert, sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert. Existiert mindestens ein Grenzwert nicht, dann sagen wir, dass das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ divergiert.

Bemerkung 9.4.8. Der Ausdruck (9.3) ist unabhänging von der Wahl von c. Ist nämlich $c' \in (a,b)$ irgendein anderes Element, so gilt $0 = \int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^c f(x)\mathrm{d}x$ (siehe 9.2.11). Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\searrow a}\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\beta\nearrow b}\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\alpha\searrow a}\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\beta\nearrow b}\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^c f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\alpha\searrow a}\left(\int_\alpha^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^{c'} f(x)\mathrm{d}x\right) + \lim_{\beta\nearrow b}\left(\int_c^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_{c'}^c f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&\overset{9.2.12}{=} \lim_{\alpha\searrow a}\left(\int_\alpha^{c'} f(x)\mathrm{d}x\right) + \lim_{\beta\nearrow b}\left(\int_{c'}^\beta f(x)\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Lemma 9.4.9. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und sei $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne definiert. Dann gilt $\int_a^b f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x$.*

Beweis. Wenn f über $[a,b]$ integrierbar ist, dann folgt die Aussage aus der Substitutionsregel II mit $g(x) = -x$. Für das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ folgt die Aussage nach Übergang zum entsprechenden Grenzwert. □

Beispiel 9.4.10. Wir kommen zurück zum Beispiel $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}$. Da $(-x)^2 = x^2$ ist, folgt aus Lemma 9.4.9

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}$ konvergiert also genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ konvergiert. Da $e^{-x^2} \leq e^x$ ist für alle $x \in (-\infty, 0]$, gilt $\int_\alpha^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_\alpha^0 e^x\mathrm{d}x$ für alle $\alpha \in (-\infty, 0]$. Weiter ist $\lim_{\alpha\searrow-\infty}\int_\alpha^0 e^x\mathrm{d}x = 1$ nach Beispiel 9.4.5. Die Funktion $t \mapsto \int_{-t}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ ist also monoton steigend und beschränkt. Damit existiert

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\searrow-\infty}\int_\alpha^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

und das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}$ konvergiert. Es gilt tatsächlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$

aber das können wir hier nicht beweisen.

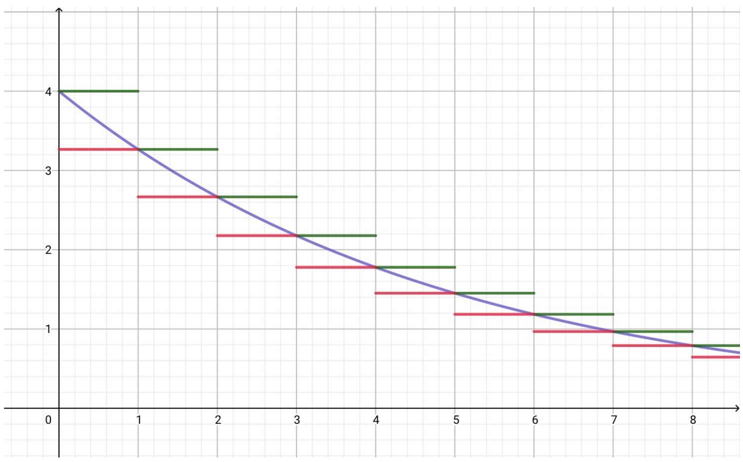
Das Argument aus dem letzten Beispiel sieht sehr nach dem Majoranten-Kriterium für Reihen 5.4.14 aus. Zum Abschluss der Vorlesung schlagen wir wieder eine Brücke zu den Reihen.

Satz 9.4.11. *Sei $n \in \mathbb{Z}$ und $f : [n, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt konvergiert das uneigentliche Integral $\int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ konvergiert.*

Beweis. Wir argumentieren nur anschaulich und lassen den formalen Beweis weg. Wir unterteilen das Intervall $[n, \infty)$ in Teilintervalle der Länge 1 – also $(n, n+1)$, $(n+1, n+2)$, ... Im folgenden sei $k \in \mathbb{Z}$, mit $k \geq n$. Wir betrachten die Treppenfunktionen T_o, mit $T_o(x) = f(k)$ für alle $x \in (k, k+1)$, und T_u, mit $T_u(x) = f(k+1)$ für alle $x \in (k, k+1)$. Da f monoton fallend ist, gilt

$$T_u \leq f \leq T_o.$$

In der folgenden Skizze ist T_u rot, f blau und T_o grün dargestellt.



Es ist $\int_n^{\infty} T_o \mathrm{d}x = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ der Flächeninhalt zwischen T_o und der x-Achse. Ist die Reihe konvergent, so ist dieser Flächeninhalt endlich. Dann ist aber auch der Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse endlich und das uneigentliche Integral $\int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert.

Wenn andererseits das uneigentliche Integral $\int_n^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert, dann sehen wir genauso, dass die Reihe $\sum_{k=n+1}^\infty f(k) = \int_n^\infty T_u \mathrm{d}x$ konvergiert. Dann konvergiert aber auch die Reihe $\sum_{k=n}^\infty f(k) = f(n) + \sum_{k=n+1}^\infty f(k)$. $\square$

Bemerkung 9.4.12. Dieser Satz kann zum Beispiel benutzt werden um recht einfach zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$ für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert, oder dass die Reihe $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln(k)}$ divergiert.
Rechnen Sie das ruhig nach!