MASTER-SEMINAR ÜBER TORISCHE VARIETÄTEN

PROF. DR. U. GÖRTZ, DR. A. PIEPER, WS 2024/2025

Torische Varietäten bilden eine Klasse von Varietäten, die einerseits besonders einfach durch gewisse kombinatorische Daten beschrieben werden, aber andererseits eine Fülle interessanter Beispiele liefern. Der Name kommt daher, dass alle diese Varietäten mit einer Gruppenoperation durch einen "algebraischen Torus" versehen sind, d.h. durch eine Gruppenvarietät der Form $\mathbb{G}_m^r$, wobei $\mathbb{G}_m$ die multiplikative Gruppe $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ (über dem Grundkörper k) bezeichnet. Die ersten Beispiele für torische Varietäten sind der affine Raum $\mathbb{A}_k^n$ und der projektive Raum $\mathbb{P}_k^n$; viele weitere Beispiele werden wir in den ersten Vorträgen des Seminars kennenlernen.

Im Seminar studieren wir verschiedene Eigenschaften von Varietäten und Methoden anhand dieser Beispielklasse.

Literatur: Wir richten uns im Seminar nach dem Buch [F] von Fulton. Unten sind noch einige weitere Quellen angegeben, die bei Bedarf konsultiert werden können.

Anforderungen/Vorkenntnisse: Grundkenntnisse in Algebraischer Geometrie, zum Beispiel im Umfang der Vorlesung *Algebraische Geometrie 1* im WS 2023/2024. Kenntnisse aus der Vorlesung *Algebraische Geometrie 2* sind hilfreich.

Organisatorisches: Der Vortrag soll an der Tafel gehalten werden und nicht länger als 80 Minuten dauern. Danach gibt es eine kurze Feedback-Runde, wo Stärken und Schwächen der Präsentation gemeinsam diskutiert werden.

Es wird eine aktive Teilnahme erwartet, auch bei den Vorträgen der Anderen. Des weiteren empfehlen wir, sich im Vorfeld des Vortrages mindestens einmal mit einem der Dozenten für Fragen zu treffen.

Für das Seminar gibt es 9 ECTS im Masterstudiengang, sofern man zwei erfolgreiche Vorträge gehalten hat, wovon zumindest einer der beiden mit einem $*$ gekenzeichnet sein sollte. Alternativ kann das Seminar auch für 6 ECTS im Bachelor angerechnet werden. In diesem Fall genügt ein Vortrag (mit oder ohne $*$). Bitte nehmen Sie gegebenenfalls Kontakt auf, wenn Sie das Seminar in einem Lehramtsstudiengang anrechnen lassen möchten.

Programm

1. **Einführung.**

2. **Konvexe polyedrische Kegel.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 1.2
Dieser Vortrag, in dem keine algebraische Geometrie vorkommt, stellt einige Grundlagen über konvexe polyedrische Kegel zusammen. Vieles kann anschaulich erklärt werden, so dass sicher einige der Beweise ausgelassen werden können (und aus Zeitgründen: müssen). Es muss aber darauf geachtet werden, auch die "anschaulich klaren" Begriffe sauber zu definieren und gegebenenfalls auf Schwierigkeiten in den Beweisen hinzuweisen.

3. **Affine torische Varietäten.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 1.3
In diesem Vortrag werden *affine torische Varietäten* definiert als Spektren gewisser Ringe, die aus Kegeln (im Sinne des vorherigen Vortrags) konstruiert werden. Beachte Fultons Konvention, dass er von Schemata spricht, aber unter *Punkten* stets *abgeschlossene Punkte* versteht. (Weil er außerdem über den komplexen Zahlen arbeitet, könnte man ohne größere Verluste auch von Prävarietäten sprechen; wir schließen uns aber Fultons Sprechweise an.) Die Begriffe *nicht-singulär* und *singulär* können in diesem Vortrag ignoriert werden; die Beispiele auf Seite 17 und 18 sollen aber behandelt werden. Von den Übungsaufgaben sollte mindestens die zweite Aufgabe auf Seite 19 angesprochen werden.

4. **Fächer und torische Varietäten.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 1.4 Nun konstruieren wir durch Verkleben affiner torischer Varietäten weitere *torische Varietäten*; dabei sind die Verklebedaten auch durch kombinatorische Daten gegeben. Nach Möglichkeit sollten alle Übungsaufgaben aus diesem
Abschnitt angesprochen werden, insbesondere die Hirzebruch-Flächen $\mathbb{F}_a$.

5. **Lokale Eigenschaften torischer Varietäten.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.1
Wir untersuchen, welche torischen Varietäten glatt sind. Der Begriff der Glattheit sollte sauber eingeführt/wiederholt werden. Der Abschnitt über die Cohen-Macaulay-Eigenschaft sollte ausgelassen und durch Beispiele ersetzt werden.

6. **Quotienten von Schemata nach endlichen Gruppen *.** *Inhalt des Vortrags:* [GW] (12.7)
Wir schieben zur Vorbereitung einen allgemeinen Vortrag über Quotienten von (affinen) Schemata nach endlichen Gruppen ein. Remark 12.31 kann ausgelassen werden, der Rest sollte nach Möglichkeit erklärt werden.

7. **Torische Flächen, Quotientensingularitäten *.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.2
Nun studieren wir die lokale Gestalt von zwei-dimensionalen torischen Varietäten (im singulären Fall).

8. **Eigentliche torische Varietäten *.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.3, 2.4 bis zur Proposition auf S. 39 (einschließlich Beweis).

Wir geben ein Kriterium, wann torische Varietäten (oder allgemeiner: "torische" Morphismen zwischen torischen Varietäten) eigentlich sind. Der Begriff des Grenzwerts sollte algebraisch umformuliert werden (Fortsetzbarkeit von Abbildungen ähnlich wie in den Bewertungskriterien für Separiertheit/Eigentlichkeit). Dementsprechend sprechen wir nicht über Kompaktheit, sondern immer über Eigentlichkeit.

9. **Aufblasungen *.** *Inhalt des Vortrags:* [H] I.4, [F] 2.4 ab S. 39.

Führe zuerst allgemein den Begriff der Aufblasung ein (zum Beispiel wie bei Hartshorne, vergleiche auch [Ha] Ch. 7, [GW] (13.19)). Diskutiere danach Aufblasungen torischer Varietäten wie bei Fulton und eine Auswahl der Übungsaufgaben dort.

10. **Glatte eigentliche torische Flächen *.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.5 (inklusive der Übungsaufgaben!).

In diesem Vortrag klassifizieren wir die glatten eigentlichen torischen Flächen anhand der zugehörigen Fächer.

11. **Auflösung von Singularitäten torischer Varietäten I *.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.6 bis Seite 47 (letzte Übungsaufgabe).

Definiere zunächst den Begriff *Auflösung der Singularitäten* allgemein, siehe zum Beispiel [GW], [H]. Erkläre dann die Auflösung von Singularitäten im Flächenfall, erläutere die Hirzebruch-Jung-Kettenbruchentwicklung und diskutiere die Übungsaufgaben auf S. 46/47.

12. **Auflösung von Singularitäten torischer Varietäten II *.** *Inhalt des Vortrags:* [F] 2.6 ab Seite 47 unten, inkl. Übungsaufgaben.

Zum Schluss behandeln wir die Auflösung von Singularitäten im höherdimensionalen Fall, einschließlich einiger Beispiele.

Literatur

[C1] D. A. Cox, *Minicourse on Toric Varieties*, `https://dacox.people.amherst.edu/lectures/toric.pdf`

[C2] D. A. Cox, *Lectures on toric varieties*, `https://dacox.people.amherst.edu/lectures/coxcimpa.pdf`

[CLS] D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck, *Toric varieties*, AMS Graduate Studies in Math. **124**.

[D] V. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** (1978), 97–154.

[E] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Springer Graduate Texts in Mathematics **168**, 1996.

[F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, 1993.

[GW] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Vieweg-Teubner.

[Ha] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer GTM

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer GTM

[KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal Embeddings I*, Springer Lecture Notes in Math. **339**.

[O] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry: An introduction to toric varieties*, Springer.

[T] S. Telen, *Introduction to Toric Geometry*, `https://arxiv.org/abs/2203.01690`.