Symmetrie, Gruppen, Symmetriegruppen

Proseminar zur Linearen Algebra

Prof. Dr. Ulrich Görtz
Sommersemester 2021

1. Organisatorisches

— Siehe auch die Moodle-Seite zum Proseminar. —

Termin. Dienstags, 14-16 Uhr. Beginn: Di, 20.4.

Kontakt.
Für organisatorische Fragen: `ulrich.goertz@uni-due.de`.
Bei mathematischen Fragen zu Ihrem Vortrag unterstützt Sie Herr Dr. Heer Zhao, `heer.zhao@uni-due.de`.

*Nach jetzigem Stand der Planung kann das Proseminar in Präsenz im Mathematik-Gebäude, Thea-Leymann-Str. 9, stattfinden. Die Teilnehmerzahl ist wegen der Abstandsregeln auf 12 Teilnehmer*innen beschränkt.*

Die Seminarvorträge sollen an der Tafel gehalten werden und nicht länger als 80 Minuten dauern. Danach stehen circa 10 Minuten für Fragen und eine Rückmeldung zum Vortrag zur Verfügung.

Eine schriftliche Ausarbeitung Ihres Vortrags ist nicht erforderlich (und kann auch nicht als Ersatz für einen erfolgreichen Vortrag dienen).

Da vermutlich einige von Ihnen noch gar keine Vorlesungen/Vorträge an der Tafel erlebt haben und weil ohnehin die Teilnehmerzahl auf 12 beschränkt ist, werde ich die ersten beiden Vorträge selbst übernehmen. Daran können Sie schon einmal sehen, wie ich mir so einen Vortrag vorstelle.

Auch wenn es im Moment so aussieht, dass das Proseminar in Präsenz stattfinden kann und ich das, wenn es irgendwie geht, auch auf jeden Fall bevorzugen würde, erscheint es notwendig, parallel für den Fall zu planen, dass wir auf eine Online-Veranstaltung umschwenken müssen.

In diesem Fall würde das Proseminar zum gleichen Termin stattfinden, wir würden uns also jeweils in einer Videokonferenz (Zoom oder BigBlueButton) treffen. Um einem Tafelvortrag einigermaßen nahe zu kommen, brauchen Sie für Ihren eigenen Vortrag in diesem Fall neben einer Internetverbindung eine Möglichkeit, Ihren Bildschirm zu teilen und mit der Hand zu schreiben, gegebenenfalls ergänzend zu vorbereiteten

Folien. Das kann mit einem iPad oder ähnlichen Tablet, oder mit einem Graphik-/Schreibtablet gemacht werden. Wenn Ihnen kein Tablet der einen oder anderen Art zur Verfügung steht, dann melden Sie sich bitte so bald wie möglich bei mir. Sie können dann ein Schreibtablet zum Anschluss an den eigenen Computer/Laptop ausleihen.

Für das Proseminar gilt (moralische) Anwesenheitspflicht; es wird eine *aktive Teilnahme* erwartet. Für den Fall, dass Sie an einem Termin aus wichtigen Gründen verhindert sind, entschuldigen Sie sich bitte vorher bei der/dem Vortragenden und bei mir.

Erforderliche Vorkenntnisse. Gute Kenntnisse der Linearen Algebra 1, insbesondere: Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Untergruppen; Lineare Abbildungen, lineare Abbildungen und Matrizen.

Es ist nicht nötig, dass Sie die Lineare Algebra 2 schon abgeschlossen haben. Wenn nicht, dann sollten Sie sie aber parallel im Sommersemester hören.

Wir setzen als „Schulkenntnisse“ voraus, dass Sie die Begriffe der Länge einer Strecke, des Winkels zwischen zwei Geraden in der Ebene, des Flächeninhalts und des Volumens kennen. Dabei genügt ein „naiver“ Zugang wie in der Schule. In Vortrag 5 werden wir die Verbindung zur Linearen Algebra herstellen. (In [LA1] Kapitel 11 finden Sie Informationen dazu, wie man diese Begriffe formalisieren kann; das ist aber für uns an dieser Stelle nicht so wichtig.)

2. Anforderungen / Wie halte ich einen guten Seminarvortrag?

- Richten Sie die Vorbereitung auf Ihren Vortrag nach dem Grundsatz aus, dass Ihre Zuhörer möglichst viel dabei lernen und „aus dem Vortrag mitnehmen“ sollen.
- Ihr erstes und wichtigstes Ziel sollte sein, die im Vortrag zu behandelnde Mathematik gründlich zu verstehen. Das wird in der Regel eine ganz Menge Zeit in Anspruch nehmen; beginnen Sie daher frühzeitig mit Vorbereitung!
- Stellen Sie viele Fragen (sich und den anderen Seminarteilnehmer*innen). Seien Sie diszipliniert darin, sich zu fragen, warum (ob) die im zugrundeliegenden Text aufgestellten Behauptungen richtig sind. Was lässt sich vereinfachen? Wenn Sie auf Dinge stoßen, die Sie nicht verstehen, fragen Sie die anderen Seminarteilnehmer (diejenigen, die die Vorträge direkt vor oder nach Ihnen halten, haben sich vielleicht schon genau dieselbe Frage gestellt). Vielleicht ist im Buch ein Fehler? Wenn Sie damit noch nicht weiterkommen, vereinbaren Sie einen Termin mit dem Assistenten, der das Seminar betreut. (Bei diesem Seminar Herr Dr. Heer Zhao, `heer.zhao@uni-due.de`.)
- Wenn Sie die Mathematik verstanden haben, sollten Sie bewusst darüber nachdenken, wie Sie die Inhalte in Ihrem Vortrag darstellen möchten. Oft bietet es sich an, den Aufbau zu ändern, Sachen umzustrukturieren, zusätzliche Beispiele einzubauen, die Notation anzupassen, usw. — schließlich ist ein Vortrag etwas ganz anderes als ein geschriebener Text. Diese Restrukturierung ist Teil der Anforderung an Ihren Vortrag. Es genügt nicht, den Text aus dem Buch zu übersetzen und an die Tafel zu schreiben!

- Überlegen Sie im Vorfeld, was die Hauptpunkte Ihres Vortrags sind, die jeder Teilnehmer lernen sollte, und berücksichtigen Sie das entsprechend. Sie können nötigenfalls Sachen im Vortrag auslassen (zum Beispiel eine technische Rechnung, die zum Verständnis nicht notwendig ist (schauen Sie sie sich trotzdem genau an, um gegebenenfalls Fragen beantworten zu können!)). Denken Sie bei der Vortragsplanung darüber nach, was sich zum Weglassen eignet, damit Sie nicht am Ende wegen Zeitmangels gezwungen sind, die interessantesten Teile zu überspringen.
- Denken Sie insbesondere darüber nach, was ein guter Einstieg in den Vortrag ist. Wie fügt er sich ins Seminarprogramm ein? Warum sollte man sich für dieses Thema interessieren? Bereiten Sie auch einen guten Abschluss des Vortrags vor.
- Die Sachen, die Sie in der Vorbereitung besonders viel Zeit gekostet haben, sollten Sie nicht auslassen, denn die anderen Teilnehmer haben vermutlich ähnliche Schwierigkeiten beim Verständnis und können gerade an diesen Stellen viel lernen. Wenn doch einmal noch Fragen bei Ihnen offengeblieben sind, gehen Sie damit ehrlich um und versuchen Sie nicht, Probleme beim Verständnis zu verschleiern.
- Wenn im Text auf eine Übungsaufgabe verwiesen wird, gehört es zur Vorbereitung des Vortrags, diese Aufgabe zu lösen (teilweise, aber nicht immer, sind diese Aufgaben unten im Programm erwähnt).

Wenn Sie Ihren Vortrag in den Grundzügen vorbereitet haben, und *spätestens zwei Wochen vor dem Termin Ihres Vortrags* sprechen Sie Ihren Vortrag mit Herrn Zhao durch. Dabei können Sie offene Fragen von Ihrer Seite klären. (Wenn Sie gar keine Fragen haben, sollten Sie noch einmal sehr selbstkritisch hinterfragen, ob Sie die Inhalte des Vortrag mathematisch wirklich hinreichend durchdrungen haben. Es ist für den Verlauf des Vortrag besser und auch für Sie angenehmer, wenn Sie nicht erst bei Nachfragen während des Vortrags feststellen, dass es doch noch Verständnislücken gibt.)

Auch wenn es viel Arbeit sein wird, kann und soll es Spaß machen, an dem Seminar teilzunehmen. Dabei steht im Vordergrund, dass alle Teilnehmer*innen gemeinsam etwas lernen! Daher sollten Sie als Sprecher*in Fragen im Vortrag immer willkommen heißen und als Unterstützung dabei sehen, Ihren Vortrag auf die Bedürfnisse der Teilnehmer*innen auszurichten. Umgekehrt: Geben Sie sich als Zuhörer*in Mühe, den Vorträgen der anderen aktiv zu folgen und stellen Sie dort Fragen, wo Sie etwas nicht verstehen.

Nutzen Sie die Möglichkeit, Ihre eigenen Schwerpunkte zu setzen und überlegen Sie sich, wie Sie Ihren eigenen Vortrag so gestalten können, dass Sie damit zufrieden sind.

Gute Vorträge vor einer Gruppe zu halten, muss man üben (und kann man durch Übung lernen). Dieses Proseminar ist wahrscheinlich das erste Mal, dass Sie in der Uni selbst für eine ganze Sitzung an der Tafel stehen. Insofern wird nicht erwartet, dass direkt alles perfekt läuft. Sie werden im Lauf des Studiums mehrere weitere Gelegenheiten haben, selbst Vorträge zu halten, und egal in welchem Beruf Sie später landen, wird sich das mit Sicherheit auch über das Studium hinaus als sehr wertvoll erweisen.

3. Vorträge

Vortrag 1 (Quotienten von Gruppen nach Normalteilern)**.** Definieren Sie die Begriffe der *Ordnung* einer Gruppe und eines Gruppenelements, der *Nebenklasse* und des *Indexes* einer Untergruppe und beweisen Sie den Satz von Lagrange, dass die Ordnung einer Untergruppe in einer endlichen Gruppe die Gruppenordnung teilt. Definieren Sie den Begriff des *Normalteilers* und erklären Sie die Konstruktion des *Quotienten* nach einem Normalteiler.

Literatur: Dieses Thema wird sozusagen in jedem Algebra-Buch behandelt, siehe zum Beispiel [Bo] 1.2, [Art], 2.10; siehe auch [Sti] 2.1, 2.2, [LA2] Abschnitt 5.3.

Vortrag 2 (Gruppenwirkungen)**.** Definieren Sie den Begriff der *Wirkung* einer Gruppe auf einer Menge und geben Sie einige Beispiele. Definieren Sie die Begriffe *Bahn* und *Stabilisator*.

Beweisen Sie die Bahnengleichung und die Klassengleichung.

Literatur: [Bo] 5.1, [Art], 5.5, 5.6, 5.7. Siehe auch [Arm] Kap. 17, 18.

Vortrag 3 (Die Eulersche Formel für planare Graphen)**.** Definieren Sie den Begriff des *zusammenhängenden endlichen planaren Graphen* und beweisen Sie die Eulersche Formel für solche Graphen wie in [Gr] Abschnitt 4.1.

Der Stil im Buch von Grieser ist speziell darauf ausgerichtet, dass es sich um eine Einführung in das Problemlösen handelt. Für den Vortrag sollten Sie daher wahrscheinlich einiges umstrukturieren.

Siehe auch [Co] 10.3 (aber den Begriff des platonischen Körpers definieren wir erst im nachfolgenden Vortrag), [LA1] Kapitel 13, insbesondere Abschnitt 13.6.

Vortrag 4 (Die platonischen Körper)**.** Unter einem *platonischen Körper* versteht man einen konvexen Polyeder, dessen Seitenfläche regelmäßige Vielecke sind (gleichseitige Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke, . . .), dessen Seitenflächen alle zueinander kongruent sind und dessen Ecken alle die gleiche Form haben (insbesondere trifft sich an jeder Ecke die gleiche Anzahl von Kanten). Erklären Sie die hier vorkommenden Begriffe; Sie können dabei auf die geometrische Anschauung zurückgreifen, es muss also nicht alles „von Null“ entwickelt werden. Sie sollten aber zu jedem Aspekt der Definition eine konkrete Vorstellung entwickeln (und wiedergeben können), was er bedeutet.

Die platonischen Körper waren, wie der Name andeutet, schon in der Antike bekannt und werden beispielsweise in den *Elementen* von Euklid besprochen. Wir zeigen mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel, dass es (höchstens) 5 solche reguläre Polyeder gibt.

Der Hauptpunkt des Vortrags soll der Beweis sein, dass es keine anderen platonischen Körper als die “bekannten” geben kann. Übersetzen Sie das Problem dafür mithilfe des Schlegel-Diagramms in die Sprache der ebenen Graphen und benutzen Sie die Eulersche Formel aus dem vorherigen Vortrag.

Der Existenzbeweis kann durch Zeigen von entsprechenden Modellen oder Bildern abgehandelt werden.

Wenn Zeit verbleibt, könnte noch eine andere Anwendung der Eulerschen Polyederformel vorgestellt werden, zum Beispiel der Sechs-Farben-Satz oder der Beweis der Existenz (abstrakter) Graphen, die keine planaren Graphen sind.

Literatur: [Co] Ch. 10.2, 10.3. Für mögliche Ergänzungen siehe [LA1] Kapitel 13, insbesondere Abschnitt 13.6.

Vortrag 5 (Grundlagen der Analytischen Geometrie)**.** Erklären Sie die Definitionen vom *Abstand* zweier Punkte in $\mathbb{R}^n$ und von der *Länge eines Vektors* in $\mathbb{R}^n$. Stellen Sie den Zusammenhang zum *Standardskalarprodukt* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ her und besprechen Sie dessen wichtigste Eigenschaften.

Definieren Sie, wann zwei Vektoren zueinander *senkrecht* sind, und erklären Sie, wie man den *Winkel* zwischen zwei Vektoren definiert.

Definieren Sie die *orthogonale Gruppe* $O_n(\mathbb{R})$ und die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO_n(\mathbb{R})$.

Beschreiben Sie (zum Beispiel wie in [LA1] Ergänzung 7.59 und Abschnitt 11.2.5 oder [GB] Abschnitt 2.1) die Elemente der orthogonalen Gruppe $O_2(\mathbb{R})$, also alle invertierbaren Matrizen in $M_2(\mathbb{R})$, deren zugehörige lineare Abbildung *abstandserhaltend* ist.

Vortrag 6 (Die endlichen Untergruppen von $O_2(\mathbb{R})$)**.** In diesem Vortrag sollen die *endlichen* Untergruppen der orthogonalen Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ bestimmt werden. Sie können sich nach [GB] Abschnitt 2.2 und Exercise 2.3, richten.

Die Diskussion über „Fundamentalbereiche“ am Ende von Abschnitt 2.2 kann kurz gehalten werden.

Vortrag 7 (Drehungen und Spiegelungen von $\mathbb{R}^3$)**.** Wiederholen/definieren Sie die Begriffe einer *Drehung* von $\mathbb{R}^3$, einer *Spiegelung* von $\mathbb{R}^3$ in einer Ebene, d.h. in einem zweidimensionalen Unterraum, und einer *Drehspiegelung*.

Zeigen Sie, dass alle Elemente von $O(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung oder eine Drehspiegelung sind, je nachdem, was die Determinante ist. Siehe [GB] Abschnitt 2.3, vergleiche auch [LA1] Beispiel 10.11 (2).

Vortrag 8 (Endliche Untergruppen von $SO_3(\mathbb{R})$, Teil I)**.** Wir beginnen in diesem Vortrag mit der Untersuchung der endlichen Untergruppen der Gruppe $SO_3(\mathbb{R})$, mit anderen Worten: der Untergruppen von $O_3(\mathbb{R})$, die nur aus Drehungen bestehen. Das ist um einiges komplizierter (und dementsprechend intreessanter) als der Fall der $SO_2(\mathbb{R})$, und wir teilen diese Aufgabe auf zwei Vorträge auf.

Folgen Sie [GB] Abschnitt 2.4 bis S. 15 unten.

Eine wichtige Rolle spielen die Symmetriegruppen der platonischen Körper (siehe dazu auch [Arm] Kapitel 8).

Siehe auch [Art] 5.9, [Arm] Kap. 19.

Vortrag 9 (Endliche Untergruppen von $SO_3(\mathbb{R})$, Teil II)**.** Dies ist die direkte Fortsetzung des vorherigen Vortrags; wir schließen nun die Klassifikation der endlichen „Drehgruppen“ des Raumes ab. Siehe [GB] Abschnitt 2.4, Seite 16 bis um Ende von Abschnitt 2.4.

Siehe auch [Art] 5.9, [Arm] Kap. 19.

Vortrag 10 (Klassifikation der endlichen Untergruppen von $O(\mathbb{R}^3)$)**.** Nachdem wir die endlichen Untergruppen $SO_3(\mathbb{R})$ verstanden haben, kommen wir nun zur Gruppe $O_3(\mathbb{R})$. Dazu müssen wir verstehen, wie sich die Spiegelungen ins Bild einfügen. Siehe [GB] Abschnitt 2.5. Erläutern Sie auch Exercise 2.7 und 2.8 dort.

Vortrag 11 (Kristallographische Gruppen der Ebene)**.** In diesem Vortrag kommen wir noch einmal auf die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ zurück und betrachten nun nicht nur abstandserhaltende lineare Abildungen, sondern auch Translationen, also Abbildungen der Form $v \mapsto v + w$ für ein festes $w \in \mathbb{R}^2$, und Verkettungen von Translationen und orthogonalen Abbildungen.

Definieren Sie den Begriff des *Gitters* (das können wir auch allgemein für $\mathbb{R}^n$ machen) und der kristallographischen Gruppe (auch Wandmustergruppe, auf Englisch oft *wallpaper group*, das ist auch der in [Arm] benutzte Begriff), [Arm] Kapitel 25.

Erklären Sie, welche Winkel als Drehungen in $\mathbb{R}^2$ in Betracht kommen, die ein Gitter auf sich selbst abbilden. ([Arm] Theorem (25.3)).

Erklären Sie so viel wie möglich aus den Kapitel 24, 25, 26 in [Arm] (Vieles aus Kapitel 24 haben wir schon gemacht, das brauchen Sie natürlich nicht lange zu wiederholen). „Zeigen“ Sie wenigstens einige der kristallographischen Gruppen an Beispielen.

Literatur: [Arm] Kap. 24, 25, 26. Siehe auch [Co] Kapitel 4, [Art] 5.1–5.4. Vergleiche [GB] 2.6 für einige Überlegungen zur analogen Fragestellung für den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.

Auf der Webseite [E] können Sie mit diesen Symmetrien „herumspielen“; damit ist auch die Grafik auf der Titelseite entstanden. Siehe auch Wikipedia[1].

Vortrag 12 (Darstellungen)**.** Definieren Sie die Begriffe *Darstellung*, *Äquivalenz von Darstellungen* und *invarianter Unterraum* und erläutern Sie diese anhand von Beispielen.

Als Quelle können Sie [St], Kap. 3.1 bis einschl. Def. 3.1.10, oder [Se], 1.1–1.3, verwenden. Während das Buch von Serre sehr knapp ist, ist das Buch von Steinberg fast schon zu ausführlich – im ersten Fall ist die Hauptaufgabe, den knappen Text

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_kristallographische_Gruppe`

zu verstehen und auszuarbeiten, im zweiten Fall die Aufgabe, den Text zu verstehen und für einen Vortrag angemessen zu strukturieren. In beiden Fällen ist es nicht ausreichend, einfach „das Buch an die Tafel zu schreiben“!

Vortrag 13 (Irreduzible Darstellungen)**.** Definieren Sie die Begriffe der *direkten Summe* von Darstellungen, der *irreduziblen, zerlegbaren, unzerlegbaren und vollständig zerlegbaren Darstellung* und erläutern Sie diese anhand von Beispielen. Erklären Sie, dass alle diese Eigenschaften unter der Äquivalenz von Darstellungen erhalten bleiben.

Als Quelle können Sie [St], Kap. 3.1 von Def. 3.1.11 bis zum Ende, oder [Se], Teile von 1.3, 1.4 (aber Thm. 1 nd Thm. 2 sollen erst im folgenden Vortrag behandelt werden; stattdessen sind einige Beispiele wichtig, die die neuen Begriffe illustrieren) verwenden. Lesen (und beherzigen) Sie auch die Hinweise zu diesen beiden Büchern in der Beschreibung des vorherigen Vortrags!

Vortrag 14 (Der Satz von Maschke)**.** Beweisen Sie den Satz von Maschke, [St] Abschnitt 3.2, insbesondere Theorem 3.2.8; oder [Se], Theorem 1 und Theorem 2 in 1.3, 1.4. Der Beweis von Theorem 1 bei Serre ist in gewissem Sinne einfacher, weil er nicht den Begriff des Skalarprodukts benötigt. Es wäre schön, beide Beweismethoden (die sich ja ähnlich sind) kurz anzusprechen.

Literatur

[Arm] M. Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer UTM 1988.

[Art] M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser 1993.

[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer 2009. https://doi.org/10.1007/978-3-540-92812-6

[Co] H. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley 1969.

[E] A. Levskaya, https://eschersket.ch/.

[Gr] D. Grieser, *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, Springer Spektrum 2017, https://doi.org/10.1007/978-3-658-14765-5

[GB] L. Grove, C. Benson, *Finite Reflection Groups*, Springer Graduate Texts in Math. **99**, 2. Aufl., 1985.

[LA1] U. Görtz, *Lineare Algebra I*, Vorlesungsskript WS 2020/21, Aktuelle Version verfügbar unter https://math.ug/la1-ws2021/ (dort finden Sie unter *Inhalt* auch einen Link zur PDF-Datei).

[LA2] U. Görtz, *Lineare Algebra II*, Vorlesungsskript SS 2021, Aktuelle Version verfügbar unter https://math.ug/la2-ss21/ (dort finden Sie unter *Inhalt* auch einen Link zur PDF-Datei). – *kommt demnächst*

[Se] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics (auch in Französisch: *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann).

[St] B. Steinberg, *Representation Theory of Finite Groups*, Springer 2012 https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0776-8

[Sti] J. Stillwell, *Naive Lie Theory*, Springer 2008.