Perfektoide Räume

Die Gedankenwelt des Fieldsmedaillenträgers Peter Scholze

Ulrich Görtz

ALMAMATH – Essen, 6. Juni 2024

Essen Seminar for Algebraic Geometry and Arithmetic

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Ziel des Vortrags

Was sind perfektoide Räume?

Urbano Montes Weltkarte, 1587

Ziel des Vortrags

Was sind perfektoide Räume?

Urbano Montes Weltkarte, 1587

Definition (Scholze)

1. Ein *perfektoider Körper* ist ein Körper K mit einem nicht-diskreten vollständigen nicht-archimedischen Absolutbetrag mit Restklassencharakteristik $p > 0$ und Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$, so dass die Abbildung $\mathcal{O}_K/p \to \mathcal{O}_K/p$, $x \mapsto x^p$, surjektiv ist.
2. Eine *perfektoide* K-*Algebra* ist eine vollständige Banach-K-Algebra R, in der die Menge der potenz-beschränkten Elemente R° beschränkt ist und deren Frobenius-Endomorphismus $\Phi\colon R^\circ/p \to R^\circ/p$ surjektiv ist.
3. Ein *perfektoider Raum* ist ein adischer Raum, der lokal isomorph ist zu einem affinoiden Raum $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ für eine perfektoide K-Algebra R.

Ziel des Vortrags

Grundideen zum Begriff des perfektoiden Raums:

- $\mathfrak{p}$-adische Zahlen, $\mathfrak{p}$-adische Geometrie ("adische Räume"),
- Ziel: Vergleich "Charakteristik 0", "Charakteristik $\mathfrak{p} > 0$" (z. B.: Vergleich von Galois-Gruppen).

Ziel des Vortrags

Grundideen zum Begriff des perfektoiden Raums:

- $\mathfrak{p}$-adische Zahlen, $\mathfrak{p}$-adische Geometrie ("adische Räume"),
- Ziel: Vergleich "Charakteristik 0", "Charakteristik $\mathfrak{p} > 0$" (z. B.: Vergleich von Galois-Gruppen).

Wo liegt die Innovation von Scholze? /
Was wird vereinfacht/ermöglicht?

- Zusammenführung und Begriffsbildung,
- Geometrisierung ("relative Version"), ermöglicht wesentlich bessere Anwendung als zuvor,
- Benutzung und Weiterentwicklung der Theorie adischer Räume.

Grundproblem: Lösen von Gleichungen

Wichtiges Ziel in vielen Bereichen der Mathematik:

Wollen die Lösungsmengen von Gleichungen (oder Gleichungssystemen) verstehen.

Grundproblem: Lösen von Gleichungen

Wichtiges Ziel in vielen Bereichen der Mathematik:

Wollen die Lösungsmengen von Gleichungen (oder Gleichungssystemen) verstehen.

- Existieren Lösungen?
- Gibt es nur endlich viele Lösungen? Wie viele? Lassen sie sich explizit angeben?
- Sofern es unendlich viele Lösungen gibt: Hat die Lösungsmenge eine (geometrische) Struktur?

Wo suchen wir nach Lösungen?

Natürliche Zahlen $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Wo suchen wir nach Lösungen?

Natürliche Zahlen $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Wo suchen wir nach Lösungen?

Natürliche Zahlen $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$, $\quad$ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$,

$$-1,\ -0.5,\ 0,\ 0.333\dots,\ 1,\ 2,\ 3.14159265\dots \in \mathbb{R}.$$

Lösungen über den reellen Zahlen

Offenbar: Eine Gleichung, die keine Lösungen über $\mathbb{R}$ hat, hat auch keine über $\mathbb{Z}$.

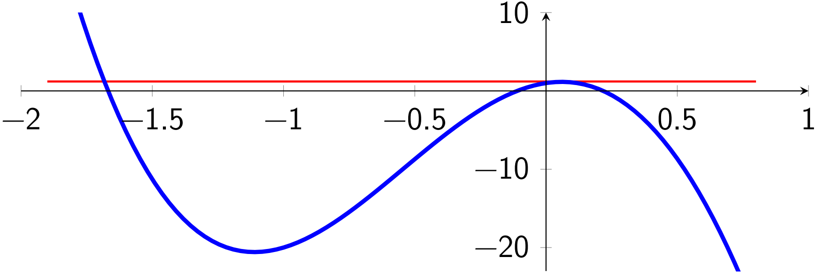
Gutes Verständnis der Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ kann Verständnis der Lösungsmenge über $\mathbb{Z}$ erleichtern.

Lösungen über den reellen Zahlen

Offenbar: Eine Gleichung, die keine Lösungen über $\mathbb{R}$ hat, hat auch keine über $\mathbb{Z}$.

Gutes Verständnis der Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ kann Verständnis der Lösungsmenge über $\mathbb{Z}$ erleichtern.

Über $\mathbb{R}$: analytische Methoden (Differential- und Integralrechnung).



Analyse der letzten Ziffer ...

Die Gleichung

$$x^4 + 17 = 4y^2$$

hat keine Lösungen in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$,

Analyse der letzten Ziffer ...

Die Gleichung

$$x^4 + 17 = 4y^2$$

hat keine Lösungen in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$,

denn die letzte Ziffer müsste sein

auf der linken Seite $x^4 + 17$:	auf der rechten Seite $4y^2$:
2, 3, 7 or 8,	0, 4, or 6.

Analyse der letzten Ziffer ...

Die Gleichung

$$x^4 + 17 = 4y^2$$

hat keine Lösungen in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$,

denn die letzte Ziffer müsste sein

auf der linken Seite $x^4 + 17$:	auf der rechten Seite $4y^2$:
2, 3, 7 or 8,	0, 4, or 6.

Noch präziser: Betrachte mehrere Ziffern.

Analyse der letzten Ziffer ...

Die Gleichung

$$x^4 + 17 = 4y^2$$

hat keine Lösungen in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$,

denn die letzte Ziffer müsste sein

auf der linken Seite $x^4 + 17$:	auf der rechten Seite $4y^2$:
2, 3, 7 or 8,	0, 4, or 6.

Noch präziser: Betrachte mehrere Ziffern.

Mit anderen Worten: Rest bei Division durch 10, 100, 1000, ..., 10^i.

Analyse der letzten Ziffer, verbesserte Version

Können alternativ Rest bei Division durch andere natürliche Zahlen $n = 2, 3, 4, \ldots$ betrachten.
Zum Beispiel betrachte die Gleichung

$$x^4 - 17 = 7y^2$$

Die Gleichungs ist "lösbar modulo 10" (z.B. könnten beide Seiten letzte Ziffer 3 haben).

Analyse der letzten Ziffer, verbesserte Version

Können alternativ Rest bei Division durch andere natürliche Zahlen $n = 2, 3, 4, \ldots$ betrachten.
Zum Beispiel betrachte die Gleichung

$$x^4 - 17 = 7y^2$$

Die Gleichungs ist "lösbar modulo 10" (z.B. könnten beide Seiten letzte Ziffer 3 haben).

Aber der Rest bei Division durch 7 ist 1, 3, 4, oder 5 auf der linken und 0 auf der rechten Seite.

Division mit Rest ≈ n-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23$$

Division mit Rest $\approx$ n-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1$$

Division mit Rest $\approx$ n-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

Division mit Rest $\approx$ $\mathfrak{n}$-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 10111_2.$$

Division mit Rest $\approx$ $\mathfrak{n}$-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 10111_2.$$

$23 \equiv 1 \mod 2,$

$23 \equiv 11_2 = 3 \mod 4,$

$23 \equiv 111_2 = 7 \mod 16.$

Division mit Rest ≈ $\mathfrak{n}$-adische Darstellung

Binärdarstellung

$$23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 10111_2.$$

$23 \equiv 1 \mod 2,$

$23 \equiv 11_2 = 3 \mod 4,$

$23 \equiv 111_2 = 7 \mod 16.$

7-adische Darstellung:

$$23 = 21 + 2 = 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 32_7.$$

$23 \equiv 2 \mod 7.$

Endliche Körper

Für p Primzahl bildet

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \dots, p-1\}$$

mit Addition und Multiplikation modulo p einen Körper.

Endliche Körper

Für p Primzahl bildet

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, \ldots, p-1\}$$

mit Addition und Multiplikation modulo p einen Körper.

Der Körper $\mathbb{F}_p$ und jeder Erweiterungskörper K von $\mathbb{F}_p$ hat *Charakteristik* p:

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ Summanden}} = 0 \quad \text{in } K.$$

In K gilt

$$(x + y)^p = x^p + y^p,$$

die Abbildung $x \mapsto x^p$ ist also ein Körperhomomorphismus (*Frobenius-Homomorphismus*).

Vervollständigung: 10-adische Zahlen

Vervollständigung: 10-adische Zahlen

10-adische Zahlen $\mathbb{Z}_{10}$:

Erlaube unendlich viele Ziffern *nach links*:

$$\mathbb{Z}_{10} = \{\ldots a_2 a_1 a_0;\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

Alle natürlichen Zahlen sind 10-adische Zahlen.

Vervollständigung: 10-adische Zahlen

10-adische Zahlen $\mathbb{Z}_{10}$:

Erlaube unendlich viele Ziffern *nach links*:

$$\mathbb{Z}_{10} = \{\ldots a_2 a_1 a_0;\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

Alle natürlichen Zahlen sind 10-adische Zahlen. Wir können 10-adische Zahlen addieren und multiplizieren.

Manchmal passieren überraschende Sachen:

$$\ldots 999 + 1 = 0, \quad \text{folglich } \ldots 999 = -1.$$

Vervollständigung: 10-adische Zahlen

10-adische Zahlen $\mathbb{Z}_{10}$:
Erlaube unendlich viele Ziffern *nach links*:

$$\mathbb{Z}_{10} = \{\ldots a_2 a_1 a_0;\ a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

Alle natürlichen Zahlen sind 10-adische Zahlen. Wir können 10-adische Zahlen addieren und multiplizieren.

Eigenschaften

- alle ganzen Zahlen sind 10-adische Zahlen,
- $\mathbb{Z}_{10}$ hat Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$.
- Manche Bruchzahlen in $\mathbb{Z}_{10}$: $\ldots 6667 \cdot 3 = 1 \rightsquigarrow \frac{1}{3} \in \mathbb{Z}_{10}$.

Besser: $\mathfrak{p}$-adische Zahlen

Für $\mathfrak{p}$ Primzahl haben wir den Ring $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen:

Betrachte $\mathfrak{p}$-adische Darstellung, erlaube unendlich viele Ziffern *links* vom Komma.

Besser: $\mathfrak{p}$-adische Zahlen

Für p Primzahl haben wir den Ring $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen Zahlen:

Betrachte p-adische Darstellung, erlaube unendlich viele Ziffern *links* vom Komma.

$\mathbb{Z}_2 = \{\dots a_2 a_1 a_0;\ a_i \in \{0, 1\}\}$
$\mathbb{Z}_7 = \{\dots a_2 a_1 a_0;\ a_i \in \{0, 1, \dots, 6\}\}$

Geometrie der p-adischen Zahlen

Absolutbetrag auf $\mathbb{Z}_p$

$$|x|_p = \frac{1}{p^n},$$

wobei n die Anzahl der Nullen am (rechten) Ende der p-adischen Darstellung ist.

Geometrie der p-adischen Zahlen

Absolutbetrag auf $\mathbb{Z}_p$

$$|x|_p = \frac{1}{p^n},$$

wobei n die Anzahl der Nullen am (rechten) Ende der p-adischen Darstellung ist.

Beispiel

- $|48|_2 = |110000_2|_2 = 1/2^4 = 1/16$,
- $|23|_7 = |32_7|_7 = 1$.

Geometrie der p-adischen Zahlen

Absolutbetrag auf $\mathbb{Z}_p$

$$|x|_p = \frac{1}{p^n},$$

wobei n die Anzahl der Nullen am (rechten) Ende der p-adischen Darstellung ist.

Für Punkte x, y betrachten wir die reelle Zahl $|x - y|_p$ als den Abstand zwischen x und y.

Ungewöhnliche Eigenschaften:

- Jedes Dreieck ist gleichschenklig.
- Je zwei Kreisscheiben sind disjunkt oder konzentrisch.

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: Erweitere $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: Erweitere $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Beispiel ($\mathfrak{p} = 2$)

$0.1_2 = 1/2, \quad 0.01_2 = 1/4,$

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: Erweitere $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Beispiel ($\mathfrak{p} = 2$)

$0.1_2 = 1/2, \quad 0.01_2 = 1/4, \qquad \ldots 111.1_2 = -1/2.$

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: Erweitere $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Beispiel ($\mathfrak{p} = 2$)

$0.1_2 = 1/2, \quad 0.01_2 = 1/4, \qquad \ldots 111.1_2 = -1/2.$

$\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ ist ein Körper: haben $+$, $-$, $\cdot$, $/$.

Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen.

Von **K. Hensel** in Berlin.

Die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und der der algebraischen Zahlen hat mir schon seit mehreren Jahren den Gedanken nahe ge-

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$: Erweitere $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Beispiel ($\mathfrak{p} = 2$)

$0.1_2 = 1/2, \quad 0.01_2 = 1/4, \qquad \ldots 111.1_2 = -1/2.$

$\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ ist ein Körper: haben $+$, $-$, $\cdot$, $/$.

Im allgemeinen schreiten alle diese Entwickelungen nach Potenzen von p mit ganzzahligen Exponenten fort, d. h. sie können folgendermaſsen geschrieben werden:

$$(1) \qquad X = \frac{A_{-h}}{p^h} + \cdots + \frac{A_{-1}}{p} + A_0 + A_1 p + \cdots;$$

für diese Zahlen erhält man also genau dieselben Entwickelungen wie für eine algebraische Function in der Umgebung einer regulären Stelle.

Der Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen

Der Körper $\mathbb{Q}_p$: Erweitere $\mathbb{Z}_p$, indem endlich viele Stellen hinter dem Komma erlaubt werden.

Beispiel ($p = 2$)

$0.1_2 = 1/2, \quad 0.01_2 = 1/4, \qquad \ldots 111.1_2 = -1/2.$

$\mathbb{Q}_p$ ist ein Körper: haben $+$, $-$, $\cdot$, $/$.

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i; \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\},$$

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i p^i; \quad i_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

Das Lokal-Global-Prinzip

Theorem (Hasse-Minkowski)

Sei $n \geqslant 1$ *und seien* $a_i \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Dann hat die Gleichung*

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$$

genau dann eine Lösung $(x_i)_i \in \mathbb{Q}^n$, *wenn über* $\mathbb{R}$ *und jedem der Körper* $\mathbb{Q}_p$ *eine Lösung existiert.*

Das Lokal-Global-Prinzip

Theorem (Hasse-Minkowski)

Sei $n \geqslant 1$ *und seien* $a_i \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Dann hat die Gleichung*

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 = 1$$

genau dann eine Lösung $(x_i)_i \in \mathbb{Q}^n$, *wenn über* $\mathbb{R}$ *und jedem der Körper* $\mathbb{Q}_p$ *eine Lösung existiert.*

Beispiel (Hasse-Minkowski für $n = 1$)

$ax^2 = 1$ lösbar in $\mathbb{Q} \Leftrightarrow a$ ist Quadrat $\neq 0 \Leftrightarrow a > 0$ und jede Primzahl p tritt mit geradem Exponenten in PFZ von a auf.

Wenn es Lösungen gibt ...

...können wir sie hinschreiben?

Linear

$$2x - 6 = 0, \qquad x = \frac{6}{2} = 3.$$

Wenn es Lösungen gibt ...

...können wir sie hinschreiben?

Linear

$$2x - 6 = 0, \qquad x = \frac{6}{2} = 3.$$

$$ax - b = 0, \;\; a \neq 0, \qquad x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}.$$

Wenn es Lösungen gibt ...

...können wir sie hinschreiben?

Linear

$$2x - 6 = 0, \qquad x = \frac{6}{2} = 3.$$

$$ax - b = 0,\ a \neq 0, \qquad x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}.$$

Quadratisch

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ or } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}.$$

Formeln für Nullstellen von Polynomen vom Grad 3, 4
(del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari ≈ 1500)

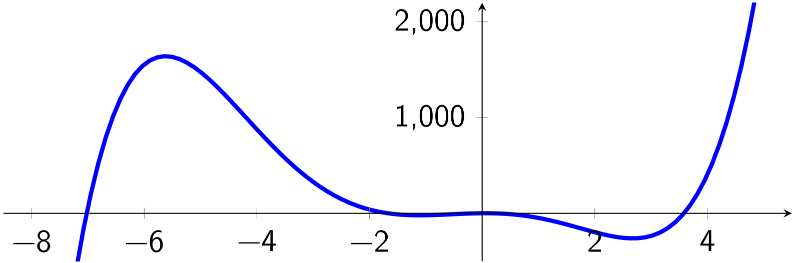
Formeln für Nullstellen von Polynomen vom Grad 3, 4
(del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari ≈ 1500)

Galois: Keine Formeln in höherem Grad! (≈ 1830)

Formeln für Nullstellen von Polynomen vom Grad 3, 4
(del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari $\approx$ 1500)

Galois: Keine Formeln in höherem Grad! ($\approx$ 1830)

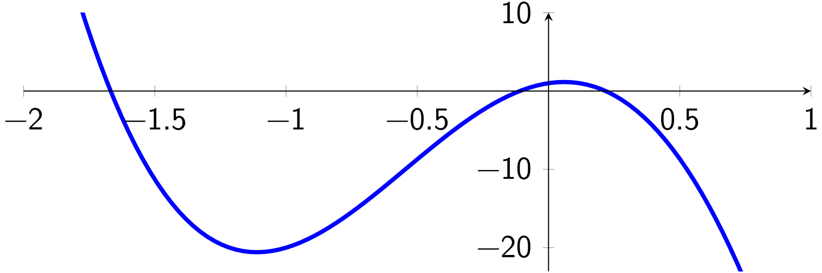
Genauer: Zum Beispiel können die Nullstellen des Polynoms $x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 40x^2 + 5x + 1$ nicht in Termen von ganzen Zahlen und $+$, $-$, $\cdot$, $/$ and $\sqrt[n]{-}$ ausgedrückt werden.



Formeln für Nullstellen von Polynomen vom Grad 3, 4
(del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari $\approx$ 1500)

Galois: Keine Formeln in höherem Grad! ($\approx$ 1830)

Genauer: Zum Beispiel können die Nullstellen des Polynoms $x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 40x^2 + 5x + 1$ nicht in Termen von ganzen Zahlen und $+$, $-$, $\cdot$, $/$ and $\sqrt[n]{-}$ ausgedrückt werden.



Lösungsformeln und Galoisgruppen

Theorem

Sei f ein Polynom über $\mathbb{Q}$, dessen Nullstellen in Termen von $+$, $-$, $\cdot$, / und $\sqrt[n]{-}$, beginnend von rationalen Zahlen, ausgedrückt werden können. Dann ist die Galoisgruppe von f auflösbar.

Beispiel

Die Galoisgruppe des Polynoms

$$x^5 + 5x^4 - 20x^3 - 40x^2 + 5x + 1$$

ist die symmetrische Gruppe S_5 und insbesondere nicht auflösbar.

Lassen sich Galois-Gruppen verstehen?

Definition (Absolute Galois-Gruppe)

Sei K ein Körper, und sei $\overline{K}$ ein separabler Abschluss von K. Wir nennen $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K.

Lassen sich Galois-Gruppen verstehen?

Definition (Absolute Galois-Gruppe)

Sei K ein Körper, und sei $\overline{K}$ ein separabler Abschluss von K. Wir nennen $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K.

Beispiel ($K = \mathbb{Q}$)

Ein gutes Verständnis der Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ ist ein zentrales Ziel der Zahlentheorie, aber extrem schwierig.

Lassen sich Galois-Gruppen verstehen?

Definition (Absolute Galois-Gruppe)

Sei K ein Körper, und sei $\overline{K}$ ein separabler Abschluss von K. Wir nennen $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ die absolute Galois-Gruppe von K.

Beispiel ($K = \mathbb{Q}$)

Ein gutes Verständnis der Gruppe $G_{\mathbb{Q}}$ ist ein zentrales Ziel der Zahlentheorie, aber extrem schwierig.

Beispiel ($K = \mathbb{Q}_p$)

Die Gruppe $G_{\mathbb{Q}_p}$ hat man besser verstanden, sie ist aber ebenfalls sehr kompliziert.

$\mathfrak{p}$-adische Geometrie

> *Peter Scholze has revolutionized the field of $\mathfrak{p}$-adic geometry.*
>
> *M. Rapoport, Laudatio for P. Scholze, ICM 2018*

$\mathfrak{p}$-adische Geometrie

> *Peter Scholze has revolutionized the field of $\mathfrak{p}$-adic geometry.*
>
> *M. Rapoport, Laudatio for P. Scholze, ICM 2018*

Tate (ca. 1962): Rigid-analytische Räume

...

Huber (ca. 1990): Adische Räume

$\rightsquigarrow$ geeigneter Begriff einer $\mathfrak{p}$-adischen Mannigfaltigkeit, eines $\mathfrak{p}$-adischen Raums.

Wie ähnlich/verschieden sind Charakteristik 0, p?

Vergleiche

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i p^i;\ i_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

und

$$\mathbb{F}_p(\!(t)\!) = \left\{ \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i t^i;\ i_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \right\}.$$

Die Beschreibungen sehen ähnlich aus (aber die Addition unterscheidet sich sehr).

Perfektoide Körper und Kippung ("tilting")

Definition (Scholze)

Ein *perfektoider Körper* ist ein Körper K, der mit einem nicht-diskreten vollständigen nicht-archimedischen Absolutbetrag versehen ist, mit Restklassencharakteristik $p > 0$ und Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$, so dass die Frobenius-Abbildung

$$\mathcal{O}_K/p \to \mathcal{O}_K/p, \quad x \mapsto x^p,$$

surjektiv ist.

Beispiel

$\overline{\mathbb{Q}}_p^{\wedge}, \quad \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})^{\wedge}, \quad \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})^{\wedge}, \quad \mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})^{\wedge}.$

Kippung: Wechsel von Char. 0 zu Char. $p > 0$

Jeder perfektoide Körper K hat eine Kippung

$$K^\flat = \mathrm{Quot}(\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_K/p).$$

Der Körper $K^\flat$ hat Charakteristik p: $\quad 1 + \cdots + 1 = 0$ in $K^\flat$.

Theorem (Fontaine, Wintenberger)

$$G_K \cong G_{K^\flat}.$$

Perfektoide Räume

Definition (Scholze)

Sei K ein perfektoider Körper.

1. Eine *perfektoide* K-*Algebra* ist eine vollständige Banach-K-Algebra R, in der die Menge der potenz-beschränkten Elemente R° beschränkt ist und deren Frobenius-Endomorphismus $\Phi\colon R^\circ/p \to R^\circ/p$ surjektiv ist.
2. Ein *perfektoider Raum* ist ein adischer Raum, der lokal isomorph ist zu einem affinoiden Raum $\mathrm{Spa}(R, R^+)$ für eine perfektoide K-Algebra R.

Kippung für perfektoide Räume

Jeder perfektoide Raum X hat eine Kippung $X^\flat$, und beide haben "dieselben étalen Überlagerungen":

Theorem (Scholze)

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(X^\flat)$$

Zusammenfassung: Perfektoide Räume

Zutaten

- $\mathfrak{p}$-adische Zahlen und zugehörige rigid-analytische Geometrie,
- perfektoide Körper: "groß", aber nicht notw. alg. abgeschlossen,
- perfektoide Algebren: groß (in aller Regel nicht noethersch), aber "kontrollierbar".

Anwendungen

- Vergleich von Charakteristik 0 und Charakteristik $\mathfrak{p}$-"Objekten" durch Kippen,
- Geometrisierung von algebraischen Konzepten durch größere Flexibilität als mit klassischen rigid-analytischen Räumen.